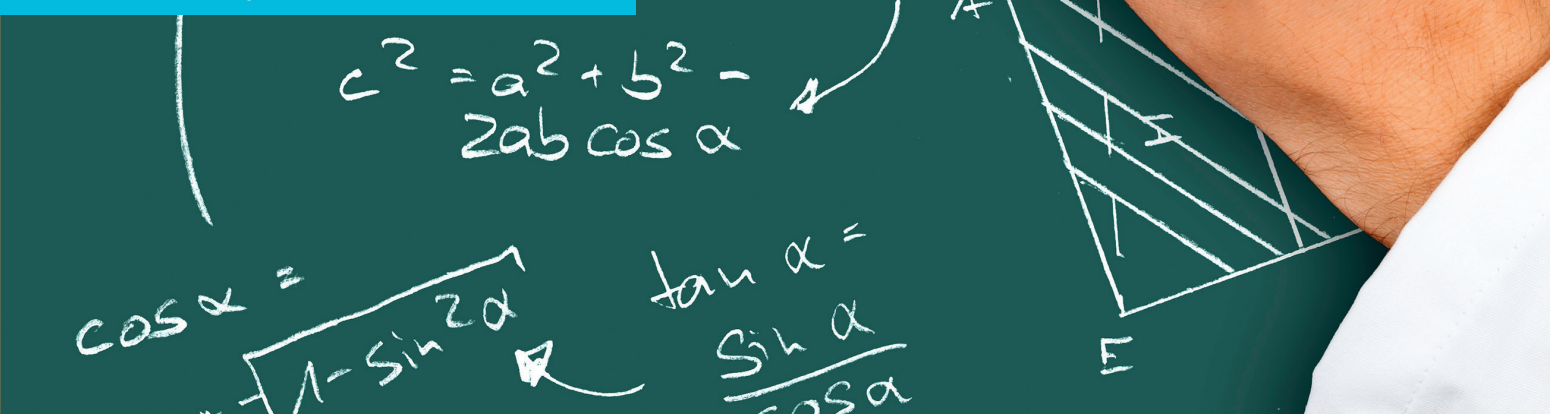


Sorin Doru Noaghi • Dorin Lint  
 Maranda Lint • Lucian Nicolae Pitu

# Matematică

Manual pentru clasa a VII-a



Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației Naționale.  
Acest manual școlar este realizat în conformitate cu Programa școlară  
aprobată prin OM nr. 3393 din 28.02.2017.

**116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii**



*Sorin Doru Noaghi • Dorin Linț  
Maranda Linț • Lucian Nicolae Pițu*

# Matematică

Manual pentru clasa a VII-a

Manualul școlar a fost aprobat prin ordinul ministrului educației naționale nr.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând cu anul școlar 2019–2020.

Inspectoratul școlar .....

Școala/Colegiul/Liceul .....

**ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT:**

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

\* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

*Matematică. Manual pentru clasa a VII-a*

Sorin Doru Noaghi, Dorin Linț, Maranda Linț, Lucian Nicolae Pițu

Referenți științifici: lect. univ. dr. Marius-Nicolae Heljiu, Departamentul de Matematică-Informatică, Facultatea de Științe,  
Universitatea din Petroșani  
prof. dr. Dan-Ștefan Marinescu, Colegiul Național „Iancu de Hunedoara”, Hunedoara

Copyright © 2019 Grup Media Litera  
Toate drepturile rezervate



Editura Litera

O.P. 53; C.P. 212, sector 4, București, România  
tel.: 021 319 63 90; 031 425 16 19; 0752 548 372  
e-mail: comenzi@litera.ro

Ne puteți vizita pe



Editor: Vidrașcu și fiii  
Redactori: Gabriela Niță, Carmen Birta  
Corector: Sabrina Florescu  
Credite foto: Dreamstime, Shutterstock  
Copertă: Vlad Panfilov  
Tehnoredactare și prepress: Banu Gheorghe

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României  
Matematică. Manual pentru clasa a VII-a /  
Sorin Doru Noaghi, Dorin Linț, Maranda Linț,  
Lucian Nicolae Pițu. – București: Litera, 2019  
ISBN 978-606-33-3992-9

- I. Noaghi, Sorin Doru
- II. Linț, Dorin
- III. Linț, Maranda
- IV. Pițu, Lucian Nicolae

# CUPRINS

Probleme recapitulative	7	<b>4. Patrulaterul</b>	<b>101</b>
<b>1. Mulțimea numerelor reale</b>	<b>11</b>	4.1. Patrulater convex.	
1.1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural.		Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex	102
Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv	12	4.2. Paralelogramul: proprietăți.	
L1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural	15	Aplicații în geometria triunghiului	105
L2. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional	15	L1. Paralelogramul. Proprietăți	105
L3. Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv	18	L2. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului	110
1.2. Numere iraționale, exemple.		4.3. Paralelograme particulare: dreptunghi, romb, pătrat	115
Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	23	L1. Dreptunghiul. Proprietăți	115
L1. Numere iraționale	23	L2. Rombul. Proprietăți	118
L2. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	26	L3. Pătratul. Proprietăți	120
1.3. Scoaterea factorilor de sub radical.		4.4. Trapezul: clasificare, proprietăți. Linia mijlocie în trapez	125
Introducerea factorilor sub radical	28	4.5. Perimetre și arii	131
1.4. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări.		<b>5. Cercul</b>	<b>137</b>
Compararea și ordonarea numerelor reale.		5.1. Unghi înscris în cerc. Tangente dintr-un punct exterior	
Modulul unui număr real	32	la un cerc	138
L1. Aproximarea numerelor reale prin fracții zecimale.		L1. Coarde și arce în cerc, proprietăți	138
Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor	32	L2. Unghi înscris în cerc	142
L2. Compararea și ordonarea numerelor reale	36	L3. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc	146
L3. Modulul unui număr real	39	5.2. Poligoane regulate înscrise într-un cerc	150
1.5. Operații cu numere reale.		5.3. Lungimea cercului și aria discului	154
Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$	43	<b>6. Asemănarea triunghiurilor</b>	<b>159</b>
L1. Adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea numerelor reale	43	6.1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante	160
L2. Ridicarea la putere a numerelor reale	49	L1. Segmente proporționale	160
L3. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$	51	L2. Teorema paralelelor echidistante	163
L4. Ordinea efectuării operațiilor	53	6.2. Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales.	
1.6. Media aritmetică ponderată a $n$ numere reale, $n \geq 2$ .		Împărțirea unui segment în părți proporționale	
Media geometrică a două numere reale pozitive	58	cu numere date	165
L1. Media aritmetică ponderată a $n$ numere reale, $n \geq 2$ .	58	L1. Teorema lui Thales	165
L2. Media geometrică a două numere reale pozitive	60	L2. Reciproca teoremei lui Thales	168
1.7. Ecuații de forma $x^2 = a$ , unde $a \in \mathbb{R}$	65	L3. Împărțirea unui segment în părți proporționale	
<b>2. Ecuații și sisteme de ecuații liniare</b>	<b>69</b>	cu numere date	171
2.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă.		6.3. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării,	
Identități	70	aplicații. Criterii de asemănare a triunghiurilor	173
2.2. Ecuații de forma $a \cdot x + b = 0$ , unde $a, b \in \mathbb{R}$ .		L1. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării	173
Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente	73	L2. Criterii de asemănare a triunghiurilor	178
2.3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute.		L3. Aplicații practice ale asemănării triunghiurilor	183
Rezolvarea prin metoda substituției și/sau prin metoda reducerii	78	<b>7. Relații metrice în triunghiul dreptunghic</b>	<b>189</b>
L1. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute.	78	7.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă: Teorema înălțimii.	
L2. Metoda substituției și metoda reducerii	81	Teorema catetei	190
2.4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare	85	L1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă	190
<b>3. Elemente de organizare a datelor</b>	<b>89</b>	L2. Teorema înălțimii	193
3.1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide.		L3. Teorema catetei	197
Sistem de axe ortogonale în plan	90	7.2. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora	201
L1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide	90	7.3. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic	206
L2. Sistem de axe ortogonale	93	7.4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Aplicații	211
3.2. Dependențe funcționale	96	L1. Rezolvarea triunghiului dreptunghic	211
		L2. Aplicații ale triunghiului dreptunghic în determinarea	
		elementelor unor poligoane regulate și în situații practice	213
		Probleme de sinteză	219
		Teste finale și răspunsuri	221

# Structura manualului

## Varianta tipărită

Manualul de *Matematică – clasa a VII-a* cuprinde șapte capitole, totalizând un număr de 28 unități de învățare care respectă domeniile și conținuturile din programă. Lecțiile sunt însoțite de activități de învățare-evaluare interactive, cu caracter practic-aplicativ, care determină formarea competențelor specifice cu care acestea sunt corelate. Unitățile de învățare sunt divizate în lecții a căror parcurgere poate fi realizată în 1-3 ore de curs.

## Pagina de prezentare a unității de învățare

**7** **Relatii metrice în triunghiul dreptunghic**

**Numărul capitoului**

**Titlul capitoului**

**Unități de învățare**

**Competențe specifice**

**Numărul de pagină**

## Pagini din manual

**Titlu subunitate**

**Titlu lecție**

**Ne amintim**

**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

**Descoperim, înțelegem, exemplificăm**

**Imagini sugestive**

**Temă de portofoliu**

**Evaluare sumativă**

**Reșinem**

**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

**Activități multimedia interactive de învățare**

## Despre rubrici

<b>Ne amintim</b>	concepte, cunoștințe pe care elevii le-au dobândit în lecții anterioare, în scopul valorificării achizițiilor acestora și vizând identificarea firească a noilor conținuturi prin conexiuni logice
<b>Rezolvăm și observăm</b>	exerciții/probleme relevante pentru <i>identificarea</i> sau <i>deducerea</i> unor elemente noi pe baza observației: proprietăți, algoritmi, implicații
<b>Descoperim, înțelegem, exemplificăm</b>	conținuturile prevăzute de programa școlară, însoțite de exemple concludente, comentarii, modele de rezolvare
<b>Știm să aplicăm, identificăm conexiuni</b>	aplicații rezolvate, unele rezultate matematice remarcabile care realizează conexiuni între elementele de conținut din lecție, achiziții anterioare și viața cotidiană.
<b>Aplicație practică</b>	activitate de grup sau individuală care presupune realizarea unor sarcini de lucru descrise
<b>Temă de portofoliu</b>	activitate individuală sau de grup, care constă în parcurgerea unor etape descrise, folosind modelele prezentate în manual.
<b>Reținem</b>	sintetizarea elementelor noi de conținut prin concluzii, reluarea unor idei esențiale, prezentarea unor scheme, imagini
<b>Să nu ne pripim!</b>	atenționări referitoare la folosirea unor proprietăți în mod incorect/ abuziv
<b>Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm</b>	activități eșalonate în funcție de gradul de dificultate și de parcurgerea conținuturilor în cadrul unității de învățare.
<b>Evaluare sumativă</b>	itemi de evaluare: obiectivi, semiobiectivi, subiectivi

### Varianta digitală



Varianta digitală cuprinde integral conținutul manualului în variantă tipărită, având în plus exerciții interactive, jocuri educaționale, animații, filme și simulări.

Toate acestea au obiectivul de a aduce un plus de valoare cognitivă.

Paginile din manual pot fi vizionate pe desktop, laptop, tabletă, telefon, oferind o experiență excelentă de navigare.

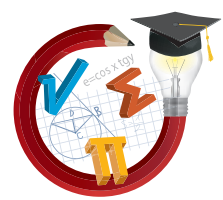
Navigarea în varianta digitală permite parcurgerea manualului și revenirea la activitatea de învățare precedentă.

Forma electronică a manualului școlar are un conținut similar celei tipărite și cuprinde, în plus, o serie de activități multimedia interactive de învățare: statice, animate, interactive.

<b>AMII static</b> 	Cuprinde desene, fotografii, diagrame statice, hărți statice.
<b>AMII animat</b> 	Cuprinde animații sau filme.
<b>AMII interactiv</b> 	Cuprinde elemente educaționale cu grad înalt de interactivitate (simulări de procese, rezolvare de probleme, experiment și descoperire, jocuri educative), prin care elevul reușește să adauge o valoare cognitivă superioară.



- 1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
  - 1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui  $\mathbb{R}$
  - 1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare
  - 1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame
  - 1.4. Identificarea patruleterelor particulare în configurații geometrice date
  - 1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
  - 1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date
  - 1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată
- 2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale**
  - 2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
  - 2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare
  - 2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora
  - 2.4. Descrierea patruleterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
  - 2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
  - 2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri
  - 2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia
- 3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
  - 3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
  - 3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare
  - 3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora
  - 3.4. Utilizarea proprietăților patruleterelor în rezolvarea unor probleme
  - 3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
  - 3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii
  - 3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic
- 4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
  - 4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
  - 4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare
  - 4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
  - 4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patruletere
  - 4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic
  - 4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea
  - 4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic
- 5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**
  - 5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
  - 5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare
  - 5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor
  - 5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
  - 5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice
  - 5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice
  - 5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic
- 6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**
  - 6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale
  - 6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare
  - 6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)
  - 6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patruletere
  - 6.5. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri
  - 6.6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor
  - 6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic



- 1 Fie mulțimea  $A = \left\{ -\frac{8}{4}, \frac{-3}{-0,5}, \frac{78}{-13}, \frac{7}{4}, 6^2 : 3^2, (-3)^0 \right\}$ . Determinați mulțimile  $A \cap \mathbb{N}$ ,  $A \cap \mathbb{Z}$ ,  $A \setminus \mathbb{Z}$ .
- 2 Calculați suma numerelor întregi cuprinse între  $-\frac{23}{6}$  și  $\frac{63}{22}$ .
- 3 Precizați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.
  - a) „Numărul  $a = 7 - 13 + 18 - 10 + 9$  este natural.”
  - b) „Numărul  $b = (-2)^3 + (-3)^2 + (-3 + 2) \cdot (-3 - 2)$  este întreg negativ.”
  - c) „Numărul  $c = -\frac{1}{4} + \left(0,5 - \frac{5}{2} + 0,2\right) : \left(-4 + \frac{2}{5}\right)$  este rațional și nu este întreg.”
- 4 La un test, elevii unei clase au obținut: trei note de 6, patru note de 7, cinci note de 8, câte șase note de 9 și șapte note de 10. Calculați media clasei la acest test.
- 5 Fie numerele  $x = 2,7$ ;  $y = 1\frac{1}{2}$  și  $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ . Aflați rezultatul calculului  $z \cdot (x - y^2)$ .
- 6 Arătați că numărul  $n = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot \left[ \frac{4}{3} - (0, (3))^2 \right] : 4\frac{8}{9}$  este natural.
- 7
  - a) Determinați numerele întregi  $x$  pentru care  $|x + 3| = 7$ .
  - b) Determinați numerele întregi  $y$  pentru care  $|3y - 2| \leq 4$ .
- 8 La cerințele următoare, alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.
  - 8.1. Cel mai mare divizor comun al numerelor 10 și 15 este:  
A. 25;                      B. 30;                      C. 5;                      D. 10.
  - 8.2. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 10 și 15 este:  
A. 100;                      B. 50;                      C. 30;                      D. 5.
  - 8.3. Dacă  $a$  este număr natural și  $\frac{a+7}{a+2}$  este număr întreg, atunci  $a$  are valoarea:  
A. 3;                      B. 0;                      C. 1;                      D. -1.
  - 8.4. După ce a parcurs 30% din lungimea unui traseu, un sportiv constată că mai are de parcurs încă 8,4 km. Lungimea traseului este:  
A. 10 km;                      B. 12 km;                      C. 84 km;                      D. 42 km.
- 9 Pentru  $a = -2 - (-4)$  și  $b = -3 + (-3)^2 - (-2) \cdot (-4)$ , calculați valoarea raportului  $\frac{a-3 \cdot b}{3 \cdot a + b}$ .
- 10 Aflați numerele raționale  $x$  și  $y$  știind că au suma 67, iar valoarea raportului dintre  $(x - 10)$  și  $y$  este 0,5.
- 11 Cu elemente ale mulțimii  $S = \{27, 64, 102, 1234, 5532, 10010, 10^5\}$ , formați submulțimile:  
 $A = \{x \in S \mid x : 2\}$ ,  $B = \{x \in S \mid x : 3\}$ ,  $C = \{x \in S \mid x : 4 \text{ și } x \neq 8\}$ .

12

Arătați că:

- a) numărul  $2^{n+3} + 2^n$  este divizibil cu 9, oricare ar fi numărul natural  $n$ .
- b) numărul  $4 \cdot m + 8^m$  este multiplu al lui 4, oricare ar fi numărul natural nenul  $m$ .
- c) numărul 3 nu divide numărul  $2^p + 6^p$ , pentru nicio valoare a numărului natural  $p$ .

13

Stabiliți dacă numărul  $a = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) : \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right)$  este pozitiv, negativ sau nul.

14

Aflați:

- a) numărul natural  $x$  din proporția  $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$ .
- b) numărul întreg  $y$  din proporția  $\frac{3}{y} = \frac{y}{27}$ .

15

Aflați numerele  $a$ ,  $b$  și  $c$ , știind că sunt direct proporționale cu 2,  $\frac{5}{2}$  și 3, iar media lor aritmetică este 25.

16

Numerele  $a$ ,  $b$  și  $c$  sunt raționale și verifică egalitatea  $3 \cdot a + 4 \cdot b = c - 36$ . Determinați cele trei numere dacă  $a$  și  $b$  sunt direct proporționale cu 4 și 3, iar  $b$  și  $c$  sunt invers proporționale cu 0,24 și 0,01.

17

Rezolvați următoarele ecuații:

- a)  $1,3 \cdot x + 2,73 = 2 \cdot (1,2 \cdot x - 1)$ ;
- b)  $\frac{x}{2} + \frac{4}{9} = \frac{x+7}{6}$ ;
- c)  $\frac{5 \cdot x - 1}{10} = \frac{2 \cdot x - 3}{6} + \frac{1}{3}$ .

18

Dintr-un grup de copii, o treime participă la un concurs de schi, iar ceilalți 14 copii hotărăsc doar să-i susțină. Aflați numărul copiilor din grup.

19

Dragoș a cumpărat cadouri pentru prietenii săi Alin, Cezar și Vlad. Cadoul lui Alin a costat  $\frac{2}{5}$  din suma pe care o avea, cadoul lui Cezar cu 8 lei mai puțin, iar cadoul lui Vlad a costat 31 de lei. Știind că, după ce a plătit cumpărăturile, lui Dragoș i-au mai rămas 13 lei, aflați suma cheltuită de Dragoș pentru cadouri.

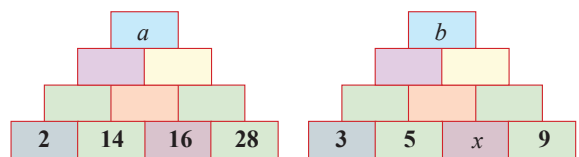
20

Dintr-un depozit de materiale de construcții s-au vândut 22 de tone de ciment, adică  $\frac{5}{8}$  din cantitatea de ciment existentă în depozit, iar a doua zi s-au vândut  $\frac{3}{4}$  din cantitatea rămasă. Aflați cantitatea de ciment care mai rămâne în depozit după cele două vânzări.

21

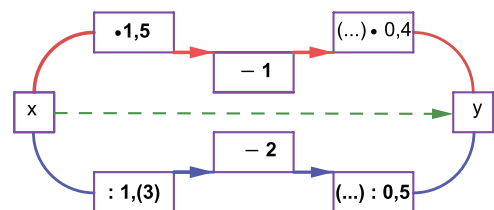
Copiați pe caiete tabelele alăturate, apoi completați căsuțele libere, respectând următoarea regulă: media aritmetică a două numere situate în (două) căsuțe vecine din același rând se scrie în căsuța situată deasupra lor.

Aflați numărul  $x$ , știind că, efectuând toate calculele, numerele  $a$  și  $b$  sunt egale.



22

Pornind de la  $x$  și efectuând toate operațiile indicate în figura alăturată, pe oricare dintre cele două trasee se ajunge la rezultatul înscris în căsuța din dreapta. Aflați numerele  $x$  și  $y$ .



- 23** Segmentul  $AD$  conține punctele  $B$  și  $C$  astfel încât  $AB = 4$  cm,  $AC = 12$  cm,  $AD = 20$  cm. Arătați că punctul  $C$  este mijlocul segmentului  $BD$ .
- 24** Punctele  $O, A, B, C$  sunt coliniare în această ordine, iar segmentele  $OA, AB$  și  $BC$  au lungimile exprimate în cm, prin numere naturale pare consecutive. Se știe că  $M$  este mijlocul segmentului  $AC$  și  $OM = 11$  cm. Calculați:
- lungimea segmentului  $OC$ ;
  - distanța dintre  $N$ , mijlocul segmentului  $OB$ , și punctul  $M$ .
- 25** Unghiurile  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle COD$  sunt unghiuri opuse la vârf,  $O \in AC$ , iar  $PO \perp BD$ ,  $P \in \text{Int } \sphericalangle AOD$ . Dacă  $\sphericalangle COP = 133^\circ$ , aflați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$ .
- 26** Unghiurile  $\sphericalangle AOB$ ,  $\sphericalangle BOC$ ,  $\sphericalangle COD$  și  $\sphericalangle DOA$  sunt unghiuri în jurul punctului  $O$ ,  $\sphericalangle AOB = 80^\circ$ ,  $\sphericalangle BOC = 140^\circ$  și  $CO \perp OD$ .
- Calculați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle AOC$  și  $\sphericalangle AOD$ .
  - Demonstrați că semidreapta opusă semidreptei  $OC$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle AOB$ .
- 27** Între laturile triunghiului  $ABC$  au loc relațiile:  $AB + \frac{BC}{2} = BC + \frac{AC}{2} = AC + \frac{AB}{2} = 12$  cm. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
- $AB = \dots$  cm;
  - $\mathcal{P}_{\triangle ABC} = \dots$  cm;
  - $\sphericalangle BAC = \dots^\circ$ ;
  - $\sphericalangle ABC = \dots^\circ$ .
- 28** Fie unghiul  $\sphericalangle xOy$  cu măsura de  $120^\circ$  și punctele  $A \in Ox$ ,  $B \in Oy$  cu  $AO = BO$ . Mediatoarele segmentelor  $AO$  și  $BO$  se intersectează în punctul  $C$ . Demonstrați că:
- $\triangle AOC \equiv \triangle BOC$ ;
  - $\triangle ABC$  este isoscel;
  - $AC \parallel OB$ .
- 29** Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic,  $\sphericalangle A = 90^\circ$  și  $AB = AC$ . Bisectoarea unghiului exterior  $A$  intersectează bisectoarea unghiului exterior  $C$  în punctul  $D$ . Stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare dintre propozițiile date.
- $AD \parallel BC$ ;
  - $\sphericalangle ADC = 100^\circ$ ;
  - $\triangle ADC$  este isoscel;
  - $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$ ;
  - $\sphericalangle ADB = 110^\circ 30'$ .
- 30** În triunghiul  $ABC$ ,  $AB = AC = 10$  cm,  $\sphericalangle A = 120^\circ$ ,  $AD$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAC$ ,  $D \in BC$ , iar  $M$  este mijlocul laturii  $AB$ . Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
- $\sphericalangle ABC = \dots^\circ$ ;
  - $\sphericalangle ADB = \dots^\circ$ ;
  - $\sphericalangle BMD = \dots^\circ$ ;
  - $AD = \dots$  cm;
  - $DM = \dots$  cm;
  - $d(M, BD)$ .

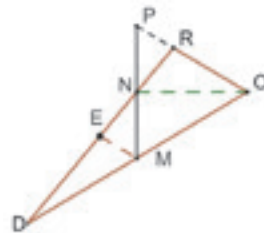
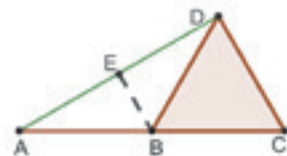


- 31** Segmentul  $AB$  este diametru al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ . Pe cerc, de o parte și de alta a dreptei  $AB$ , sunt situate punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $\sphericalangle BOC = 45^\circ$  iar arcele  $AD$  și  $BD$  sunt congruente. Demonstrați că  $OC \perp AD$ .

- 32** În triunghiul  $\triangle DEF$  se cunosc  $DE = 7$  cm,  $DF = 24$  cm și  $EF = 25$  cm.

- Arătați că triunghiul este dreptunghic.
- Dacă  $DL$  este mediană a triunghiului, calculați perimetrul triunghiului  $\triangle LED$ .

- 33** Fie unghiul propriu  $\sphericalangle ABC$ . Paralela prin punctul  $A$  la dreapta  $BC$  intersectează bisectoarea unghiului în  $D$ .
- Demonstrați că  $AB \equiv AD$ .
  - Dacă  $BC \equiv DC$ , demonstrați că  $AC \perp BD$ .
- 34** De o parte și de alta a dreptei  $BC$ , se consideră triunghiurile echilaterale  $ABC$  și  $DBC$ . Segmentul  $BE$  este mediană în triunghiul  $ABC$ ,  $E \in AC$ , iar  $BF$  este înălțime în triunghiul  $BCD$ ,  $F \in CD$ .
- Demonstrați că triunghiul  $BEF$  este echilateral.
  - Calculați raportul  $\frac{BP}{CP}$ ,  $P$  fiind punctul de intersecție al dreptelor  $BC$  și  $EF$ .
- 35** Pe mediatoarea segmentului  $AB$ , se consideră punctele  $C$  și  $D$ , diferite de mijlocul segmentului  $AB$ .
- Demonstrați că  $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ .
  - Știind că  $\sphericalangle CDB = 38^\circ$ , calculați măsura unghiului  $ADB$ .
- 36** Triunghiurile  $ABC$  și  $DBC$  sunt dreptunghice,  $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$  și  $E$  este mijlocul laturii  $BC$ .
- Dacă punctele  $A, E, D$  nu sunt coliniare, demonstrați că triunghiul  $AED$  este isoscel.
  - Dacă  $AD \perp BC$ , arătați că  $\triangle ABC \equiv \triangle DBC$ .
- 37** Punctul  $B$  este situat pe mediana  $MA$  a triunghiului  $MNP$ , astfel încât  $AB = 3$  cm,  $BM = 6$  cm.
- Dacă  $NB \cap MP = \{C\}$ , arătați că  $CM \equiv CP$ ;
  - Dacă  $PB \cap MN = \{D\}$ , arătați că  $PD = 3 \cdot BD$ .
- 38** Segmentele congruente  $AB$  și  $CD$  se intersectează în punctul  $E$ ,  $AE = 3$  cm,  $AB = 6$  cm,  $CE = \frac{1}{2} \cdot CD$ .  
Demonstrați că:
- $\triangle AED \equiv \triangle CEB$ ;
  - $AC \parallel BD$ .
- 39** Punctele  $A, B, C$  sunt coliniare, în această ordine. De aceeași parte a dreptei  $AB$ , se consideră punctele  $D$  și  $E$ , astfel încât  $DA \perp BC$ ,  $DA \equiv BC$  și  $EC \perp AB$ ,  $EC \equiv AB$ .
- Arătați că  $\triangle ABD \equiv \triangle CEB$ .
  - Calculați măsurile unghiurilor triunghiului  $BDE$ .
  - Demonstrați că dacă  $BF \perp DE$ , atunci  $FD \equiv FE$ .
- 40** Construiți un triunghi  $DEF$ , în care mediana  $DM$  are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii  $EF$ , iar  $\sphericalangle DEF = 60^\circ$ .
- 41** Fie  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $AB$  și  $AC$  ale triunghiului echilateral  $\triangle ABC$  și fie  $P$ , simetricul punctului  $M$  față de dreapta  $BC$ . Demonstrați că dreapta  $NP$  conține mijlocul segmentului  $BC$ .
- 42** În figura alăturată, punctele  $A, B, C, D, E$  reprezintă obiective turistice, segmentele marcate reprezintă străzi. Se știe că  $A, B, C$  sunt puncte coliniare și că  $BC = CD = DB = 800$  m. Triunghiul  $ABD$  este isoscel, iar punctul  $E$  este mijlocul segmentului  $AD$ .
- Demonstrați că  $BE \parallel CD$ .
  - Aflați măsura unghiului  $CAD$ .
  - Calculați lungimea traseului  $A-B-C-D-B-E$ .
- 43** Dora, Ovidiu și Radu participă la un joc în care se deplasează pe diferite trasee. Figura alăturată reprezintă prin segmente aceste trasee. Se știe că  $ON$  este bisectoarea  $\sphericalangle DOR$ , perpendiculara în punctul  $N$  pe dreapta  $ON$  intersectează  $OR$  în  $P$  și  $DO$  în mijlocul  $M$  al segmentului  $DO$ , iar  $ME \parallel OR$ ,  $E \in DR$ . Pentru început, copiii ocupă pozițiile  $D, O, R$  și se deplasează, păstrând ordinea, în pozițiile  $O, P$  respectiv  $E$ .
- Arătați că Dora parcurge o distanță de două ori mai mare decât Ovidiu.
  - Arătați că Radu parcurge jumătate din traseul  $R-D$ .
- 44** Calculați suma măsurilor unghiurilor marcate și notate, în figura alăturată, cu:  $a, b, c, d, e, f$ .





# 1

# Mulțimea numerelor reale

- 1.1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural.  
Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv
- 1.2 Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale
- 1.3 Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical
- 1.4 Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări.  
Compararea și ordonarea numerelor. Modulul unui număr real
- 1.5 Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorilor de forma  $a\sqrt{b}$
- 1.6 Media aritmetică ponderată a  $n$  numere reale,  $n \geq 2$ .  
Media geometrică a două numere reale pozitive
- 1.7 Ecuații de forma  $x^2 = a$ , unde  $a$  este număr real



## Competențe specifice:

1.1 2.1 3.1 4.1 5.1 6.1

1.1

# Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv

## L1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

### Ne amintim

#### Mulțimi de numere

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ , mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ , mulțimea numerelor raționale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

#### Reguli de calcul cu puteri

Dacă  $a, b \in \mathbb{Q}^*$ , iar  $n, p \in \mathbb{Z}$ , atunci:

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

$$a^n : a^p = a^{n-p}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

#### Pătrate perfecte

Numărul  $x \in \mathbb{N}$  se numește **pătrat perfect** dacă există  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $x = n^2$ .

#### Exemple

$$7 \in \mathbb{N}, 7 \in \mathbb{Z}, 7 \in \mathbb{Q}$$

$$-7 \notin \mathbb{N}, -7 \in \mathbb{Z}, -7 \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{1}{7} \notin \mathbb{N}, \frac{1}{7} \notin \mathbb{Z}, \frac{1}{7} \in \mathbb{Q}$$

$$3^1 \cdot 3^4 = 3^{1+4} = 3^5$$

$$\left((-1)^3\right)^2 = (-1)^{3 \cdot 2} = (-1)^6 = 1$$

$$5^4 : 5^3 = 5^{4-3} = 5$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{8}$$

$$(0,6)^2 : 2^2 = (0,6 : 2)^2 = 0,3^2 = 0,09$$

49 este pătrat perfect deoarece  $49 = 7^2$

256 este pătrat perfect deoarece  $256 = 16^2$

### Rezolvăm și observăm

a) Dorim să aflăm numerele naturale care, ridicate la puterea a doua, dau unul din rezultatele: 16, 49, 225. Prin încercări, deducem că:  $4^2 = 16$ ,  $7^2 = 49$ ,  $15^2 = 225$ .

b) Ne propunem să aflăm latura pătratului a cărui arie este  $144 \text{ cm}^2$ .

$\mathcal{A}_{\square} = l^2$  și  $\mathcal{A}_{\square} = 144 \text{ cm}^2$ . Obținem  $l^2 = 144$ , deci  $l = 12 \text{ cm}$ .



### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Definiție:** Fie  $x \in \mathbb{N}$ , pătrat perfect.

Se numește **rădăcina pătrată** a numărului  $x$  numărul natural  $n$  cu proprietatea  $x = n^2$ .

Vom scrie  $\sqrt{x} = n$  și vom citi „**radical din  $x$  este egal cu  $n$** ”.

Numărul natural  $n$  se mai numește și „**radicalul de ordin 2 al numărului  $x$** ”.

#### Exemple

$$\sqrt{25} = 5 \text{ deoarece } 5 \in \mathbb{N} \text{ și } 25 = 5^2$$

$$\sqrt{81} = 9 \text{ deoarece } 9 \in \mathbb{N} \text{ și } 81 = 9^2.$$

$$\sqrt{0} = 0 \text{ deoarece } 0 \in \mathbb{N} \text{ și } 0 = 0^2.$$

$$\sqrt{529} = 23 \text{ deoarece } 23 \in \mathbb{N} \text{ și } 529 = 23^2.$$



Operația prin care unui pătrat perfect  $x \in \mathbb{N}$  i se asociază un număr  $n \in \mathbb{N}$  cu proprietatea  $x = n^2$  se numește **operația de extragere a rădăcinii pătrate** sau **operația de extragere a radicalului**.

### pătrat perfect

$$25 = 5^2$$



$$\sqrt{25} = 5$$

### rădăcina pătrată

### Pătrate perfecte

$$225 = 15^2$$

$$256 = 16^2$$

$$289 = 17^2$$

$$324 = 18^2$$

$$361 = 19^2$$

$$400 = 20^2$$

$$441 = 21^2$$



### Rădăcina pătrată

$$\sqrt{225} = 15$$

$$\sqrt{256} = 16$$

$$\sqrt{289} = 17$$

$$\sqrt{324} = 18$$

$$\sqrt{361} = 19$$

$$\sqrt{400} = 20$$

$$\sqrt{441} = 21$$

### pătrat perfect

$$5 \rightarrow 25$$

### rădăcina pătrată

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

$$\sqrt{17^2} = 17; \sqrt{2019^2} = 2019; \sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = 5^3 = 125;$$

$$\sqrt{(38 \cdot 7 + 98 : 14)^2} = 38 \cdot 7 + 98 : 14;$$

$$\sqrt{2^{2018}} = \sqrt{(2^{1009})^2} = 2^{1009}; \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)^2} = \sqrt{12^2} = 12$$

De regulă, înainte de a efectua adunări, scăderi, înmulțiri, împărțiri sau ridicări la putere ale unor expresii care conțin radicali, se vor efectua operațiile de extragere a rădăcinilor pătrate.

Totuși, în anumite situații, operațiile de extragere a radicalilor se pot realiza după efectuarea anumitor operații algebrice.

a)  $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$  și  $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$ , deci  $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{25 \cdot 4}$

b)  $\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$  și  $\sqrt{\frac{225}{25}} = \sqrt{9} = 3$ , deci  $\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \sqrt{\frac{225}{25}}$

c)  $\sqrt{1600} = \sqrt{16 \cdot 100} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 4 \cdot 10 = 40$   
 $\sqrt{\frac{1600}{49}} = \frac{\sqrt{1600}}{\sqrt{49}} = \frac{40}{7}$

### Concluzie:

$$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2, \text{ unde } n \in \mathbb{N}$$

Prin urmare,  $\sqrt{n^2} = n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\sqrt{36} + \sqrt{100} : \sqrt{25} = 6 + 10 : 5 = 8$$

$$\sqrt{64} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{25}^{\sqrt{4}} = 8 \cdot 3 + 5^2 = 49$$

### Au loc relațiile:

a)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{N}$ , pătrate perfecte.

b)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{N}$  și oricare ar fi  $y \in \mathbb{N}^*$ , pătrate perfecte.

c)  $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$  pătrate perfecte, respectiv  $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ ,  $x \in \mathbb{N}$ ,  $y \in \mathbb{N}^*$ , pătrate perfecte.



**Să nu ne pripim!**

Ne putem întreba dacă au loc relații similare și în cazul adunării sau al scăderii.

Comparăm rezultatele calculelor:

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ și } \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

$$\sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12 \text{ și } \sqrt{169} - \sqrt{25} = 13 - 5 = 8$$

$$\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

$$\sqrt{169-25} \neq \sqrt{169} - \sqrt{25}$$

**Concluzie:**  $\sqrt{x+y}$  și  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  **sunt diferite** pentru orice numere raționale pozitive.

$\sqrt{x-y}$  și  $\sqrt{x} - \sqrt{y}$  **sunt diferite** pentru orice numere raționale pozitive,  $x > y$ .

**Reținem!**



Dacă  $x$  este pătrat perfect, atunci numărul natural  $n$  cu proprietatea  $x = n^2$  se numește **rădăcina pătrată** a numărului  $x$  sau **radicalul de ordin 2** al numărului  $x$ .  
Se notează  $\sqrt{x} = n$ .

$$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2, \text{ unde } x \in \mathbb{N} \text{ este pătrat perfect și } n \in \mathbb{N}.$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}; \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}, y \neq 0, \text{ unde } x, y \in \mathbb{N} \text{ sunt pătrate perfecte.}$$

$$\sqrt{n^2} = n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$



**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

**1** a) Scrieți toate pătratele perfecte mai mari decât 700 și mai mici decât 1000.

b) Scrieți toate pătratele perfecte cuprinse între 123 și 321.

**2** Stabiliți care dintre următoarele numere sunt pătrate ale unor numere naturale.

Justificați răspunsul dat.

a) 64, 100, 140, 333, 1000000

b)  $2^4, 4^2 \cdot 9, 3^6, 21^8, 10^9, 5^{2n}, 6^{4 \cdot n+1}, n \in \mathbb{N}$ .

**3** Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere ale fiecăruia, știind că  $x$  desemnează un număr *natural*.

$x$	4	1	0	2	7	11
a) $x^2$						

$x^2$	9	36	400	0	121	49
b) $x$						
$\sqrt{x^2}$						

**4** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$p_1: \sqrt{4} = 2;$$

$$p_2: \sqrt{121} = 11;$$

$$p_3: \sqrt{a^2} = a, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbb{N};$$

$$p_4: \sqrt{11^2} = -11;$$

$$p_5: \sqrt{c^2} = c, \text{ oricare ar fi } c \in \mathbb{Z};$$

$$p_6: \sqrt{100 \cdot b^4} = 10 \cdot b^2, \text{ oricare ar fi } b \in \mathbb{Z}.$$

**5** Determinați numărul natural  $n$ , pentru fiecare din situațiile:

a)  $n^2 = 81$ ; b)  $n^2 = 169$ ; c)  $n^2 = 900$ ; d)  $n^2 = 441$ .

**6** Demonstrați că numărul  $x$  este pătrat perfect și

calculați  $\sqrt{x}$ :

a)  $x = 19 \cdot 9 + 19 \cdot 10$ ;

b)  $x = 2^{11} - 2^{10}$ ;

c)  $x = 200 + 199 \cdot 200$ ;

d)  $x = n + n \cdot (n - 1), n \in \mathbb{N}^*$ ;

e)  $x = \sqrt{441} + \sqrt{\frac{42 \cdot 43 + 43 \cdot 44}{2}}$ ;

f)  $x = \frac{3^{n+2} - 3^{n+1} - 2 \cdot 3^n}{3^n}, n \in \mathbb{N}.$



- 7** Calculați:
- $x = 9^2 + 12^2$ , apoi  $\sqrt{x}$ ;
  - $y = 25^2 - 7^2$ , apoi  $\sqrt{y}$ ;
  - $z = 13^2 + 2 \cdot 13 \cdot 17 + 17^2$ , apoi  $\sqrt{z}$ .

- 8** a) Completați numere naturale în spațiile libere. pentru a obține egalități:  
 $2^2 \cdot 3^4 = (\dots)^2$ ;  $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = (\dots)^2$   
 $2^{100} \cdot 2^{84} = (\dots)^2$ ;  $2^6 \cdot 5^2 = (\dots)^2$
- Calculați  $\sqrt{14^2}$ ;  $\sqrt{7^4}$ ;  $\sqrt{a^2}$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ;
  - Folosind rezultatele de la subpunctul a), calculați:  $\sqrt{2^2 \cdot 3^4}$ ;  $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ ;  
 $\sqrt{2^{100} \cdot 2^{84}}$ ;  $\sqrt{2^6 \cdot 5^2}$ .

- 9** Se consideră mulțimea  $A = \{576, 484, 2025, 1600, 2500, 3600, 1521, 729, 529, 2116\}$
- Descompuneți în factori primi elementele mulțimii  $A$  și apoi scrieți-le ca pătrate ale unor produse.
  - Folosind rezultatele obținute la subpunctul a), calculați rădăcina pătrată a fiecărui element al mulțimii  $A$ .

- 10** Scrieți numerele de sub fiecare radical ca pătrat al unui număr natural, apoi efectuați calculele:
- $\sqrt{1156} + \sqrt{3249} - \sqrt{1296}$
  - $\sqrt{1936} + \frac{1}{2}\sqrt{3844}$
  - $1,5 \cdot \sqrt{4900} - \sqrt{46656}$

- 11** a) Se consideră numărul  $A = 1 + 2 + \dots + 10 + 10 \cdot (2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$ . Demonstrați că  $A$  este pătrat perfect și calculați  $\sqrt{A}$ .
- b) Se consideră numărul  $B = 1 + 3 + 5 + \dots + 19$ . Demonstrați că  $B$  este pătrat perfect și calculați  $\sqrt{B}$ .
- c) Se consideră numărul  $C = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Demonstrați că  $C$  este pătrat perfect și calculați  $\sqrt{C}$ .

- 12** Probați, prin exemple, afirmațiile:
- Dacă  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$ .
  - Dacă  $a, b \in \mathbb{N}^*$ ,  $a > b$ , atunci  $\sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b$ .

## L2 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional

### Ne amintim

În lecția anterioară, am stabilit că:

$$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, \quad y \neq 0 \quad \sqrt{n^2} = n \quad \sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2 \text{ unde } x \text{ și } y \text{ sunt pătrate perfecte, iar } n \in \mathbb{N}.$$

În cazul  $x = 0$ , am constatat că  $\sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ .

Ne propunem să aflăm dacă există  $\sqrt{x}$ , atunci când  $x$  este număr rațional pozitiv. Ne vom ocupa, mai întâi, de acele numere raționale care sunt *pătrate ale unor numere raționale pozitive*.

### Rezolvăm și observăm

Aria unui pătrat este  $1,69 \text{ cm}^2$ .  
 Determinați lungimea laturii acestuia.



**Soluția I:**  $\mathcal{A}_{\square} = l^2$ ,  $\mathcal{A}_{\square} = 1,69 \text{ cm}^2$ . Obținem  $l^2 = 1,3^2$ , deci  $l = 1,3 \text{ cm}$ .

**Soluția a II-a:** În contextul lecției noastre, rezolvarea se poate scrie astfel:  $\mathcal{A}_{\square} = l^2$ ,  $\mathcal{A}_{\square} = 1,69 \text{ cm}^2$ .

$$\text{Obținem } l^2 = 1,69, \text{ deci } l = \sqrt{1,69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13}{10} = 1,3 \Rightarrow l = 1,3 \text{ cm},$$

$$\text{sau altfel: } l^2 = 1,69, \text{ deci } l = \sqrt{1,69} = \sqrt{1,3^2} = 1,3 \Rightarrow l = 1,3 \text{ cm}.$$



### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

#### Definiție

Se numește **rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv**  $x$ , numărul rațional pozitiv  $a$ , cu proprietatea  $x = a^2$ .

Vom scrie  $\sqrt{x} = a$ .

ridicare la pătrat



rădăcina pătrată

A. Să determinăm, în două moduri, rădăcinile pătrate:  $a = \sqrt{1,44}$  și  $b = \sqrt{0,0025}$

$$1) \quad a = \sqrt{1,44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = 1,2$$

$$2) \quad a = \sqrt{1,44} = \sqrt{(1,2)^2} = 1,2$$

$$b = \sqrt{0,0025} = \sqrt{\frac{25}{10000}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{10000}} = \frac{5}{100} = 0,05$$

$$b = \sqrt{0,0025} = \sqrt{(0,05)^2} = 0,05$$

**Observație:** Este important să alegem varianta avantajoasă.

B. Să observăm că putem determina rădăcina pătrată în mod asemănător și dacă numărul dat se exprimă sub formă de fracție periodică.

$$\sqrt{1,(\overline{7})} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} \quad \text{și} \quad \sqrt{3,36(\overline{1})} = \sqrt{\frac{3361-336}{900}} = \sqrt{\frac{3025}{900}} = \sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{11}{6}$$

### Ne amintim

Modulul unui număr  $x \in \mathbb{Q}$  este:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pentru } x \geq 0 \\ -x, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$$

#### Exemple

$$x = 3,5 > 0 \Rightarrow |x| = x = 3,5$$

$$x = -4 < 0 \Rightarrow |x| = -x = -(-4) = 4$$

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Știm că  $\sqrt{n^2} = n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Ne propunem să înțelegem ce reprezintă  $\sqrt{x^2}$  pentru  $x \in \mathbb{Q}$ .

Vom analiza câteva exemple:

$$\text{Pentru } x = 1,5 \text{ avem } \sqrt{x^2} = \sqrt{1,5^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 = x.$$

Pentru  $x = -1,5$  avem  $-x = -(-1,5) = 1,5$ , iar

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1,5)^2} = \sqrt{2,25} = 1,5 = -x$$

Deducem că:

$$\sqrt{x^2} = x, \text{ pentru orice } x \geq 0;$$

$$\sqrt{x^2} = -x, \text{ pentru orice } x < 0;$$

care pot fi scrise sub forma generală astfel:

$$\sqrt{x^2} = |x|, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{Q}.$$

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

a) Vom calcula  $\sqrt{x^2}$  pentru  $x = 8,9 - 5 : 4$ .  
Efectuăm întâi calculele:  $x = 8,9 - 1,25 = 7,65$ .

Deoarece  $x > 0$ , vom aplica formula  $\sqrt{x^2} = x$

$$\text{și obținem } \sqrt{x^2} = \sqrt{(7,65)^2} = 7,65.$$

b) Vom calcula  $\sqrt{x^2}$  pentru  $x = 2,7 - 9 : 2$   
Efectuăm întâi calculele:  $x = 2,7 - 4,5 = -1,8$

Deoarece  $x < 0$ , vom aplica formula  $\sqrt{x^2} = -x$

$$\text{și obținem } \sqrt{x^2} = \sqrt{(-1,8)^2} = 1,8.$$

Dacă despre numărul rațional  $x$  nu putem decide dacă este pozitiv sau negativ, vom folosi formula generală

$$\sqrt{x^2} = |x|, \text{ oricare ar fi } x, \text{ număr rațional.}$$

- c) Pentru  $x = 2 - 1,2 : 0,4$  avem  $\sqrt{x^2} = |x|$  și  $|x| = |2 - 1,2 : 4|$ . Doar ulterior, vom face operațiile necesare pentru obținerea răspunsului final, astfel:  
 $\sqrt{x^2} = |x| = |2 - 1,2 : 0,4| = |2 - 3| = |-1| = 1$

**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

- a)  $\sqrt{1,44} \cdot \sqrt{9} = 1,2 \cdot 3 = 3,6$  și  $\sqrt{1,44 \cdot 9} = \sqrt{12,96} = 3,6$   
 b)  $\frac{\sqrt{1,44}}{\sqrt{9}} = \frac{1,2}{3} = 0,4$  și  $\sqrt{\frac{1,44}{9}} = \sqrt{0,16} = 0,4$

Au loc relațiile:

- a)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$ , oricare ar fi  $x, y$  pătrate ale unor numere raționale.  
 b)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$ , oricare ar fi  $x$  și  $y$ , pătrate ale unor numere raționale,  $y \neq 0$ .

**Reținem!**



Dacă  $x$  este pătratul unui număr rațional, atunci numărul rațional pozitiv  $a$  cu proprietatea  $x = a^2$  se numește rădăcina pătrată a numărului  $x$  sau radicalul numărului  $x$ . Vom scrie  $\sqrt{x} = a$ . Oricare ar fi numerele  $x$  și  $y$ , pătrate ale unor numere raționale, avem:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y} \text{ și } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}, y \neq 0.$$

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbb{Q}$$



**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

- 1** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

$$p_1: \sqrt{100} = 10 \qquad p_2: \sqrt{400} = -20$$

$$p_3: \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6} \qquad p_4: \sqrt{1,96} = 1,4$$

$$p_5: \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{7}{2} \qquad p_6: \sqrt{20,25} = \frac{9}{2}$$

$$p_7: \sqrt{0,09} = -0,3 \qquad p_8: \sqrt{0,0676} = \frac{13}{50}$$

- a) Dintre propozițiile enumerate, sunt adevărate următoarele: ...  
 b) Dintre propozițiile enumerate, sunt false următoarele: ...

- 2** Se consideră mulțimea

$$M = \left\{ 1,44; \frac{36}{25}; \frac{4}{16}; 3\frac{1}{16}; 1,(7) \right\}. \text{ Determinați}$$

$$\text{elementele mulțimii } P = \{x \mid x = \sqrt{y}, y \in M\}.$$

- 3** Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere, din fiecare tabel, știind că  $a$  desemnează un număr rațional pozitiv.

a)

$a$	$\frac{2}{3}$	1	0	0,25	1,(3)	$\frac{5}{4}$	$2\frac{1}{3}$
$a^2$							

b)

$a^2$	$\frac{1}{9}$	2,25	$\frac{100}{49}$	0	$2\frac{1}{4}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$(0,4)^6$
$a$							
$\sqrt{a^2}$							

- 4** Calculați suma numerelor  $m$  și  $n$ , știind că:

a)  $m = 1 + \sqrt{0,09}$  și  $n = 2 - \sqrt{\frac{49}{25}}$ ;

b)  $m = \frac{2}{5} + \sqrt{\frac{25}{4}}$  și  $n = 0,6 - \sqrt{6,25}$ .

5

Calculați:

a)  $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ;  $\sqrt{\frac{81}{25}}$ ;  $\sqrt{\frac{169}{4}}$ ;  $\sqrt{\frac{625}{289}}$ ;  $\sqrt{\frac{3}{300}}$

b)  $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ ;  $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ ;  $\sqrt{3\frac{13}{36}}$ ;  $\sqrt{4\frac{29}{49}}$ ;  $\sqrt{5\frac{29}{100}}$

c)  $\sqrt{0,81}$ ;  $\sqrt{0,16}$ ;  $\sqrt{1,96}$ ;  $\sqrt{4,41}$ ;  $\sqrt{20,25}$

d)  $\sqrt{\frac{2^4}{3^6}}$ ;  $\sqrt{\frac{3^4 \cdot 5^6}{7^2}}$ ;  $\sqrt{\frac{12}{3^3 \cdot 4^3}}$ ;  $\sqrt{\frac{3^2 + 4^2}{7^2 + 24^2}}$

6

Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere ale fiecăruia, știind că  $x$  desemnează un număr întreg.

a)

$x$	-2	-17	12	-2	17	-12
$x^2$						

b)

$x^2$	16	1	49	0	121	36
$x$						
$\sqrt{x^2}$						



7

Determinați valorile numărului întreg  $n$ , pentru fiecare din situațiile:

a)  $n^2 = 81$ ;

b)  $n^2 = 169$  și  $n > 0$ ;

c)  $n^2 = 900$  și  $n < 0$ .

8

Se consideră mulțimea  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ . Determinați elementele mulțimilor:

$B = \{n \mid n = x^2, x \in A\}$

$C = \{m \mid m = \sqrt{n}, n \in B\}$

9

Copiați tabelele pe caiete, apoi completați căsuțele libere ale fiecăruia, știind că  $x$  desemnează un număr rațional. Comparați rezultatele obținute la subpunctul b) cu cele obținute la exercițiul 3.

a)

$a$	1	-1	0	-0,5	0,5	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$
$a^2$							

b)

$a^2$	$\frac{1}{9}$	2,25	$\frac{100}{49}$	0	$2\frac{1}{4}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^4$	$(0,4)^6$
$a$							
$\sqrt{a^2}$							

### L3 Estimarea rădăcinii pătrate a unui număr rațional pozitiv

#### Ne amintim

**Teorema lui Pitagora:** În orice triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

Pentru  $a, b \in \mathbb{Q}_+$  avem  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ .

• **Estimarea** este o evaluare a unei cantități, având *date incomplete sau insuficiente*.

Spre deosebire de aproximare, la care cunoaștem mărimea maximă a erorii, în cazul estimării nu știm cât de aproape suntem de valoarea exactă.

• Dacă pentru efectuarea unui calcul folosim aproximări ale numerelor care intervin, atunci vom obține o *estimare* a rezultatului corect.

În triunghiul  $ABC$ , cu  $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ , are loc relația:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

#### Exemple

- Numărul de copaci din pădurea Băneasa este estimat la câteva sute de mii.
- Estimăm că numărul de locuitori din capitala țării este de peste două milioane.
- Estimăm că mai avem de parcurs 5 km până la destinație.
- Folosind aproximări, prin lipsă, la zeci, în calculul  $16,2 + 32 + 125,7$ , obținem 160. Rezultatul corect este 173,9.



## Rezolvăm și observăm

### Problemă:

Sonia și Natalie au fost la cumpărături, împreună cu sora lor, Cezara.

Ele au cumpărat trei truse de geometrie cu prețul de 32,9 lei trusa, cinci cutii de markere cu prețul de 19,29 lei cutia și 10 caiete cu spirală, cu prețul de 10,5 lei bucata.

Sonia spune: Ne trebuie *mai puțin* de 309 lei;  
 Natalie spune: Ne trebuie *mai mult* de 291 de lei.  
 Cezara spune: Eu cred că ne trebuie *cam* 304 lei.  
 Casiera scanează prețurile produselor, listează bonul de casă și spune: Aveți *de plătit suma* de 300,15 lei.  
 Cum se explică faptul că sumele nu coincid? A greșit cineva?

Pentru a înțelege logica răspunsului dat de cele trei surori, vom parcurge următoarele etape:  
 Calculăm *suma de plată* astfel:  $S = 3 \cdot 32,9 + 5 \cdot 19,29 + 10 \cdot 10,5 = 300,15$  (lei)

**Estimăm suma, aproximând prețurile prin adaos, la unități:**

$$32,9 \approx 33; 19,29 \approx 20; 10,5 \approx 11.$$

$$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 11 = 309$$

**Estimăm suma, aproximând prețurile prin lipsă, la unități:**

$$32,9 \approx 32; 19,29 \approx 19; 10,5 \approx 10.$$

$$S \approx 3 \cdot 32 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 10 = 291$$

**Estimăm suma, rotunjind prețurile la unități:**

$$32,9 \approx 33; 19,29 \approx 19; 10,5 \approx 11.$$

$$S \approx 3 \cdot 33 + 5 \cdot 19 + 10 \cdot 11 = 304$$

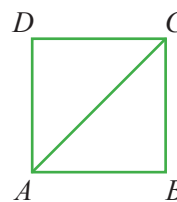
**Observație:** Fiecare dintre cele trei surori a estimat corect suma care urma să fie plătită, dar în mod diferit.

**Estimarea cea mai apropiată** de rezultatul corect este cea obținută prin *rotunjirea termenilor*. Uneori însă, este util să folosim aproximări prin lipsă sau prin adaos pentru toți termenii.

Estimările sunt foarte utile în activitățile cotidiene. Acestea ne ajută să luăm *decizii practice avantajoase*.

## Aplicație practică

- 1) Desenați pe caiete, folosind rigla gradată, pătratul  $ABCD$ , cu latura de lungime 1 dm.
- 2) Reprezentați diagonala  $AC$  a acestuia.
- 3) Scrieți relația dată de teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic  $ABC$ .
- 4) Măsurați cu atenție, folosind rigla gradată, lungimea segmentului  $AC$ . Notați valoarea găsită, în decimetri și comparați-o cu cea a colegilor din imediata vecinătate.



- $AC$  este ipotenuza triunghiului  $ABC$ ,  $AB = BC = 1$  dm, deci:  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ , adică  $AC^2 = 1 + 1 = 2$ .
- Măsurând cu atenție, se obțin, pentru lungimea segmentului  $AC$ , valori apropiate de 1,4 dm.

## Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Egalitatea  $AC^2 = 2$  ne arată că există un număr (nu-l cunoaștem încă), al cărui pătrat este 2. Cum  $AC$  este lungimea unui segment, rezultă  $AC > 0$ . Vom spune că  $AC = \sqrt{2}$ .

Din măsurători, rezultă că valoarea numărului  $\sqrt{2}$  poate fi estimată, destul de greu, la 1,4.

**Ne întrebăm:** câte zecimale mai are? Pot fi determinate toate?

Răspunsul este oferit, parțial, de următoarea secvență:

Dacă  $\sqrt{2} = q$ , atunci  $q^2 = 2$ .

Prin încercări, vom urmări să găsim numărul  $q$ .

$1^2 = 1$	$< 2 < 4$	$= 2^2$
$1,4^2 = 1,96$	$< 2 < 2,25$	$= 1,5^2$
$1,41^2 = 1,9881$	$< 2 < 2,0164$	$= 1,42^2$
$1,414^2 = 1,999396$	$< 2 < 2,002225$	$= 1,415^2$

Constatăm că, prin încercările făcute, nu am găsit date suficiente pentru a afla un număr rațional  $q$  cu proprietatea  $q^2 = 2$ , dar am găsit valori suficient de apropiate. Vom spune că **putem aproxima** valoarea numărului  $\sqrt{2}$ .

În fizică, se folosesc, de obicei, aproximările prin lipsă, la sutimi, ale radicalului unui număr rațional.

De exemplu:  $\sqrt{2} \approx 1,4$ ;  $\sqrt{3} \approx 1,73$ ;  $\sqrt{5} \approx 2,23$ .

**Pentru orice număr rațional  $x \geq 0$ , există rădăcina pătrată  $\sqrt{x}$ .**

$$\sqrt{x} = n \Leftrightarrow x = n^2, \text{ unde } n \geq 0$$



**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

Deseori, avem nevoie să exprimăm rădăcina pătrată aproximând-o printr-un **număr natural** sau printr-un **număr rațional pozitiv**.

Pentru a aproxima rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv  $x$ , printr-un număr natural, **încadrăm numărul  $x$  între două pătrate perfecte consecutive**:  $n^2 \leq x < (n + 1)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Este posibil ca  $x$  să fie pătrat perfect și atunci  $x = n^2$ , iar  $\sqrt{x} = n$ .

Dacă  $n^2 \leq x < (n + 1)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , atunci  $n \leq \sqrt{x} < n + 1$ .

Pentru  $0 \leq x \leq 100$ , se compară  $x$  cu pătratele perfecte cunoscute.

**Exemplu**

Pentru  $x = 73$  avem  $64 < x < 81 \Leftrightarrow 8^2 < x < 9^2$

$\Leftrightarrow 8 < \sqrt{x} < 9 \Rightarrow \sqrt{x} \approx 8$  sau  $\sqrt{x} \approx 9$ .

Dacă  $10^2 < x < 100^2$ , adică  $100 < x < 10\,000$ , atunci  $\sqrt{x} \approx \overline{ab}$ . Cifra  $a$ , a zecilor, se găsește aplicând procedeul de mai sus numărului obținut prin eliminarea din  $x$  a ultimelor două cifre (a zecilor și a unităților).

Apoi, cifra unităților se găsește prin încercări. Sugerăm să se înceapă cu  $b = 5$ .

**Exemplu**

Pentru  $x = 5413$ , vom aproxima  $\sqrt{x}$  printr-un număr natural.

Deoarece  $10^2 < x < 100^2 \Rightarrow 10 < \sqrt{x} < 100 \Rightarrow \sqrt{x} \approx \overline{ab}$ .

Eliminăm ultimele două cifre ale lui  $x$  și obținem 54, pe care îl încadrăm între două pătrate perfecte consecutive:

$49 < 54 < 64 \Rightarrow 7^2 < 54 < 8^2$ , deci  $a = 7$ .

Am obținut deci  $70 < \sqrt{x} < 80$ . Deoarece 54 este mai apropiat de 49 decât de 64, vom estima  $\sqrt{x} \approx 70$ . În anumite aplicații

practice, această aproximare este suficientă, adică  $\sqrt{5413} \approx 70$ . Vom urmări în continuare să găsim și cifra unităților. Pentru  $b = 5$  avem  $\overline{ab}^2 = 75^2 = 5625 > x$ . Pentru  $b = 4$  avem  $\overline{ab}^2 = 74^2 = 5476 > x$ .

Pentru  $b = 3$  avem  $\overline{ab}^2 = 73^2 = 5329 < x$ . Deci  $73^2 < x < 74^2 \Rightarrow 73 < \sqrt{x} < 73$  și  $\sqrt{x} \approx 73$  sau  $\sqrt{x} \approx 74$ .

Dacă  $x$  este format din 5 sau 6 cifre (adică  $10^4 < x < 10^6$ ), atunci  $\sqrt{x} \approx \overline{abc}$ .

Cifra sutelor,  $a$ , se găsește aplicând procedeul de mai sus numărului obținut prin eliminarea din  $x$  a ultimelor patru cifre (a unităților, a zecilor, a sutelor și a miilor). Dacă este necesar, celelalte cifre se găsesc prin încercări.

**Exemplu**

Pentru  $x = 317\,492$  vom aproxima  $\sqrt{x}$  printr-un număr de ordinul sutelor. Eliminând ultimele patru cifre obținem 31, pe care îl încadrăm între două pătrate perfecte consecutive  $25 < 31 < 36 \Rightarrow 5^2 < 31 < 6^2$ .

Deci, cifra sutelor este  $a = 5$  și  $500 < \sqrt{x} < 600$ .

Deoarece 31 este mai aproape de 36 decât de 25, vom scrie  $\sqrt{x} \approx 600$ .

Totuși, pentru **numere foarte mari** se recomandă **folosirea calculatorului** sau **folosirea algoritmului de extragere** a rădăcinii pătrate. Algoritmului de extragere a rădăcinii pătrate a fost foarte util de-a lungul timpului, înainte ca tehnica să ofere facilități de calcul.

Pentru  $x \in \mathbb{Q}_+$ , scris sub formă zecimală finită, vom

scrie  $x = \frac{y}{10^{2n}}$  cu  $y, n \in \mathbb{N}$ , iar  $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{y}}{10^n}$ .

Aproximarea numărului  $\sqrt{y}$  urmează pașii descriși în algoritmul precedent.

**Exemplu**

Ne propunem să estimăm  $\sqrt{x}$  pentru  $x = 93,4$ .

Deoarece  $81 < 93,4 < 100 \Rightarrow 9 < \sqrt{93,4} < 10 \Rightarrow \sqrt{93,4} \approx 9$  sau  $\sqrt{93,4} \approx 10$ .

Dacă dorim obținerea aproximării la zecimi, vom

scrie  $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{9340}{100}} = \frac{\sqrt{9340}}{10}$  și  $\sqrt{9340} \approx \overline{ab}$ .

Eliminăm ultimele două cifre ale lui 9340 și obținem 93, pe care îl încadrăm între două pătrate perfecte consecutive:  $81 < 93 < 100 \Rightarrow 9^2 < 93 < 10^2$ , deci  $a = 9$ .

Pentru  $b = 5$ , avem  $\overline{ab}^2 = 95^2 = 9025 < 9340$ .

Pentru  $b = 6$ , avem  $\overline{ab}^2 = 96^2 = 9216 < 9340$ .

Pentru  $b = 7$ , avem  $\overline{ab}^2 = 97^2 = 9409 > 9340$ .

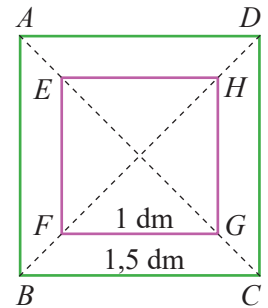
Deci  $96^2 < 9340 < 97^2 \Rightarrow 96 < \sqrt{9340} < 97 \Rightarrow$

$\sqrt{9340} \approx 96$  sau  $\sqrt{9340} \approx 97$ , iar

$\sqrt{93,4} \approx 9,6$  sau  $\sqrt{93,4} \approx 9,7$ .



1. Decupați, din hârtie, un pătrat cu latura 1,5 dm. Notați-l  $ABCD$ .
2. Decupați încă un pătrat cu latura de 1 dm. Notați-l  $EFGH$ .
3. Suprapuneți centrele celor două pătrate și treceți prin ele un ac, pentru a le fixa.
4. Puneți pătratul mare într-o poziție fixă, pe bancă/masă (ca în figura alăturată), apoi rotiți pătratul  $EFGH$  în jurul acului.
5. Urmăriți, cu atenție, vârfurile pătratului mic și observați dacă acestea intersectează laturile pătratului mare.
6. Justificați, folosind estimarea unui radical, rezultatul observat.



**Reținem!**

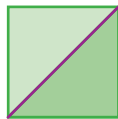


- **Estimarea** este o evaluare a unei cantități, având date incomplete sau insuficiente.
- Dacă pentru efectuarea unui calcul folosim **aproximări** ale numerelor care intervin, atunci vom obține o **estimare** a rezultatului corect.
- Pentru orice număr rațional  $x > 0$ , există rădăcina pătrată  $\sqrt{x}$ .
- Pentru  $a \geq 0$  avem:  $\sqrt{x} = a$  dacă și numai dacă  $x = a^2$ .
- Dacă  $n^2 \leq x < (n+1)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , atunci  $n \leq \sqrt{x} < n+1$ . Dacă  $x = \frac{y}{10^{2n}}$  cu  $y, n \in \mathbb{N}$ , atunci  $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{y}}{10^n}$ .

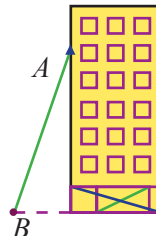


**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

- 1 O porțiune din drumul parcurs spre școală de Sergiu trece printr-un parc în formă de pătrat, cu latura de 120 m. Aleea pe care se deplasează Sergiu se suprapune cu diagonala pătratului. Estimați, printr-un număr natural distanța, în metri, pe care o parcurge Sergiu prin parc.



- 2 O echipă de intervenție dorește să ajungă pe terasa unei clădiri, în punctul  $A$ , situat la distanța 15,8 m față de sol. Persoanele care intervin montează o scară din punctul  $B$ , situat la distanța 4,2 m de clădire. Echipa are scări rabatabile de 10 m, 18 m, 25 m. Care dintre acestea este potrivită pentru intervenție?



- 3 Se consideră mulțimea  $A = \{\sqrt{199}, -\sqrt{300}, -\sqrt{144}\}$ . Pentru fiecare element  $x$ , al mulțimii  $A$ , determinați cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu  $x$ .

- 4 Se consideră mulțimea  $B = \{\sqrt{57}, -\sqrt{\frac{36036}{12}}, -\sqrt{789,1}\}$ .

Pentru fiecare element  $x$ , al mulțimii  $B$ , determinați cel mai mic număr întreg, mai mare sau egal cu  $x$ .

- 5 Completați în căsuțe, pe caiet, câte două numere întregi consecutive, astfel încât să obțineți relații adevărate:

a)  $\square < \sqrt{12} < \square$       c)  $\square < \sqrt{1234} < \square$   
 b)  $\square < -\sqrt{123} < \square$       d)  $\square < -\sqrt{600} < \square$

- 6 Determinați mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < \sqrt{x} < 4\};$   
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid -6 < \sqrt{x} < -5\};$   
 $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 10,5 < x^2 < 50,1\};$   
 $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 23 < x^2 < 32\}.$

- 7 Determinați prima zecimală a numărului  $\sqrt{n^2 + n}$ , pentru fiecare dintre valorile  $n \in \{1, 2, 3\}$ .

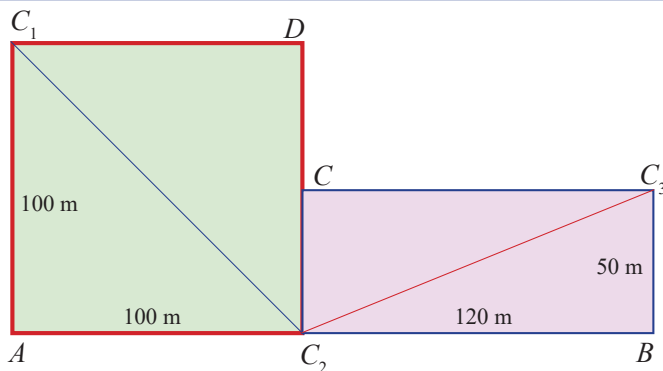


**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

**I.** La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.

<b>5p</b>	1. Numărul $8 + \sqrt{8 + \sqrt{8^2}}$ este egal cu: A. 8                                      B. 10                                      C. 12                                      D. 16
<b>5p</b>	2. Rezultatul calculului $\sqrt{900} - \sqrt{3^6} + \sqrt{(-2)^4}$ este: A. 1                                      B. 3                                      C. 5                                      D. 7
<b>5p</b>	3. Rădăcina pătrată a numărului $2^4 \cdot 49$ este: A. 14                                      B. 21                                      C. 28                                      D. 42
<b>5p</b>	4. Numărul pentru care $\sqrt{a+7} = 17$ este: A. 10                                      B. 27                                      C. 100                                      D. 282
<b>5p</b>	5. Fie $x = \sqrt{0, (4)}$ , atunci: A. $x \in \mathbb{N}$ B. $x \in \mathbb{Z}$ C. $x \in \mathbb{Q}$ D. $x \notin \mathbb{Q}$
<b>5p</b>	6. Mulțimea $A = \left\{ \sqrt{\frac{225}{49}}, \sqrt{2\frac{7}{9}}, \sqrt{\frac{300}{3}}, \frac{\sqrt{1,96}}{\sqrt{0,04}}, \sqrt{\frac{3^2 \cdot 10^2}{5^2}} \right\}$ , conține: A. un număr natural    B. două numere naturale    C. trei numere naturale    D. patru numere naturale
<b>5p</b>	7. Dacă $\overline{abcde}$ este un pătrat perfect, atunci $\sqrt{\overline{abcde}}$ are: A. 2 cifre                              B. 3 cifre                              C. 4 cifre                              D. 5 cifre
<b>5p</b>	8. Dintre următoarele relații: (a) $\sqrt{10} \leq 3$ , (b) $\sqrt{10} \geq 4$ , (c) $\sqrt{10} < 3$ , (d) $\sqrt{10} > 3$ este adevărată: A. (a)                              B. (b)                              C. (c)                              D. (d)
<b>II.</b> La problemele următoare se cer rezolvări complete.	
<b>5p</b>	1. Calculați: a) $2\sqrt{81} - 3\sqrt{64} + 4\sqrt{49} - 5\sqrt{36}$ .
<b>5p</b>	b) $(\sqrt{36} - \sqrt{64}) \cdot (\sqrt{100} - \sqrt{144})$ .
<b>5p</b>	c) $\frac{\sqrt{1225}}{\sqrt{441}} \cdot (\sqrt{225})^{-1}$ .
<b>10p</b> <b>10p</b>	2. Se consideră numerele $a = \sqrt{25^2 - 20^2} - \sqrt{5^2 + 12^2}$ și $b = \sqrt{100} \cdot \left( \sqrt{\frac{49}{25}} - \sqrt{0,01} - \sqrt{1\frac{9}{16}} \right)$ . a) Efectuați calculele și aflați numerele $a$ și $b$ . b) Arătați că $\sqrt{a \cdot b}$ este număr natural.
<b>5p</b> <b>10p</b>	3. Doi prieteni cumpără cadouri din centrele comerciale $C_1, C_2, C_3$ . În figura alăturată, sunt redată, prin segmente, străzile pe care se pot deplasa. a) Estimați lungimea traseului $C_1 - C_2 - C_3$ , în metri, printr-un număr natural. b) Verificați dacă traseul $C_1 - C_2 - C_3$ este sau nu cel mai scurt pentru a ajunge de la centrul $C_1$ la centrul $C_3$ .



## L1 Numere iraționale, exemple

## Ne amintim

Mulțimea numerelor raționale este

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Dacă  $x, y$  sunt numere raționale, atunci

$$x + y, x - y, x \cdot y, \frac{x}{y} (y \neq 0) \in \mathbb{Q}.$$

Orice număr rațional pozitiv poate fi scris în mod unic sub forma unei fracții ireductibile

$$\frac{a}{b}, \text{ cu } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0.$$

$$\text{Numere raționale: } \frac{2}{11}, \frac{-3}{8}, \frac{-4}{1}, \frac{10}{5}.$$

Fie  $x = 3,5$  și  $y = 0,4$  numere raționale.Atunci, suma lor  $x + y = 3,9$ , diferența lor  $x - y = 3,1$ , produsul lor  $x \cdot y = 1,4$  și raportul lor  $\frac{x}{y} = 8,75$  sunt tot numere raționale.

Fracțiile ordinare  $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}, \frac{20}{30}, \frac{200}{300}$  reprezintă același număr rațional, pentru că

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15} = \frac{20}{30} = \frac{200}{300},$$

forma ireductibilă a acestui număr fiind  $\frac{2}{3}$ .

Orice număr rațional se poate scrie în mod unic în una dintre formele:

- fracție zecimală **finită**:  $\frac{17}{5} = 3,4$ ;
- fracție zecimală infinită, **periodică simplă**, cu perioada diferită de (9):  $\frac{14}{11} = 1,(27)$ ;
- fracție zecimală infinită, **periodică mixtă**:  $\frac{19}{12} = 1,58(3)$ .

Orice fracție zecimală finită sau periodică este un număr rațional.

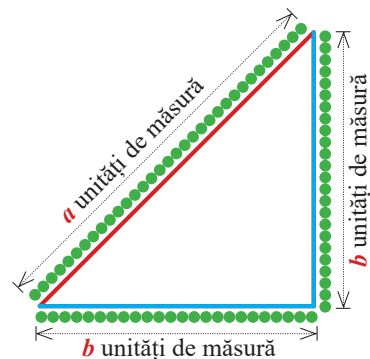
$$3,5 = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}; \quad 2,73 = \frac{273}{100} \quad 1,(27) = \frac{127-1}{99} = \frac{126^9}{99} = \frac{14}{11} \quad 1,58(3) = \frac{1583-158}{900} = \frac{1425^{(75)}}{900} = \frac{19}{12}$$

## Puțină istorie

**Pitagora** a fost filosof și matematician grec și a trăit aproximativ între anii 580–495 î.Hr.

Lui Pitagora și discipolilor săi le datorăm rezultate importante în geometrie și algebră. Ne amintim de celebra teoremă a lui Pitagora, învățată în clasa a VI-a. Pentru Pitagora, esența a tot ceea ce există este **numărul**, crezând că orice lungime poate fi exprimată cu numere naturale. De exemplu, credea că pentru un triunghi dreptunghic isoscel există o unitate de măsură suficient de mică, astfel încât ipotenuza să aibă lungimea de  $a$  unități, iar fiecare catetă lungimea de  $b$  unități, unde  $a$  și  $b$  sunt numere naturale nenule.

Din teorema lui Pitagora rezultă relația:  $a = b\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}$



### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Să urmărim o parte din eforturile matematicienilor acelor timpuri de a afla aceste numere  $a$  și  $b$ .

Fracția  $\frac{a}{b}$  poate fi considerată ireductibilă. Dacă totuși  $\frac{a}{b}$  este reductibilă, ea poate fi simplificată până când ajungem la o fracție ireductibilă, echivalentă cu aceasta (ambele sunt reprezentanți ai aceluiași număr rațional).

Deducem  $a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 : 2 \Rightarrow a : 2 \Rightarrow a = 2 \cdot k$ , unde  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Din  $a = b\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2k^2 = b^2 \Rightarrow b^2 : 2 \Rightarrow b : 2$ .

Prin urmare,  $a : 2$  și  $b : 2$ , deci fracția  $\frac{a}{b}$  se poate simplifica cu 2, ceea ce contrazice faptul că  $\frac{a}{b}$  este ireductibilă. În concluzie, **nu există numerele naturale**  $a$  și  $b$  astfel încât  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ .

**Concluzie:**  $\sqrt{2}$  nu este număr rațional.

Vom scrie că  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

În lecțiile anterioare, am constatat că lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de o unitate este  $\sqrt{2}$ . Am încercat să calculăm  $\sqrt{2}$ , dar n-am reușit să găsim o valoare exactă, un număr rațional  $q \in \mathbb{Q}_+$  cu proprietatea  $q^2 = 2$ . Încercările noastre nereușite nu au fost suficiente pentru a ne convinge de faptul că  $\sqrt{2}$  nu este rațional. Era necesară demonstrația de mai sus.

Totuși, deși  $\sqrt{2}$  este număr, deoarece reprezintă lungimea unui segment, acesta nu este niciunul dintre numerele pe care le cunoșteam, adică nu este număr rațional. Deducem că mai există și alte numere pe lângă cele raționale. Le vom numi **numere iraționale**.

$\sqrt{2}$  este număr irațional.

Din faptul că  $\sqrt{2}$  este irațional, deducem că acesta nu poate fi scris sub formă de fracție zecimală finită sau periodică. Calculăm mai multe zecimale ale acestui număr, folosind calculatorul, și găsim:  $\sqrt{2} = 1,414213562373095048801688\dots$  În practică, vom folosi o aproximare a numărului, de regulă, cu două zecimale exacte  $\sqrt{2} \approx 1,41$ .

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

În mod analog, înlocuind numărul 2 cu orice alt **număr prim**  $p$ , se demonstrează că  $\sqrt{p}$  este irațional.

În general, dacă  $n \in \mathbb{N}$  **nu este pătrat perfect**, atunci  $\sqrt{n}$  este irațional.

Dacă numărul  $x \in \mathbb{Q}$  **nu se poate scrie ca raport de pătrate perfecte**, atunci  $\sqrt{x}$  este irațional.

**Opusul unui număr irațional** este un număr irațional.

Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.

**Produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional** este un număr irațional.

Numărul  $\pi$  este număr irațional.

Numerele 3, 5, 7 sunt prime, deci  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$  sunt numere iraționale.

6, 8, 12 nu sunt pătrate perfecte, deci  $\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{12}$  sunt numere iraționale.

$\frac{12}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{5}$  nu se pot scrie ca raport a două pătrate perfecte, prin urmare  $\sqrt{\frac{12}{7}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \sqrt{\frac{4}{5}}$  sunt numere iraționale.

$-\sqrt{2}, -\sqrt{8}, -\sqrt{15}$  sunt numere iraționale.

$3 + \sqrt{2}; 7 - \sqrt{5}; -9 + \sqrt{3}; 1,2 + \sqrt{8}$  sunt numere iraționale.

$3\sqrt{2}; -7\sqrt{5}; (1,2)\sqrt{8}; \frac{\sqrt{3}}{2}$  sunt numere iraționale.

Numărul  $\pi$  este raportul dintre lungimea unui cerc oarecare și lungimea diametrului său. Se aproximează la sutimi prin  $\pi \approx 3,14$ .



### Temă de portofoliu:

Vă propunem să vă antrenați, demonstrând că numerele  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{12}, \sqrt{0,7}$  sunt numere iraționale.

Vom vedea, de asemenea, că există și numere iraționale care nu se pot exprima cu ajutorul radicalilor. Acestea se vor reprezenta ca fracții zecimale infinite neperiodice.

Numărul  $\alpha = 0,505005000500005\dots$  (după prima cifră 5 este un 0, după a doua cifră 5 sunt două zerouri, după a  $n$ -a cifră 5 sunt  $n$  zerouri) este număr irațional.

### Reținem!



- Se numește număr irațional orice număr care nu este rațional.
- Pentru  $x \in \mathbb{Q}$  avem:  $\sqrt{x}$  este număr irațional dacă și numai dacă  $x$  nu este pătrat perfect sau nu poate fi scris ca raport de pătrate perfecte.
- Un număr este irațional dacă și numai dacă se scrie sub formă de fracție zecimală infinită și neperiodică.
- Dacă  $q \in \mathbb{Q}^*$  și  $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$ , atunci  $-\sqrt{x}$ ,  $q + \sqrt{x}$ ,  $q\sqrt{x}$  sunt numere iraționale.



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Se consideră mulțimea  

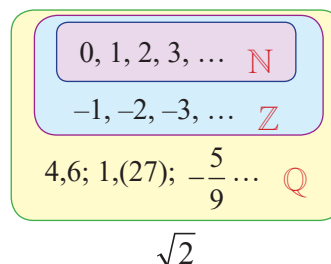
$$A = \left\{ \sqrt{3}; \sqrt{4}; 2\sqrt{7}; 9 + \sqrt{12}; 4 - \pi; \frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{\frac{8}{18}} \right\}$$
  - Enumerați elementele mulțimii  $A$  care sunt numere raționale.
  - Enumerați elementele mulțimii  $A$ , care sunt numere iraționale. Justificați răspunsul dat.
- Se consideră numerele: 0,246810... (se alătură, în ordine crescătoare, numerele naturale pare) și 1,010010001... (numărul zerourilor dintre două cifre alăturate, egale cu 1 crește la fiecare secvență, deplasându-ne spre dreapta)
  - Justificați faptul că numerele de mai sus sunt iraționale.
  - Scrieți alte două numere iraționale, exprimate ca fracții zecimale infinite, explicând regula folosită.
- Scrieți mulțimea numerelor iraționale de forma  $\sqrt{a}$ ,  $a \in A$ , știind că  
 $A = \{15^2, 2^5, 3^6, 4^7, 7^3, 2^4, (-3)^2, 8^{11}, (-5)^2\}$ .  
 Justificați, verbal, alegerea fiecărui element.
- Demonstrați că numerele  $\sqrt{8}, \sqrt{76}, \sqrt{193}, \sqrt{555}, \sqrt{1000}$  sunt iraționale, folosind intercalarea numerelor scrise sub radicali, între două pătrate perfecte consecutive. (Dacă  $x, y \in \mathbb{N}$  și  $n^2 < x < (n+1)^2$ , atunci  $\sqrt{x}$  este irațional).
- Scrieți trei valori ale numărului natural  $x$  pentru care  $\sqrt{x+8}$  este număr rațional.
  - Scrieți trei valori ale numărului natural  $y$  pentru care  $\sqrt{5-y}$  este număr irațional.
- Calculați  $2,7^2$  și  $2,8^2$ , apoi stabiliți dacă numărul  $\sqrt{7,31}$  este rațional sau este irațional.
  - Calculați  $3,24^2$  și  $3,25^2$ , apoi stabiliți dacă numărul  $\sqrt{10,4996}$  este rațional sau este irațional.
- Se consideră numerele naturale de forma  $a = 10n + 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
  - Scrieți cele mai mici cinci numere de această formă.
  - Demonstrați că  $\sqrt{a}$  este număr irațional, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .
- Se consideră numerele naturale de forma  $b = 4n + 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
  - Scrieți cele mai mici cinci numere de această formă.
  - Demonstrați că  $\sqrt{b}$  este număr irațional, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .
- Determinați numerele raționale de forma  $\sqrt{67ab}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt cifre.
  - Determinați numerele raționale de forma  $\sqrt{7cd6}$ , unde  $c$  și  $d$  sunt cifre.

## L2 Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

### Ne amintim

- Există numere iraționale.
- Un număr nu poate fi simultan rațional și irațional.
- Orice număr rațional poate fi scris, în mod unic, sub forma unei fracții zecimale finite sau periodice, cu perioada diferită de (9).
- Orice număr irațional poate fi scris în mod unic sub forma unei fracții zecimale infinite și neperiodice.
- Orice număr natural este și număr întreg și număr rațional.
- Orice număr întreg este și număr rațional.
- Dacă un număr nu este întreg, atunci nu este nici natural.
- Dacă un număr nu este rațional, atunci nu este nici întreg, nici natural.

Știm că  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$



$3 \in \mathbb{N}$  deci  $3 \in \mathbb{Z}$  și  $3 \in \mathbb{Q}$

$-3 \in \mathbb{Z}$  deci  $-3 \in \mathbb{Q}$

Dacă  $4,6 \notin \mathbb{Z}$ , atunci  $4,6 \notin \mathbb{N}$

Dacă  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , atunci  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$  și  $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Definiție:** Reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale se numește mulțimea numerelor reale și se notează cu  $\mathbb{R}$ .

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ este număr rațional}\} \cup \{x \mid x \text{ este număr irațional}\}$$

Se mai definesc:

- mulțimea numerelor **reale pozitive**  $\mathbb{R}_+$
- mulțimea numerelor **reale negative**  $\mathbb{R}_-$
- mulțimea numerelor **reale nenule**  $\mathbb{R}^*$

Rezultă imediat că:

- orice număr rațional este un număr real;
- orice număr irațional este un număr real.

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- \cup \{0\}$$

Dacă  $x \in \mathbb{Q}$ , atunci  $x \in \mathbb{R}$ .

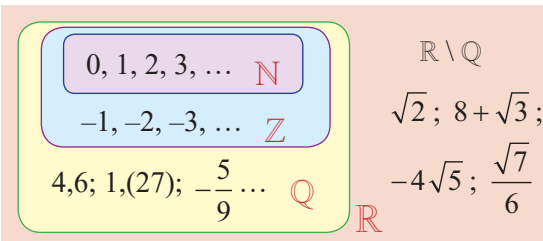
**Mulțimea numerelor iraționale** este diferența  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Folosind implicațiile: 1) Pentru orice  $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ ; 2) Pentru orice  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ ; 3) Pentru orice  $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ , deducem că au loc incluziunile:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

Mulțimile  $\mathbb{Q}$  și  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sunt *disjuncte*, adică *intersecția lor este mulțimea vidă*.





**1** Determinați valoarea de adevăr a fiecăreia din următoarele afirmații (A sau F):

- a)  $4 \in \mathbb{N}$ ; f)  $-\frac{20}{4} \in \mathbb{Z}$ ;  
 b)  $-10 \in \mathbb{Z}$ ; g)  $\sqrt{\frac{4}{9}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;  
 c)  $\frac{12}{5} \in \mathbb{Q}$ ; h)  $-3,1(5) \notin \mathbb{Q}$ ;  
 d)  $\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ; i)  $\sqrt{(-7)^2} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;  
 e)  $0 \notin \mathbb{N}$ ; j)  $\sqrt{1296} \in \mathbb{Q}$ ;  
 k)  $\sqrt{10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{10}} \in \mathbb{R}$ .

**2** Se consideră mulțimea

$$M = \left\{ 2, 1; -\sqrt{9}; \sqrt{8}; (-3)^3; (0,1)^{-1}; \sqrt{1\frac{9}{16}}; \frac{15}{5} \right\}$$

- a) Scrieți, pe rând, mulțimile formate cu toate:  
 1) numerele naturale care aparțin mulțimii  $M$ ;  
 2) numerele întregi care aparțin mulțimii  $M$ ;  
 3) numerele raționale care aparțin mulțimii  $M$ ;  
 4) numerele iraționale care aparțin mulțimii  $M$ .  
 b) Folosind subpunctul a), copiați tabelul pe caiet și completați:

$M \cap \mathbb{N}$	
$M \cap \mathbb{Z}$	
$M \cap \mathbb{Q}$	
$M \cap \mathbb{R}$	

**3** Fie mulțimea  $B = \left\{ -\sqrt{49}; \sqrt{64}; \frac{-57}{-19}; \frac{\sqrt{81}}{-3} \right\} \cup$

$$\left\{ \sqrt{2, (7)}; \frac{0}{7}; \sqrt{2^2 \cdot (-3)^4}; \sqrt{500} \right\}$$

Completați spațiile libere astfel încât să obțineți egalități:

- a)  $B \cap \mathbb{N} = \{ \dots \}$  d)  $B \cap \mathbb{Q} = \{ \dots \}$   
 b)  $B \cap \mathbb{Z} = \{ \dots \}$  e)  $B \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) = \{ \dots \}$   
 c)  $B \cap (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) = \{ \dots \}$  f)  $B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \{ \dots \}$

**4** Se consideră mulțimea

$$C = \left\{ \sqrt{0, (1)}; -\sqrt{1\frac{3}{4}}; \frac{69}{23}; -3; (0,1(6))^{-1}; \sqrt{7} \right\}$$

a) Găsiți o mulțime  $D = \{a, b, c\}$  care să satisfacă simultan condițiile:

- mulțimea  $C \cap D$  conține exact două numere naturale.
- mulțimea  $C \cup D$  conține exact trei numere iraționale.

b) Folosind mulțimea  $D$ , identificată la subpunctul anterior, stabiliți valoarea de adevăr pentru fiecare din propozițiile următoare.

$p_1$ : „Mulțimea  $D$  nu conține numere naturale.”

$p_2$ : „Mulțimea  $D$  conține cel mult două numere raționale.”

**5** Completați spațiile libere cu una din notațiile  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , pentru a obține propoziții adevărate:

- a) Numerele care se pot scrie ca raport de numere întregi, formează mulțimea ...  
 b) Numerele care se pot exprima ca fracții zecimale finite, aparțin mulțimii ...  
 c) Numerele care se pot exprima ca fracții zecimale periodice, aparțin mulțimii ...  
 d) Numerele care nu se pot exprima ca raport de numere întregi, formează mulțimea ...  
 e) Dacă  $a$  nu este pătratul unui număr rațional, atunci  $\sqrt{a}$  aparține mulțimii ...  
 f) Reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale este mulțimea ...

**6** Demonstrați că:

- a)  $\sqrt{1234} \notin \mathbb{Q}$ ;  
 b)  $\sqrt{1+6^{78}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;  
 c)  $\underbrace{\sqrt{111\dots 1}}_{15 \text{ cifre}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;  
 d)  $\sqrt{4^n} \in \mathbb{Q}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

**7** Determinați mulțimea

$$E = \left\{ \sqrt{x} \mid 59 < x < 2^7, \sqrt{x} \in \mathbb{N} \right\}.$$





1.3

## Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

### Ne amintim

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{a^2} = a, \text{ pentru orice } a \geq 0 \\ \sqrt{a^2} = -a, \text{ pentru orice } a < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \sqrt{a^2} = |a|, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{Q}$$

Relațiile de mai sus rămân valabile și în cazul în care  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

### Exemple

$$\sqrt{\pi^2} = \pi;$$

$$\sqrt{(1-\pi)^2} = -(1-\pi) = -1 + \pi = \pi - 1$$

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Scrierea expresiei  $\sqrt{a^2 b}$  sub forma  $a\sqrt{b}$  se numește **scoaterea factorului  $a$  de sub radical**, unde  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

Când se cere scoaterea factorilor de sub radical, numărul  $\sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , va fi scris sub forma  $a\sqrt{b}$ , unde  $b$  nu este divizibil cu niciun pătrat perfect diferit de 1.

a)  $\sqrt{63} = \sqrt{9 \cdot 7} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot \sqrt{7}$   
(am scos factorul 3 de sub radical)

b)  $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$   
(am scos factorul 5 de sub radical)

c)  $\sqrt{700} = \sqrt{100 \cdot 7} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{7} = 10 \cdot \sqrt{7}$   
(am scos factorul 10 de sub radical).

### Exemple

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} = 5\sqrt{6}$$

$$\sqrt{120} = \sqrt{4 \cdot 30} = 2\sqrt{30}$$

### Rezolvăm și observăm

Pentru a evidenția pătratele perfecte care apar ca factori sub radical, este util să descompunem numărul în produs de factori primi.

a)  $\sqrt{147} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{147} = \sqrt{7^2 \cdot 3}$$

$$\sqrt{147} = 7\sqrt{3}$$

b)  $\sqrt{2450} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 2450 & 2 \\ 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{2450} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2 \cdot 2}$$

$$\sqrt{2450} = 5 \cdot 7 \sqrt{2} = 35\sqrt{2}$$

c)  $\sqrt{216} = ?$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{216} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\sqrt{216} = 2 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$$

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În practică, sunt situații în care, pentru evidențierea unor proprietăți sau pentru simplificarea unor calcule, este necesar să scoatem de sub radical și factori care nu sunt numere naturale.

Ne întrebăm dacă putem generaliza scoaterea factorilor de sub radicali și în cazul numerelor raționale și chiar în cazul numerelor reale pozitive.

Considerăm numărul  $\sqrt{\frac{12}{25}}$  și folosim proprietățile deja învățate, pentru a calcula în două moduri diferite:

$$\sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}, \text{ respectiv } \sqrt{\frac{12}{25}} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 3} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{5}\sqrt{3}.$$

Vom constata că ambele sunt calcule corecte.

Scrierea expresiei  $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$  se numește **scoaterea factorului  $a$  de sub radical**, unde  $a \geq 0, b \geq 0$ .

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

$$\sqrt{a^{2k} \cdot b} = a^k \sqrt{b}, \text{ unde } a \geq 0, b \geq 0, k \in \mathbb{N}^*.$$

Dacă în descompunere apar  $2k$  factori egali cu  $a$ , atunci factorul  $a^k$  iese de sub radical.

**Exemplu:**  $\sqrt{2^8 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 7} = 2^4 \cdot 3 \sqrt{5 \cdot 7} = 48\sqrt{35}$

$$\sqrt{a^{2k+1} \cdot b} = \sqrt{a^{2k} \cdot a \cdot b} = a^k \sqrt{a \cdot b}$$

Dacă în descompunere apar  $2k + 1$  factori egali cu  $a$ , atunci factorul  $a^k$  iese de sub radical și mai rămâne sub radical factorul  $a$ .

**Exemplu:**  $\sqrt{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^6 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2^3 \cdot 3 \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 24\sqrt{30}$

Se înmulțesc factorii care au fost scoși de sub radical și, separat, se înmulțesc factorii care au rămas sub radical.

În cazul calculului algebric, când nu știm dacă factorul  $a$  este pozitiv sau negativ, vom folosi scrierea  $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$ .

$$\sqrt{5x^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{5} = |x|\sqrt{5}$$

$$\sqrt{3x^4} = \sqrt{x^4} \sqrt{3} = |x^2|\sqrt{3} = x^2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2x^6} = \sqrt{x^6} \sqrt{2} = |x^3|\sqrt{2} = x^2|x|\sqrt{2}$$

Operația inversă scoaterii factorilor de sub radical se numește „introducerea factorilor sub radical”.

Astfel, vom scrie  $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ , unde  $a \geq 0, b \geq 0$ .

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$$

**Exemple:**

a)  $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$   
(am introdus factorul 3 sub radical).

b)  $7\sqrt{2} = \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$   
(am introdus factorul 7 sub radical)

c)  $0,8\sqrt{5} = \sqrt{(0,8)^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{0,64 \cdot 5} = \sqrt{3,2}$ .  
(am introdus factorul 0,8 sub radical)

### Să nu ne pripim!

Dacă  $a < 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$ . De exemplu,  $-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2 \cdot 5} = -\sqrt{20}$ .



## Reținem!



- Scoaterea factorului  $a$  de sub radical:  $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$ , oricare ar fi  $a \geq 0, b \geq 0$ ;
- Introducerea factorului  $a$  sub radical:  $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ , oricare ar fi  $a \geq 0, b \geq 0$ .
- Pentru orice  $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$ , are loc relația  $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$ .
- Dacă  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $\sqrt{a^{2k} \cdot b} = a^k \sqrt{b}$  și  $\sqrt{a^{2k+1} \cdot b} = \sqrt{a^{2k} \cdot a \cdot b} = a^k \sqrt{a \cdot b}$ .



## Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- Copiați pe caiete propozițiile, apoi completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
  - Dacă  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $\sqrt{a^2 \cdot b} = \dots$
  - Dacă  $a \leq 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $\sqrt{a^2 \cdot b} = \dots$
  - Dacă  $a \in \mathbb{R}$  și  $b \geq 0$ , atunci  $\sqrt{a^2 \cdot b} = \dots$
- Scoateți factorii de sub radicali:
 

a) $\sqrt{2^2 \cdot 3}$ ;	g) $\sqrt{(-5)^4 \cdot 7}$ ;
b) $\sqrt{3^4 \cdot 5}$ ;	h) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$ ;
c) $\sqrt{5^6 \cdot 7}$ ;	i) $\sqrt{(-7)^2 \cdot 101}$ ;
d) $\sqrt{11^{10} \cdot 2}$ ;	j) $\sqrt{5^4 \cdot 3^2 \cdot 2}$ ;
e) $\sqrt{(-2)^2 \cdot 3}$ ;	k) $\sqrt{(-2)^2 \cdot 3^2 \cdot 5}$ ;
f) $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5}$ ;	l) $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5^4 \cdot 7}$ .
- Scoateți factorii de sub radicali:
 

a) $\sqrt{2^7}$ ;	e) $\sqrt{(-2)^3 \cdot (-3)^3}$ ;
b) $\sqrt{3^{11}}$ ;	f) $\sqrt{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^8}$ ;
c) $\sqrt{2^5 \cdot 3^7}$ ;	g) $\sqrt{2^{2n+1}}, n \in \mathbb{N}$ ;
d) $\sqrt{3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7}$ ;	h) $\sqrt{3^{2n+3}}, n \in \mathbb{N}$ .
- Scoateți factorii de sub radicali:
  - $\sqrt{12}, \sqrt{18}, \sqrt{27}, \sqrt{32}, \sqrt{75}, \sqrt{98}$ ;
  - $\sqrt{360}, \sqrt{192}, \sqrt{150}, \sqrt{288}, \sqrt{294}, \sqrt{972}$ ;
  - $\sqrt{2250}, \sqrt{2366}, \sqrt{3468}, \sqrt{9072}, \sqrt{10^5}, \sqrt{10^{11}}$ .
- După efectuarea calculelor, scoateți factorii de sub radicali:
  - $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 + \sqrt{2^4 \cdot 3^6}}$
  - $\sqrt{2^8 + 4 \cdot \sqrt{4096}}$ ;
  - $\sqrt{2^5 \cdot 3^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 2^4 \cdot 3^5}$ .
- Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor. Scrieți, pe caiete, propozițiile adevărate:
  - $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ ;
  - $-\sqrt{343} = 7\sqrt{7}$ ;
  - $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}, 0 < a, 0 < b$ ;
  - $\sqrt{a \cdot b^2} = -b\sqrt{a}, b < 0 < a$ ;
  - Dacă  $\sqrt{288} = 12\sqrt{x}$ , atunci  $x = 2$ .
  - Dacă  $\sqrt{675} = x\sqrt{3}$ , atunci  $x = 5$ .
- Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
  - „Dacă  $a > 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $a\sqrt{b} = -\sqrt{\dots}$ ”;
  - „Dacă  $a < 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $a\sqrt{b} = -\sqrt{\dots}$ ”.
- Scrieți următoarele numere, introducând factorii sub radicali:
 

a) $2\sqrt{3}$ ;	d) $-3\sqrt{2}$ ;
b) $5\sqrt{1,4}$ ;	e) $-\frac{2}{3} \cdot \sqrt{15}$ ;
c) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{24}$ ;	f) $-\frac{5}{7} \sqrt{\frac{7}{5}}$ .
- Completați în dreptul fiecărui enunț litera  $A$ , dacă propoziția este adevărată și litera  $F$ , dacă propoziția este falsă:
 

a) $2\sqrt{15} = \sqrt{60}$ ;	d) $-2\sqrt{19} = -\sqrt{2^2 \cdot 19}$ ;
b) $3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ ;	e) $6\sqrt{7} = 7\sqrt{6}$ ;
c) $-4\sqrt{7} = \sqrt{(-4)^2 \cdot 7}$ ;	f) $-4\sqrt{12} = -8\sqrt{3}$ .
- Determinați numerele naturale  $x$  și  $y$  pentru care  $x \cdot \sqrt{y} = \sqrt{153}$ , cu  $x > 1$ .

I. Aflați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile date:

3p	1. Numărul 1,3(4) este rațional.	3p	3. Numărul $\sqrt{225}$ este real.
3p	2. Numărul $\sqrt{1,(7)}$ este irațional.	3p	2. $\left\{-\frac{\sqrt{1}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

II. La problemele următoare alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.

5p	1. Se consideră mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2019}\}$ . 1.1. Numărul elementelor mulțimii $A \cap \mathbb{Q}$ este egal cu: A. 40 B. 50 C. 45 D. 44
5p	1.2. Numărul elementelor mulțimii $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ este egal cu: A. 1974 B. 1975 C. 1976 D. 2018
5p	2. Fie $x \in \mathbb{N}$ . Numărul $\sqrt{77 - 7 \cdot x}$ este rațional pentru: A. $x \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 11\}$ B. $x \in \{0, 1, 9\}$ C. $x \in \{2, 3, 6, 8\}$ D. $x \in \{4, 11\}$
5p	3. Fie $y \in \mathbb{N}$ . Numărul $\sqrt{88 - 22 \cdot y}$ este irațional pentru: A. $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ B. $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ C. $y \in \{0, 4\}$ D. orice număr natural $y$
5p	4. Dacă $\sqrt{75} = a \cdot \sqrt{3}$ , atunci $a$ este egal cu: A. 1 B. 3 C. 5 D. 6
5p	5. Știind că $\sqrt{500} = b \cdot \sqrt{c}$ și că nu se mai pot scoate factori naturali de sub radical, $b + c$ este: A. 15 B. 12 C. 13 D. 14
5p	6. Dacă $\sqrt{\frac{27}{12}} = \frac{d}{e}$ , atunci $d - e$ este: A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
5p	7. Mulțimea formată numai din numere iraționale este: A. $\{\sqrt{1}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{17}\}$ B. $\{\sqrt{2}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{18}\}$ C. $\{\sqrt{2^2}, \sqrt{2^4}, \dots, \sqrt{2^{18}}\}$ D. $\{\sqrt{2^1}, \sqrt{2^3}, \dots, \sqrt{2^{17}}\}$

III. Asociați fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A, cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana B.

După ce s-au scos factorii de sub radical se obține:

	A	B		A	B
3p	1. Pentru $a > 0$ , $\sqrt{9a^2} =$	a. $-3a\sqrt{-a}$	3p	4. Pentru $a < 0, b > 0$ , $\sqrt{a^2 b^2} =$	e. $a : b^2$
3p	2. Pentru $a < 0$ , $\sqrt{-9a^3} =$	b. $3a$	3p	5. Pentru $a > 0, b > 0$ , $\sqrt{a^2 : b^4} =$	f. $-a \cdot b$
3p	3. Pentru $a > 0$ , $\sqrt{a^9 : a^3} =$	c. $a^3$	3p	6. Pentru $a < 0, b < 0$ , $\sqrt{(a+b)^2} =$	g. $-a - b$
		d. $-3a$			h. $-a^2 : b$

IV. La problema următoare se cere rezolvare completă.

20p	Se consideră mulțimea $B = \left\{x \mid x = \sqrt{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}, n \in \mathbb{N}^*, n < 10\right\}$ . a) Scrieți mulțimea $B$ , enumerând elementele. b) Determinați mulțimile $B \cap \mathbb{Q}$ și $B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .
-----	---

## Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări. Compararea și ordonarea numerelor reale. Modulul unui număr real

### L1 Aproximarea numerelor reale prin fracții zecimale.

#### Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări

#### Ne amintim

În lecțiile anterioare, am identificat unele tehnici de estimare a valorii unui număr rațional și a valorii unui număr irațional, deci a unui număr real.

**Aproximarea prin lipsă** a unui număr real la ordinul unităților (zecilor, sutelor, miilor etc.) este **cel mai mare** număr natural format numai din unități (zeci, sute, mii etc.) **mai mic sau egal** cu numărul respectiv.

$$\text{Fie } x = \sqrt{200}.$$

$$\text{La ordinul unităților: } \sqrt{200} \approx 14 \text{ pentru că } 14 < \sqrt{200} < 15.$$

$$\text{La ordinul zecilor: } \sqrt{200} \approx 10 \text{ pentru că } 10 < \sqrt{200} < 20.$$

**Aproximarea prin adaos** a unui număr real la ordinul unităților (zecilor, sutelor, miilor etc.) este **cel mai mic** număr natural format numai din unități (zeci, sute, mii etc.) strict **mai mare** decât numărul respectiv.

$$\text{Fie } x = \sqrt{200}.$$

$$\text{La ordinul unităților: } \sqrt{200} \approx 15 \text{ pentru că } 14 < \sqrt{200} < 15.$$

$$\text{La ordinul zecilor: } \sqrt{200} \approx 20 \text{ pentru că } 10 < \sqrt{200} < 20.$$

**Rotunjirea** unui număr real la ordinul unităților (zecilor, sutelor, miilor etc.) este **aproximarea** prin lipsă sau aproximarea prin adaos, la ordinul considerat, care este **cea mai apropiată** de numărul respectiv.

La ordinul unităților:

$$17,39 \approx 17 \text{ pentru că } 17,39 - 17 < 18 - 17,39;$$

$$17,69 \approx 18 \text{ pentru că } 17,69 - 17 > 18 - 17,69.$$

La ordinul zecilor:

$$17,39 \approx 20 \text{ pentru că } 17,39 - 10 > 20 - 17,39;$$

$$14,69 \approx 10 \text{ pentru că } 14,69 - 10 < 20 - 14,69.$$

La ordinul unităților:

$$19,5 \approx 20 \text{ pentru că } 19,5 - 19 = 0,5 = 20 - 19,5$$

$$\text{La ordinul zecilor: } 395 \approx 400 \text{ pentru că}$$

$$395 - 390 = 5 = 400 - 395.$$

În cazul în care cele două aproximări sunt **la fel de apropiate** de număr, rotunjirea va fi dată de aproximarea **prin adaos**.

#### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Regulile practice pentru aproximarea numerelor reale prin fracții zecimale, la ordinul zecimilor, sutimilor, miimilor etc., se pot formula în mod similar.

Să considerăm numărul real 12,7358 și să-l aproximăm la zecimi, sutimi, miimi, prin lipsă, prin adaos, apoi să-l rotunjim.

Au loc inegalitățile:

$$12,7 < 12,7358 < 12,8;$$

$$12,73 < 12,7358 < 12,74;$$

$$12,735 < 12,7358 < 12,736$$

**Aproximarea prin lipsă** a unui număr real la ordinul zecimilor (sutimilor, miilor etc.) se obține prin înlăturarea, din numărul inițial, a tuturor zecimalelor aflate la dreapta ordinului de mărime la care aproximăm.

$$\text{La zecimi: } 12,7358 \approx 12,7;$$

$$\text{La sutimi: } 12,7358 \approx 12,73;$$

$$\text{La miimi: } 12,7358 \approx 12,735.$$

**Aproximarea prin adaos** a unui număr real la ordinul zecimilor (sutimilor, miilor etc.) se obține adăugând o zecime (sutime, miime etc.) la aproximarea prin lipsă, la același ordin.

La zecimi:  $12,7358 \approx 12,8$ .  
 La sutimi:  $12,7358 \approx 12,74$ .  
 La miimi:  $12,7358 \approx 12,736$ .

**Rotunjirea** unui număr real la ordinul zecimilor (sutimilor, miilor etc.) este aproximarea prin lipsă sau aproximarea prin adaos, la ordinul considerat, care este cea mai apropiată de numărul respectiv. În cazul în care cele două aproximări sunt la fel de apropiate de număr, rotunjirea reprezintă aproximarea prin adaos.

La zecimi:  $12,7358 \approx 12,7$ .  
 La sutimi:  $12,7358 \approx 12,74$ .  
 La miimi:  $12,7358 \approx 12,736$ .

Pentru a stabili care aproximare este mai apropiată, sunt necesare calcule, uneori lungi.

O modalitate practică de realizare a rotunjirii:

Dacă cifra aflată imediat după ordinul de mărime la care efectuăm rotunjirea este 0, 1, 2, 3 sau 4, atunci rotunjirea este chiar aproximarea prin lipsă. Dacă această cifră este 5, 6, 7, 8 sau 9, atunci rotunjirea este dată de aproximarea prin adaos.

La zecimi:  $12,7358 \approx 12,7$   
 pentru că  $3 < 5$ .

La sutimi:  $12,7358 \approx 12,74$   
 pentru că  $5 = 5$ .

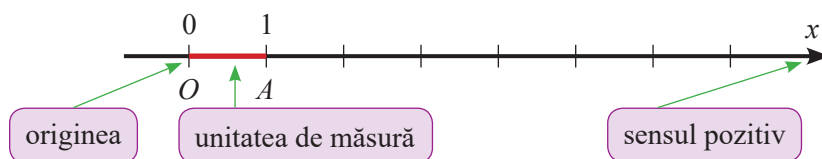
La miimi:  $12,7358 \approx 12,736$   
 pentru că  $8 > 5$ .

**Observație:** În practică, se folosesc, prin convenție, aproximări cu una sau cu două zecimale exacte. Aproximarea prin lipsă a unui număr pozitiv, la ordinul zecimilor se mai numește **aproximarea cu o zecimală exactă**. Aproximarea prin lipsă a unui număr pozitiv, la ordinul sutimilor se mai numește **aproximarea cu două zecimale exacte**.

**Comentariu:** Aproximarea numerelor reale prin fracții zecimale este foarte utilă pentru a estima poziția punctului de reprezentare a unui număr real pe axa numerelor, pentru a compara numere reale și pentru a stabili ordinea crescătoare sau descrescătoare a unor numere.

**Definiție:** O dreaptă pe care s-au fixat un punct (numit *origine*), o unitate de măsură și un sens pozitiv, se numește *axa numerelor*.

Originea se notează, de regulă, cu  $O$ .  
 Pe desenul alăturat unitatea de măsură este  $OA = 1$  cm, iar sensul pozitiv este de la stânga spre dreapta și este indicat prin săgeată.



Pe axa  $Ox$ , fiecărui număr real  $a$ , îi corespunde, în mod unic, un punct  $M$  și reciproc, fiecărui punct  $M$  de pe dreaptă îi corespunde un unic număr real  $a$ , numit coordonata (sau abscisa) punctului  $M$ , care va fi notat  $x_M$ . Din scrierea  $x_M = a$ , înțelegem că  $a$  este **abscisa punctului  $M$** , sau că punctul  $M$  este **reprezentarea**, pe axa numerelor, a **numărului real  $a$** . Vom da aceeași interpretare și scrierii  $M(a)$  (citim  $M$  de abscisă  $a$ , sau  $M$  de coordonată  $a$ ).

Datorită faptului că între numerele reale și punctele de pe axa numerelor există „o corespondență unu la unu”, axa numerelor se mai numește și **axa numerelor reale**.

**Să nu uităm:** Numerele pozitive se reprezintă în dreapta originii; numerele negative se reprezintă în stânga originii; 0 este abscisa originii axei.

**Numerele iraționale** se aproximează prin numere raționale, exprimate, de regulă, prin fracții zecimale.

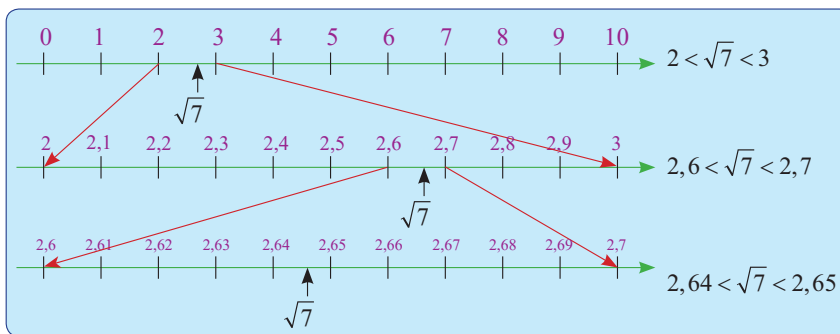
**Exemplu:** Calculăm  $\sqrt{7}$  cu ajutorul calculatorului, păstrăm primele opt zecimale exacte și obținem  $\sqrt{7} = 2,64575131\dots$

Aproximările prin lipsă, aproximările prin adaos și rotunjirile numărului  $\sqrt{7}$  sunt:

	Aproximări prin lipsă	Aproximări prin adaos	Rotunjiri
la unități	2	3	3
la zecimi	2,6	2,7	2,6
la sutimi	2,64	2,65	2,65
la miimi	2,645	2,646	2,646



Reprezentarea pe axa numerelor reale a numărului  $\sqrt{7}$ , folosind aproximările prin fracții zecimale, este ilustrată în imaginea de mai jos.

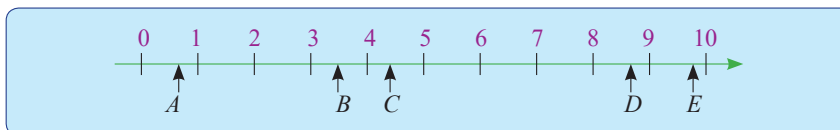


**Exercițiu:** În desenul de mai jos, punctele  $A, B, C, D$  și  $E$  au abscisele printre numerele:

$$\sqrt{0,6}, \sqrt{20}, \sqrt{76}, \sqrt{15}, \sqrt{97}$$

Folosind poziția punctelor pe axă și estimări ale valorii fiecăruia dintre numerele date, determinați coordonatele fiecărui punct, urmând modelul:

$$0^2 < 0,6 < 1^2 \Rightarrow 0 < \sqrt{0,6} < 1. \text{ Cum } 0 < x_A < 1 \text{ deducem că } x_A = \sqrt{0,6}.$$

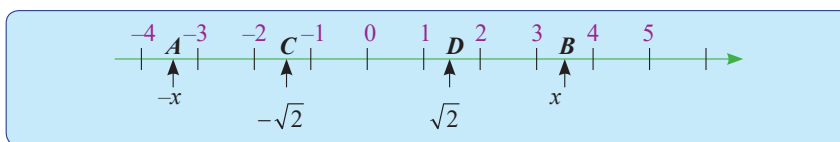


Numerele **reale negative** se reprezintă pe axa numerelor după modelul reprezentării numerelor raționale negative, adică:

Numerele opuse  $x$  și  $-x$  se reprezintă, de o parte și de alta a originii, la aceeași distanță de punctul  $O$ . Numărul pozitiv se reprezintă în partea dreaptă a originii, iar numărul negativ se reprezintă în partea stângă.

**Exemple:** Dacă  $x \in \mathbb{R}_+$ , atunci  $A$  și  $B$ , având coordonatele  $-x$ , respectiv  $x$ , sunt reprezentate pe axa numerelor la distanța  $x$  de punctul  $O$ .

Punctele  $C$  și  $D$  având coordonatele  $-\sqrt{2}$ , respectiv  $\sqrt{2}$ , numere iraționale, sunt reprezentate pe axa numerelor la distanța  $\sqrt{2}$  de punctul  $O$ .



### Reținem!



O dreaptă pe care s-au fixat o origine (punctul  $O$ ), o unitate de măsură (segmentul  $OA = 1$ ) și un sens (de la stânga spre dreapta), se numește **axa numerelor**.

Scriem  $M(a)$  sau  $x_M = a$  și înțelegem:

- $a$  este **abscisa punctului  $M$** ;
- punctul  $M$  este **reprezentarea** numărului real  $a$  pe axa numerelor, iar  $a$  este **ordonata punctului  $M$** .

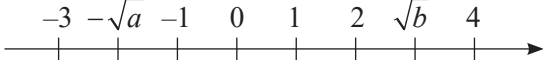
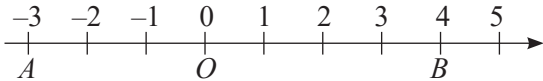
Numerele reale  $x$  și  $-x$  se reprezintă pe axa numerelor, de o parte și de alta a originii, la aceeași distanță de origine.





## Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1** a) Aproximați prin lipsă, la unități, numerele:  
 $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{234}$ ,  $\sqrt{1000}$ .  
 b) Aproximați prin adaos, la unități, numerele:  
 $\sqrt{312}$ ,  $\sqrt{99}$ ,  $\sqrt{2019}$ .
- 2** a) Aproximați prin lipsă, la zecimi, numerele:  
 $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{20}$ .  
 b) Aproximați prin adaos, la sutimi, numerele:  
 $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{32}$ .
- 3** Folosind operația de împărțire a numerelor întregi și calculatorul, completați căsuțele libere din tabelul următor, exprimând numerele sub formă de fracții zecimale cu două zecimale exacte (aproximate, prin lipsă, la sutimi):
- |                |               |                |            |             |
|----------------|---------------|----------------|------------|-------------|
| $\frac{17}{8}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{29}{7}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{50}$ |
|                |               |                |            |             |
- 4** Se consideră numărul  $a = 1,234567$ .  
 a) Aproximați prin lipsă, la unități și apoi la sutimi, numărul  $a$ .  
 b) Aproximați prin adaos, la zecimi și apoi la miimi, numărul  $a$ .
- 5** Completați, pe caiet, căsuțele libere, astfel încât să obțineți relații de forma  $a < x < a + 1$ , unde  $a$  este un număr întreg.
- a)  $\square < \sqrt{3} < \square$ ;      d)  $\square < -\sqrt{3} < \square$ ;  
 b)  $\square < \sqrt{27} < \square$ ;      e)  $\square < -\sqrt{20} < \square$ ;  
 c)  $\square < \sqrt{150} < \square$ ;      f)  $\square < -\sqrt{27} < \square$ .
- 6** a) Demonstrați, prin calcul, inegalitățile:  
 1)  $(2,2)^2 < 5 < (2,3)^2$ ;  
 2)  $(2,23)^2 < 5 < (2,24)^2$ ;  
 3)  $(12,2)^2 < 150 < (12,3)^2$ ;  
 4)  $(12,24)^2 < 150 < (12,25)^2$ .  
 b) Aproximați prin lipsă, la zecimi, numărul  $\sqrt{5}$ ;  
 c) Aproximați prin adaos, la sutimi, numărul  $\sqrt{5}$ ;  
 d) Aproximați prin lipsă, la sutimi, numărul  $\sqrt{150}$ ;  
 e) Aproximați prin adaos, la zecimi, numărul  $\sqrt{150}$ .

- 7** Reprezentați pe axa numerelor reale  $\frac{1}{2}$ ;  $-0,5$ ;  $\frac{3}{2}$ ;  $-2$ ;  $\frac{5}{2}$ ;  $-1,5$ , luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 1 cm.
- 8** Luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 5 cm, reprezentați pe axă următoarele numere:  $0,2$ ;  $-1$ ;  $1,3$ ;  $-0,6$ ;  $\frac{3}{10}$ ;  $\frac{5}{5}$ ;  $1\frac{1}{10}$ .
- 9** Alegeți o unitate de măsură convenabilă și reprezentați pe axă următoarele numere:  
 $\sqrt{2}$ ;  $-3$ ;  $\frac{11}{5}$ ;  $-\sqrt{3}$ ;  $1$ ;  $\sqrt{5}$ .
- 10** Pe axa numerelor, punctele  $A(-1)$ ,  $B(x)$ ,  $C(y)$ ,  $D(3)$  sunt reprezentate în această ordine,  $x$  numește un număr rațional, iar  $y$  numește un număr irațional.  
 a) Găsiți câte o valoare pentru  $x$  și  $y$ , apoi realizați un desen care să corespundă datelor problemei.  
 b) Stabiliți dacă are loc egalitatea  $AB + CD = AC + BD$ .
- 11** Pe axa din imaginea de mai jos, sunt reprezentate doar numere raționale. Determinați numerele naturale  $a$  și  $b$ .
- 
- 12** În figura de mai jos, punctul  $O$  este originea axei.
- 
- a) Folosind desenul, identificați abscisele punctelor  $A$  și  $B$ ;  
 b) Reprezentați pe axă punctele  $C(-\sqrt{2})$  și  $D(2\sqrt{6})$ , estimând valorile acestora;  
 c) Folosind ordinea punctelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  și  $O$ , justificați egalitățile:  $AC + CO = AO$ , respectiv  $AD - DB = AB$ .
- 13** Se consideră un număr real cu cifra miimilor nenulă. Determinați cifra sutimilor astfel încât:  
 a) aproximările prin lipsă la zecimi și la sutimi să fie egale.  
 b) aproximările prin adaos la zecimi și la sutimi să fie egale.

## L2 Compararea și ordonarea numerelor reale

### Ne amintim

Pentru a compara și pentru a ordona două numere (naturale, întregi, raționale) am folosit, cu succes, reprezentarea lor pe axa numerelor și am definit relația „ $\leq$ ” (relația de ordine).

Dacă  $x_A$  și  $x_B$  sunt două numere raționale, atunci  $x_A < x_B$  dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul  $A$  este reprezentat în stânga punctului  $B$ .

Dacă  $x_A$  și  $x_B$  sunt două numere raționale, atunci  $x_A > x_B$  dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul  $A$  este reprezentat în dreapta punctului  $B$ .

Dacă  $x_A$  și  $x_B$  sunt două numere raționale, atunci  $x_A \leq x_B$  dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul  $A$  este reprezentat în stânga punctului  $B$  sau coincide cu punctul  $B$ .

Dacă  $x_A$  și  $x_B$  sunt două numere raționale, atunci  $x_A \geq x_B$  dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul  $A$  este reprezentat în dreapta punctului  $B$  sau coincide cu punctul  $B$ .

### Exemple

$2 < 5$  pentru că

$A(2)$  este reprezentat de axă în stânga punctului  $B(5)$

$5,3 > 5,2$  pentru că

$B(5,3)$  este reprezentat de axă în dreapta punctului  $A(5,2)$

$3,1 \leq 3,5$  pentru că  $3,1 < 3,5$

$3,1 \leq 3,1$  pentru că  $3,1 = 3,1$

$-13,4 \geq -13,9$  pentru că  $-13,4 > -13,9$

$-13,4 \geq -13,4$  pentru că  $-13,4 = -13,4$

Datorită faptului că  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , deducem că știm deja să comparăm și să ordonăm o infinitate de numere reale (pe cele naturale, întregi, raționale). Rămâne doar să vedem dacă această abordare poate fi extinsă și pentru numerele *iraționale*.

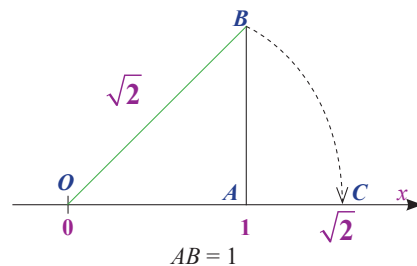


### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

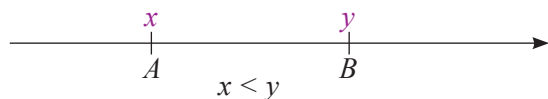
Unele numere iraționale pot fi reprezentate pe axa numerelor cu *fidelitate*.

De exemplu, numărul  $\sqrt{2}$  se poate reprezenta pe axă folosind compasul.

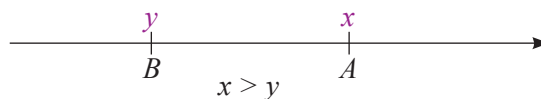
În general, însă, reprezentarea pe axa numerelor a numerelor iraționale se realizează folosind estimări ale poziției acestor numere pe axă. Am putut constata în lecțiile anterioare că punctul de reprezentare, pe axa numerelor, a oricărui număr irațional, este situat în *dreapta* punctului de reprezentare a *aproximării prin lipsă* și în *stânga* punctului de reprezentare a *aproximării prin adaos*, oricare ar fi ordinul de aproximare.



Este firească, acum, următoarea caracterizare. Considerăm numerele reale  $x, y$  și punctele  $A(x)$  și  $B(y)$ .



Punctul  $A$  este situat în stânga punctului  $B$  dacă și numai dacă  $x < y$ .



Punctul  $A$  este situat în dreapta punctului  $B$  dacă și numai dacă  $x > y$ .

Deoarece fiecărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un unic număr real, punctele  $A$  și  $B$  coincid dacă și numai dacă  $x = y$ .

Pentru orice două numere reale  $x$  și  $y$  are loc una și numai una din relațiile:  $x < y$  sau  $x = y$  sau  $x > y$ . A compara două numere reale  $x$  și  $y$  înseamnă a stabili care dintre cele trei relații de mai sus are loc.

Pe mulțimea numerelor reale, se păstrează rezultatele:

$$(x < y \text{ sau } x = y) \Leftrightarrow x \leq y;$$

$$(x > y \text{ sau } x = y) \Leftrightarrow x \geq y;$$

$$(x < y \text{ sau } x > y) \Leftrightarrow x \neq y.$$

**Exercițiu:** Considerăm mulțimea  $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}\}$ . Determinați mulțimile  $B, C, D, E$  definite prin:  
 $B = \{x \in A \mid x \leq 2\}$ ,  $C = \{x \in A \mid x \geq 2\}$ ,  $D = \{x \in A \mid x = 2\}$ ,  $E = \{x \in A \mid x \neq 2\}$ .

**Soluție:**  $\sqrt{2} = 1,4 \dots \Rightarrow \sqrt{2} < 2$ ;  $\sqrt{3} = 1,7 \dots \Rightarrow \sqrt{3} < 2$ ;  $\sqrt{4} = 2$ ;  $\sqrt{5} = 2,2 \dots \Rightarrow \sqrt{5} > 2$ .

Obținem  $B = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}$ ,  $C = \{\sqrt{4}, \sqrt{5}\}$ ,  $D = \{\sqrt{4}\}$ ,  $E = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$ .

Dacă între numerele reale  $x$  și  $y$  scriem unul dintre simbolurile  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $=$  sau  $\neq$  astfel încât să obținem o propoziție adevărată, spunem că am stabilit o **relație** între numerele  $x$  și  $y$ .

Pe mulțimea numerelor reale, relația „ $\leq$ ” este dotată cu proprietățile: 1) este reflexivă ( $x \leq x$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ ), 2) este antisimetrică (dacă  $x \leq y$  și  $y \leq x$ , atunci  $x = y$ ) și 3) este tranzitivă (dacă  $x \leq y$  și  $y \leq z$ , atunci  $x \leq z$ ).

Aceste proprietăți ne vor ajuta să identificăm tehnici de comparare a numerelor reale.

Pe mulțimea numerelor reale, au loc:

Orice număr real negativ este mai mic decât orice număr real pozitiv.

$$-15 < 1; -\sqrt{3} < \sqrt{0,2}.$$

Orice număr real negativ este mai mic decât 0.

$$-13,5 (3) < 0; -\sqrt{119} < 0.$$

Pentru  $x < 0, y < 0$ , avem echivalența:  $x < y$  dacă și numai dacă  $-x > -y$ .

$$-\sqrt{19} < -\sqrt{12} \Leftrightarrow \sqrt{19} > \sqrt{12}.$$

Dacă  $x, a, y \in \mathbb{R}$  sunt numere distincte,  $x < a$  și  $a < y$ , atunci  $x < y$ .

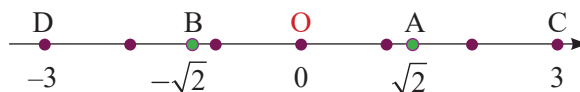
$$\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dacă  $x$  și  $y$  sunt numere reale pozitive, atunci  $x \leq y \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ .

$$4,9 < 5 \Rightarrow \sqrt{4,9} < \sqrt{5}.$$

### Rezolvăm și observăm

1. Reprezentați pe axă, folosind, eventual, aproximații prin fracții zecimale, numerele:  $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 3, -3$ . Observați poziția punctelor corespunzătoare, apoi ordonați crescător aceste numere.



$$D - B - O - A - C \Rightarrow -3 < -\sqrt{2} < 0 < \sqrt{2} < 3.$$

2. a) Folosind calculatorul, scrieți  $\sqrt{5}$  cu două zecimale exacte.  
 b) Comparați numerele  $\sqrt{5}$  și  $2,23$ .  
 c) Comparați numerele  $2,23$  și  $2,(2)$ .  
 d) Comparați numerele  $\sqrt{5}$  și  $2,(2)$ .

a)  $\sqrt{5} = 2,23 \dots$

b)  $\sqrt{5} > 2,23$ ;

c)  $2,23 > 2,(2)$

d)  $\sqrt{5} > 2,23$  și  $2,23 > 2,(2)$  rezultă  $\sqrt{5} > 2,(2)$ .



3. Comparați numerele:  $x = 3\sqrt{5}$  și  $y = 2\sqrt{11}$ .

**Soluție:** Introducem factorii sub radicali și obținem:

$$x = 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}, \quad y = 2\sqrt{11} = \sqrt{2^2 \cdot 11} = \sqrt{44}.$$

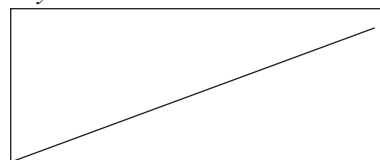
$$\text{Deoarece } 45 > 44 \Rightarrow \sqrt{45} > \sqrt{44} \Rightarrow x > y.$$

4. Decideți dacă se poate introduce o tijă metalică subțire cu lungimea de 58 cm, într-o cutie având baza dreptunghi, cu dimensiunile 50 cm, respectiv 30 cm, astfel încât tija să fie așezată în întregime pe baza cutiei.

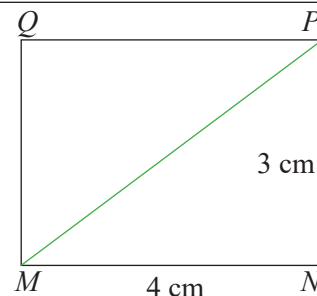
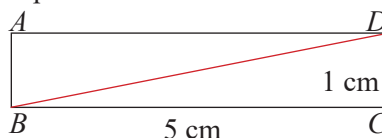
**Soluție:** Lungimea maximă a tijeii care încapă în interiorul dreptunghiului este dată de lungimea diagonalei sale,

$$d = \sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{3400} = 58,3 \dots$$

Deoarece  $58 < \sqrt{3400} \Rightarrow 58 < d$ , tija încapă în cutie.



5. Decideți care dintre dreptunghiurile  $ABCD$  sau  $MNPQ$  are diagonala mai mare.



## Reținem!



- Dacă  $x_A$  și  $x_B$  sunt două numere reale, atunci  $x_A < x_B$  dacă și numai dacă, pe axa numerelor, punctul  $A$  este reprezentat în stânga punctului  $B$ .
- Orice număr real negativ este mai mic decât 0 și decât orice număr real pozitiv.
- Dacă  $x$  și  $y$  sunt numere reale pozitive, atunci:  $x \leq y \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$ .
- Dacă  $x < 0$ ,  $y < 0$  și  $x \neq y$ , atunci  $x < y$  dacă și numai dacă  $-x > -y$ .
- Pentru orice numere reale  $x$  și  $y$  are loc **una și numai una** din relațiile:  $x < y$  sau  $x > y$  sau  $x = y$ .
- **A compara** două numere reale  $x$  și  $y$  înseamnă a stabili care dintre relațiile  $x < y$  sau  $x > y$  sau  $x = y$  are loc.



## Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1** Reprezentați pe axa numerelor reale, apoi ordonați crescător, numerele de mai jos. Stabiliți cel mai mic și cel mai mare număr, în fiecare caz:

a)  $-3,1$ ;  $-3\frac{1}{4}$ ;  $-\left(-3\frac{1}{2}\right)$ ;  $\frac{19}{5}$ ;

b)  $\sqrt{3}$ ;  $-2$ ;  $-\sqrt{2}$ ;  $1 - \sqrt{1,44}$ ;  $1,6$ .

- 2** Introduceți factorii sub radicali, apoi comparați numerele:

a)  $2\sqrt{3}$  și  $3\sqrt{2}$ ; c)  $-20\sqrt{2}$  și  $-28$ ;

b)  $8\sqrt{5}$  și  $10\sqrt{3}$ ; d)  $-6\sqrt{6}$  și  $-7\sqrt{5}$ .

- 3** Completați unul dintre simbolurile  $<$ ,  $=$ ,  $>$ , pentru a obține propoziții adevărate:

a)  $2\sqrt{6} \square 5$  h)  $2\sqrt{5} \square 5\sqrt{2}$ ;

b)  $3\sqrt{7} \square 5\sqrt{3}$ ; i)  $\frac{4}{3} \square \sqrt{\frac{5}{3}}$ ;

c)  $7\sqrt{10} \square 9\sqrt{6}$ ; j)  $\sqrt{48} \square 0$ ;

d)  $4\sqrt{2} \square \sqrt{32}$ ; k)  $0 \square -\sqrt{6}$ ;

e)  $\sqrt{196} \square 7\sqrt{4}$ ; l)  $-3 \square -\sqrt{\frac{27}{3}}$ ;

f)  $-5 \square -2\sqrt{6}$ ; m)  $\sqrt{99} \square -7\sqrt{2}$ ;

g)  $-2\sqrt{7} \square -\sqrt{30}$ ; n)  $-8\sqrt{7} \square -2\sqrt{448}$ .

- 4** Se consideră propozițiile:

$p_1$ : „ $3 < \sqrt{7}$ ”

$p_5$ : „ $\sqrt{43} > 6,55$ ”

$p_2$ : „ $\sqrt{19} > 5$ ”

$p_6$ : „ $-3\sqrt{6} > -4\sqrt{5}$ ”

$p_3$ : „ $\sqrt{120} < 11 < \sqrt{130}$ ”

$p_7$ : „ $\left|\frac{73}{5} - 13,2\right| > \sqrt{2}$ ”

$p_4$ : „ $\sqrt{8} < 2,9$ ”

$p_8$ : „ $\sqrt{(-7)^2 \cdot 99} < 70$ ”

Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor de mai sus și enumerați elementele mulțimilor  $A$  și  $F$  știind că  $A$  este mulțimea propozițiilor adevărate, iar  $F$  este mulțimea propozițiilor false.

- 5** Ordonați crescător numerele:

a)  $\sqrt{2}$ ;  $1,41$ ;  $1,(41)$ ;

b)  $2\sqrt{6}$ ;  $5$ ;  $3\sqrt{3}$ .

- 6** Ordonați descrescător numerele:

a)  $7$ ;  $2\sqrt{11}$ ;  $4\sqrt{3}$ ;  $3\sqrt{5}$ ;

b)  $-8$ ;  $-3\sqrt{7}$ ;  $-6\sqrt{2}$ ;  $-2\sqrt{15}$ .

- 7** Determinați numărul întreg  $n \in \mathbb{Z}$ , pentru fiecare din situațiile:

a)  $n < \sqrt{41} < n + 1$ ;

b)  $n < -\sqrt{8} < n + 1$ ;

c)  $\frac{9}{5} < \sqrt{n} < \frac{9}{4}$ .

- 8** Scrieți:

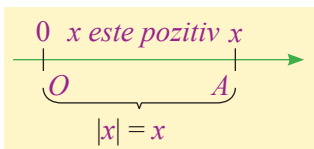
a) trei numere raționale  $r$ , astfel încât

$\sqrt{2} < r < \sqrt{3}$ ;

b) trei numere iraționale  $p$ , astfel încât  $1 < p < 2$ .

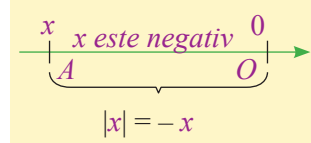
### L3 Modulul unui număr real

#### Ne amintim



Modulul numărului  $x \in \mathbb{Q}$  reprezintă distanța, pe axa numerelor, de la originea axei la punctul  $A$ , având abscisa  $x$ .

În desenele alăturate,  $|x| = OA$ .



Modulul numărului  $x$  se mai numește **valoarea absolută** a numărului  $x$ .

Abscisa punctului  $A$  se mai numește **coordonata** punctului  $A$  și se notează  $x_A$ .

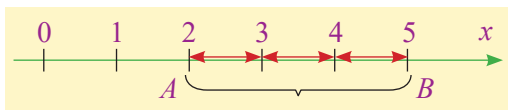
Punctul  $A$  se numește **reprezentarea** pe axă a numărului  $x$  și se notează  $A(x)$ .

**Distanța** dintre punctele  $A$  și  $B$ , situate pe axa numerelor, având abscisele  $x_A$  respectiv  $x_B$ , este numărul unităților de măsură cuprinse între  $A$  și  $B$ . În desenul alăturat,  $AB = 3$ .

Observăm că  $x_B - x_A = 5 - 2 = 3 = AB$ ,

apoi  $x_A - x_B = 2 - 5 = -3$ , deci  $AB = 3 = -(x_A - x_B)$  sau  $AB = x_B - x_A$ .

În concluzie,  $AB = |x_B - x_A|$  sau  $AB = |x_A - x_B|$ , oricare ar fi numerele reale  $x_A$  și  $x_B$ .



#### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

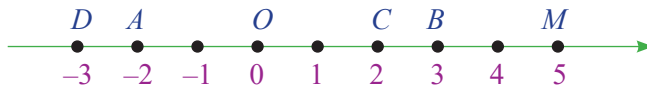
**Definiție:** Modulul unui număr real  $x$  este **distanța**, pe axa numerelor, de la originea axei la punctul  $A(x)$ .

Vom scrie  $|x| = OA$ , unde  $O$  este originea axei, iar  $A$  este punctul de reprezentare a numărului  $x$  pe axă.

Reprezentați pe axa numerelor punctele:

$A(-2)$ ,  $B(3)$ ,  $C(3^2 - 7)$ ,  $D(-3)$ .

- Calculați  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ , apoi determinați  $|-2|$ ,  $|2|$ ,  $|3|$ ,  $|-3|$ .
- Identificați punctul  $M(x)$  pentru care  $|x - 5| = 0$ .



$$OA = 2 \Rightarrow |-2| = 2; \quad OB = 3 \Rightarrow |3| = 3; \quad OC = 2 \Rightarrow |2| = 2;$$

$$OD = 3 \Rightarrow |-3| = 3.$$

$$|x - 5| = 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow M(5).$$

#### Rezolvăm și observăm

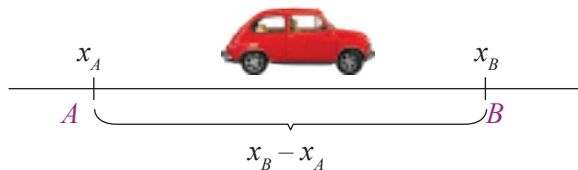
Un automobil parcurge, pe autostradă, distanța dintre două borne kilometrice  $A$  și  $B$ .

Numerele înscrise pe aceste borne sunt:

$x_A = 43$  (km) și  $x_B = 98$  (km).

Constatăm că  $x_B > x_A$ .

Considerând că autostrada este rectilinie, distanța parcursă de automobil este  $AB = x_B - x_A = 98 - 43 = 55$  (km).



$$AB = |x_B - x_A|$$

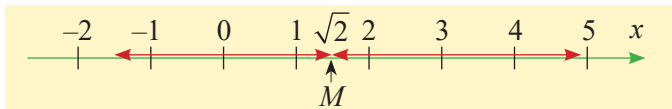
Dacă nu știm care dintre numerele  $x_A$  și  $x_B$  este mai mare, atunci distanța dintre două puncte oarecare  $A$  și  $B$ , situate pe axa numerelor, este dată de:  $AB = |x_B - x_A|$  sau  $AB = |x_A - x_B|$ .

**Comentariu interdisciplinar:** În fizică, punctul  $A$ , din care pleacă automobilul, se numește *punct inițial*, iar abscisa sa se notează cu  $x_i$ . Punctul  $B$ , în care ajunge automobilul, se numește *punct final*, iar abscisa sa se notează cu  $x_f$ . Diferența  $x_B - x_A$  se notează  $\Delta x = x_f - x_i$ .



### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Privind *modulul diferenței a două numere reale* ca fiind **distanța dintre punctele de reprezentare** a acestor numere pe axă, determinați numerele întregi  $x$  cu proprietatea  $|x - \sqrt{2}| < 3$ .



**Soluție:** Reprezentăm pe axa numerelor punctul  $M(\sqrt{2})$ . Căutăm punctele situate pe axa numerelor, care au coordonate întregi, situate de o parte și de alta a punctului  $M$ , la distanță mai mică decât 3. Observând axa numerelor, găsim soluțiile:  $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ .

Proprietățile modulului, pe care le cunoaștem de la numere raționale, se păstrează și pentru numere reale.

- $|x| = x$ , oricare ar fi  $x \geq 0$
- $|x| = -x$ , oricare ar fi  $x < 0$
- $|x| \geq 0$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{x^2} = |x|$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
- $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
- $|x^n| = |x|^n$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \left|\frac{x}{y}\right|$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*$

Scrierea  $|a| = \begin{cases} a, & \text{pentru } a \geq 0 \\ -a, & \text{pentru } a < 0 \end{cases}$

se numește **explicitarea modulului**.

#### Exemple

- $|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$
- $|-\sqrt{5}| = -(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$
- $|\sqrt{3}| = \sqrt{3} \geq 0$ , iar  $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2} \geq 0$
- $|-\sqrt{8}| = |\sqrt{8}|$
- $\sqrt{\pi^2} = |\pi| = \pi$ ;  $\sqrt{(-\sqrt{5})^2} = |-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$
- $|0,5 + (-1,4)| \leq |0,5| + |-1,4| \Leftrightarrow 0,9 \leq 1,9$
- $|0,5| \cdot |-1,4| = 0,5 \cdot 1,4 = 0,7$  și  $|0,5 \cdot (-1,4)| = |-0,7| = 0,7$
- $|(-0,5)^3| = |-0,125| = 0,125$  și  $| -0,5|^3 = 0,5^3 = 0,125$
- $\left|\frac{-1,4}{0,5}\right| = \frac{1,4}{0,5} = 2,8$  și  $\left|\frac{-1,4}{0,5}\right| = |-2,8| = 2,8$

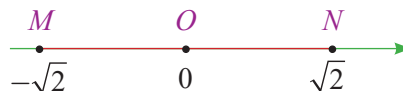
Dacă  $x \geq 1$ , atunci  $x - 1 \geq 0$  și  $|x - 1| = x - 1$ .

Dacă  $x < 1$ , atunci  $x - 1 < 0$  și  $|x - 1| = -(x - 1)$ .

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

- Modulul unui număr real este cu atât mai mare, cu cât distanța de la origine la punctul de reprezentare este mai mare.
- Pentru orice  $a$ , număr real pozitiv, există numere reale astfel încât  $|x| < a$  și anume, toate numerele reale care se reprezintă pe axă între punctele  $M(-a)$  și  $N(a)$ .
- Pentru orice  $a$ , număr real pozitiv, există exact două numere reale astfel încât  $|x| = a$  și anume:  $x = a$  și  $x = -a$ .
- Una dintre tehnicile de comparare a două numere reale negative se poate reformula, folosind modulul, astfel: Dacă  $x < 0, y < 0$ , atunci:  $x < y$  dacă și numai dacă  $|x| > |y|$ .

Fie  $O$  originea axei numerelor,  $x_A = -7$  și  $x_B = +5$  abscisele punctelor  $A$ , respectiv  $B$ , pe axă. Atunci,  $OA = 7$  și  $OB = 5$ , deci  $OA > OB$  și  $|-7| > |+5|$ .



Numerele reale cu proprietatea  $|x| = 2$  sunt  $+2$  și  $-2$ , iar cele pentru care  $|x| = \sqrt{3}$  sunt  $\sqrt{3}$  și  $-\sqrt{3}$ .

**Concluzie:**  $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$  sau  $x = -y$

### Reținem!



- $|x| = \begin{cases} x, & \text{pentru } x \geq 0 \\ -x, & \text{pentru } x < 0 \end{cases}$
- Dacă  $x \in \mathbb{R}$  este abscisa punctului  $A$  pe axa numerelor, atunci  $|x| = OA$ , unde  $O$  este originea axei.
- Dintre două numere reale pozitive, este mai mare cel care are modulul mai mare.
- Dintre două numere reale negative, este mai mare cel care are modulul mai mic.
- $AB = |x_B - x_A|$ , unde  $x_A$  și  $x_B$  sunt abscisele punctelor  $A$  și  $B$  pe axa numerelor.



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

**1** Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

- Dacă  $a \in \mathbb{R}$  și  $a > 0$ , atunci  $|a| = \dots$
- Dacă  $b = 0$ , atunci  $|b| = \dots$
- Dacă  $c \in \mathbb{R}$  și  $c < 0$ , atunci  $|c| = \dots$

**2** Calculați modulul numărului  $x$  și completați căsuțele libere din tabel.

$x$	5	2,8	$-\frac{7}{2}$	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{16}$	$(-2)^3$	0
$-x$							
$ x $							

**3** Efectuați calculele:

- $(|-0,1| + |0,2| - |-0,3|) : |-2019|$ ;
- $|-2^3| + |(-3)^2| - |\sqrt{-2 \cdot 3}| \cdot |-3 \cdot (-2)|$ .

**4** Exprimați cu ajutorul modulului:

- $x \in \{-5, 5\}$ ;
- $-8 < x < 8$ ;
- $-3 \leq x - 2 \leq -1$ .

**5** Determinați numărul real  $y$  pentru fiecare din situațiile:

- $|y| = 4,5$  și  $y > 0$ ;
- $|y| = \sqrt{3}$  și  $y < 0$ ;
- $|y\sqrt{2}| = 0$
- $|7y| = |y|$ .

**6** Determinați numărul elementelor mulțimii

$$M = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid |x^3| < 1234 \right\}.$$

**7** a) Pentru  $x > 0$ , calculați:

$$E_1 = |x| + |-3| + |x + 27:3| - |2x|;$$

b) Pentru  $x < 0$ , calculați:

$$E_2 = |x| + |x - 1| - |2x - 2|;$$

c) Pentru  $x > 0$ , calculați:

$$E = |x| + |-3| + 4x - 1 - |2x|$$

**8** Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a) Dacă  $x \in \mathbb{N}$  și  $|x| < \sqrt{5}$ , atunci  $x \in \{\dots\}$ .

b) Dacă  $x \in \mathbb{Z}_-$  și  $|x| < \sqrt{7}$ , atunci  $x \in \{\dots\}$ .

c) Dacă  $x \in \mathbb{Z}^*$  și  $\frac{x}{3} \leq 0, (3)$ , atunci  $x \in \{\dots\}$ .

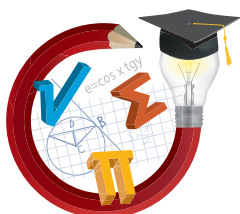
**9** Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{(-3)^2} < x < |-5| \right\},$$

$$B = \left\{ y \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq \sqrt{y^2} \leq 2^2 \right\},$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{R} \mid \left| z + \frac{2}{5} \right| = \frac{3}{5} \right\},$$

$$D = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \frac{7}{|t-1|} = 1 \right\}.$$





**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

**I.** La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.

5p	1. Rădăcina pătrată a numărului 8, cu aproximație de o zecime prin lipsă, este: A. 2,6                      B. 2,7                      C. 2,8                      D. 2,9
5p	2. Rădăcina pătrată a numărului 10, cu aproximație de o sutime prin adaos, este: A. 3,17                      B. 3,16                      C. 3,18                      D. 3,00
5p	3. Reprezentați pe axa numerelor (figura alăturată), punctele $M(-\sqrt{2})$ și $P(\sqrt{3})$ , apoi rezolvați cerințele 3.1 și 3.2
5p	3.1. Punctul $M$ aparține segmentului: A. $AB$ B. $BO$ C. $OC$ D. $CD$
5p	3.2. Punctul $P$ aparține segmentului: A. $AB$ B. $BO$ C. $OC$ D. $CD$
5p	4. Ordinea crescătoare a numerelor $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , $b = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , $c = \frac{\sqrt{7}}{4}$ este: A. $a, b, c$ B. $c, b, a$ C. $b, a, c$ D. $a, c, b$
5p	5. Ordinea descrescătoare a numerelor $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ , $z = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ este: A. $x, z, y$ B. $y, z, x$ C. $z, y, x$ D. $z, x, y$
5p	6. Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $5 < x < 7$ , atunci $x$ poate fi: A. 6                      B. $\sqrt{6}$ C. 36                      D. $\sqrt{38}$
5p	7. Dacă $y \in \mathbb{Z}$ și $\sqrt{12} < y < \sqrt{22}$ , atunci $y$ poate fi: A. 20                      B. 13                      C. 5                      D. 4

**II.** Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

5p	a) Dacă $\sqrt{x^2} = -x$ , atunci $x$ este un număr ... .
5p	b) Dacă $\sqrt{y^6} = y^3$ , atunci $y$ este un număr ... .

**III.** La problemele următoare se cer rezolvări complete.

15p	1. Se consideră numerele $a = \sqrt{(-2)^2}$ , $b = \sqrt{(-3)^4}$ și $c = \sqrt{(-5)^6}$ . Determinați numărul $a :  -2^0  + b :  -3^1  + c :  -5^2 $ .
5p	2. Rezolvați următoarele cerințe: a) Stabiliți care dintre numerele 3 și $\sqrt{10}$ este mai mare.
5p	b) Stabiliți care dintre numerele 2 și $\sqrt{6}$ este mai mic.
10p	c) Fie numerele $a =  3 - \sqrt{10}  + (\sqrt{10} - 3)$ și $b = \sqrt{(3 - \sqrt{6})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{6})^2}$ . Arătați că $0 < b - a < 1$ .

1.5

## Operații cu numere reale.

### Rationalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$

#### L1 Adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea numerelor reale

Știm deja că mulțimea numerelor reale este reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale, ceea ce ne determină ca în studiul operațiilor pe mulțimea numerelor reale să ne bazăm pe ceea ce cunoaștem despre operațiile definite pe mulțimea numerelor raționale.

#### Ne amintim

**Adunarea numerelor** (naturale, întregi, raționale) este operația care face ca oricărui două numere (naturale, întregi, raționale)  $a$  și  $b$ , numite *termeni*, să le corespundă numărul (natural, întreg, rațional)  $a + b$ , numit *sumă*.

$$9 + 2 = 11$$

↙ ↘ ↗ ↖  
termeni sumă

**Înmulțirea numerelor** (naturale, întregi, raționale) este operația care face ca oricărui două numere (naturale, întregi, raționale), numite **factori**, să le corespundă numărul (natural, întreg, rațional)  $a \cdot b$ , numit produs.

$$9 \cdot 2 = 18$$

↙ ↘ ↗ ↖  
factori produs

Dacă  $a$  și  $b$  sunt două *numere raționale*, atunci **a scădea** numărul  $b$  din numărul  $a$  înseamnă a aduna numărul  $a$  cu opusul numărului  $b$ , adică  $a - b = a + (-b)$ .

Dacă  $a$  și  $b$  sunt două *numere raționale*,  $b \neq 0$ , atunci **a împărți** numărul  $a$  la numărul  $b$  înseamnă a înmulți numărul  $a$  cu inversul numărului  $b$ , adică  $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ .

Dacă  $a, b, \in \mathbb{Q}$ , atunci  $a + b \in \mathbb{Q}$ ,  $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ ,  $a - b \in \mathbb{Q}$ .

Dacă  $a, b, \in \mathbb{Q}$  și  $b \neq 0$ , atunci  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ .

#### Exemplu

Pentru  $a = \frac{7}{2}$ ,  $b = \frac{3}{5}$ , obținem:

$$a + b = \frac{41}{10}, a - b = \frac{29}{10}, a \cdot b = \frac{21}{10}, a : b = \frac{35}{6}$$

și toate sunt numere raționale.

#### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Vom descoperi aspectele specifice operațiilor cu numere reale, pornind de la următoarele întrebări:

- 1) Ce fel de număr vom obține dacă adunăm sau înmulțim un număr rațional cu un număr irațional?
- 2) Ce fel de număr vom obține dacă adunăm sau înmulțim două numere iraționale?

Să găsim răspunsurile (unele dintre ele s-au conturat prin exemple oferite de lecțiile anterioare) și să demonstrăm câteva.

1) Prima întrebare își găsește răspunsul în următoarele secvențe:

a) Dacă  $q \in \mathbb{Q}$  este număr rațional și  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , atunci  $q + \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

*Demonstrație:* Presupunem, prin reducere la absurd, că  $q + \sqrt{x} = r \in \mathbb{Q}$ , atunci,  $\sqrt{x} = r - q \in \mathbb{Q}$ , contradicție cu  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Presupunerea a fost falsă, deci  $q + \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Exemple:** Numerele  $2 + \sqrt{7}$ ;  $3 - \sqrt{5}$  sunt iraționale, deoarece:

$$2 \in \mathbb{Q}, \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 2 + \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$$

$$3 \in \mathbb{Q}, -\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 3 + (-\sqrt{5}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$



b) Dacă  $q \in \mathbb{Q}^*$  este număr rațional și  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , atunci  $q \cdot \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

*Demonstrație:* Presupunem, prin reducere la absurd, că

$$q \cdot \sqrt{x} = r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{r}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ contradicție cu } \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Deci  $q \cdot \sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , pentru orice  $q \in \mathbb{Q}^*$  și  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Exemple:** Numerele  $2\sqrt{7}$ ;  $-3\sqrt{5}$ ;  $-\frac{2}{7}\sqrt{12}$  sunt numere iraționale deoarece:

$$2 \in \mathbb{Q}^*, \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{7} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$$

$$-3 \in \mathbb{Q}^*, \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow -3 \cdot \sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$$

$$-\frac{2}{7} \in \mathbb{Q}^*, \sqrt{12} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow -\frac{2}{7} \cdot \sqrt{12} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Un exemplu foarte util este cel oferit de produsul dintre un număr natural nenul și un număr irațional.

Să observăm că  $2\sqrt{5}$  se poate scrie  $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ , apoi  $3\sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5}$ . În acest fel, produsul dintre un număr natural  $n \in \mathbb{N}^*$  și un **număr irațional** de forma  $\sqrt{x}$  este  $n\sqrt{x} = \underbrace{\sqrt{x} + \sqrt{x} + \dots + \sqrt{x}}_{n \text{ termeni}}$ .

2) Considerăm două numere  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Deoarece un număr irațional este un număr a cărui scriere este o fracție zecimală infinită și neperiodică, rezultatul operațiilor cu acestea se definesc ca șiruri de aproximări succesive.

De exemplu, pentru numerele iraționale  $\sqrt{3} = 1,732\dots$  și  $\sqrt{7} = 2,645\dots$ , definim **suma** acestora,  $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ , ca fiind acel **număr** cuprins între *suma aproximărilor prin lipsă și suma aproximărilor prin adaos*, ale celor două numere, la același ordin de mărime.

$1 < \sqrt{3} < 2$	$2 < \sqrt{7} < 3$	$3 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 5$
$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$	$2,6 < \sqrt{7} < 2,7$	$4,3 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4,5$
$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$	$2,64 < \sqrt{7} < 2,65$	$4,37 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4,39$
$1,732 < \sqrt{3} < 1,733$	$2,645 < \sqrt{7} < 2,646$	$4,377 < \sqrt{3} + \sqrt{7} < 4,379$

și rezultă

În mod similar, **produsul** a două numere iraționale este acel **număr** cuprins între *produsul aproximărilor prin lipsă și produsul aproximărilor prin adaos* ale celor două numere, la același ordin de mărime.

Vom folosi scrierea  $\sqrt{3} + \sqrt{7}$  pentru valoarea exactă a sumei dintre  $\sqrt{3}$  și  $\sqrt{7}$ , neexistând o scriere mai succintă pentru aceasta, iar pentru valoarea exactă a produsului lor, vom folosi una din formele  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$  sau  $\sqrt{21}$ .

Să vedem acum ce fel de număr (rațional sau irațional) este suma și ce fel de număr este produsul a două numere iraționale.

Analizăm exemplele: Fie  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{2}$ ,  $c = \sqrt{3}$ ,  $d = -\sqrt{2}$ , toate iraționale. Obținem  $a + b = 3\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $b + d = 0 \in \mathbb{Q}$ , apoi  $a \cdot b = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{Q}$  și  $b \cdot c = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**Concluzie:**

Dacă  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , atunci  $a + b$  și  $a \cdot b$  pot fi numere raționale sau numere iraționale.

Analizând modul de definire a operațiilor pe mulțimea numerelor reale, deducem că proprietățile acestora se extind de la mulțimea numerelor raționale.

Adunarea este asociativă:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \text{ oricare ar fi } a, b, c, \in \mathbb{R}.$$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + (-\sqrt{3}) = \sqrt{5} + [\sqrt{3} + (-\sqrt{3})]$$

Adunarea este comutativă:

$$a + b = b + a, \text{ oricare ar fi } a, b, \in \mathbb{R}.$$

$$(-\sqrt{2}) + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + (-\sqrt{2})$$

Numărul 0 este element neutru pentru adunare:

$$a + 0 = 0 + a = a, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbb{R}.$$

$$0 + (1 - \sqrt{3}) = (1 - \sqrt{3}) + 0 = 1 - \sqrt{3}$$

Orice număr  $a \in \mathbb{R}$  are un număr *opus*,  $-a \in \mathbb{R}$ :  
 $a + (-a) = (-a) + a = 0$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .

$$3\sqrt{7} + (-3\sqrt{7}) = (-3\sqrt{7}) + 3\sqrt{7} = 0$$

Înmulțirea este asociativă:

$(a \cdot b) \cdot c = a(b \cdot c)$ , oricare ar fi  $a, b, c, \in \mathbb{R}$ .

$$(6,17 \cdot 25) \cdot 4 = 6,17 \cdot (25 \cdot 4)$$

$$(3 \cdot \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} = 3 \cdot (\sqrt{7} \cdot \sqrt{7})$$

Înmulțirea este comutativă:

$a \cdot b = b \cdot a$ , oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$(1 + \sqrt{5}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{5})$$

Numărul 1 este element neutru pentru înmulțire:

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .

$$1 \cdot \sqrt{6,8} = \sqrt{6,8} \cdot 1 = \sqrt{6,8}$$

Orice număr  $a \in \mathbb{R}^*$  are un număr *invers*  $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^*$   
 $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ .

$$3\sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt{7}}\right) = \left(\frac{1}{3\sqrt{7}}\right) \cdot 3\sqrt{7} = 1$$

Înmulțirea este distributivă față de adunare:

$a(b + c) = ab + ac$  și  $(a + b)c = ac + bc$ , oricare ar fi  $a, b, c, \in \mathbb{R}$ .

$$9 \cdot (4 + \sqrt{2}) = 9 \cdot 4 + 9\sqrt{2}$$

$$(4 + \sqrt{3})\sqrt{5} = 4\sqrt{5} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$$

Scăderea și împărțirea numerelor reale sunt similare celor din mulțimea numerelor raționale, adică:

1) Pentru orice două numere reale  $a$  și  $b$ , avem  $a - b = a + (-b)$ .

2) Pentru orice două numere reale  $a$  și  $b$ , cu  $b \neq 0$ , are loc  $a : b = a \cdot b^{-1}$  sau  $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ .

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Dacă  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $a + b\sqrt{x} = 0$ , atunci  $a = 0$  și  $b = 0$ .

*Demonstrație:* Dacă ar fi  $b \neq 0$ , din  $a + b\sqrt{x} = 0 \Rightarrow b\sqrt{x} = -a \Rightarrow \sqrt{x} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  fals pentru că  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Deci  $b = 0$ .

Cum  $a + b\sqrt{x} = 0$ , obținem  $a = 0$ .

Dacă  $a, b \in \mathbb{Q}$  și  
 $2a - 3 + (b - 8)\sqrt{5} = 0$ ,  
 atunci  $2a - 3 = 0$  și  $b - 8 = 0$ .  
 Deci  $a = 1,5$  și  $b = 8$ .

*Consecință:* Dacă  $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $a + b\sqrt{x} = a' + b'\sqrt{x}$ , atunci  $a = a'$  și  $b = b'$ .

*Demonstrație:*  $a + b\sqrt{x} = a' + b'\sqrt{x} \Rightarrow (a - a') + (b - b')\sqrt{x} = 0 \Rightarrow a - a' = 0$  și  $b - b' = 0$ , deci  $a = a'$  și  $b = b'$ .

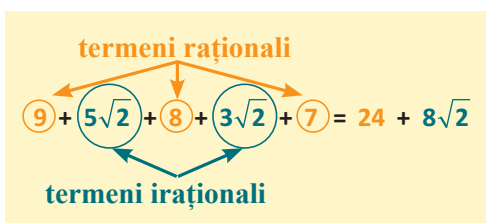
Dacă  $a, b \in \mathbb{Q}$  și  
 $17 - b\sqrt{3} = a + 4\sqrt{3}$ ,  
 atunci  $a = 17$  și  $b = -4$ .

### Tehnici de calcul în mulțimea numerelor reale

**Adunarea și scăderea numerelor de forma  $a + b\sqrt{x}$ , cu  $x > 0$ .**

Adunarea numerelor reale este asociativă și comutativă. Aceste proprietăți ne permit schimbarea ordinii termenilor și gruparea lor în mod convenabil.

**Scăderea** a două numere este interpretată ca adunarea dintre primul număr și opusul celui de-al doilea. Astfel, gruparea termenilor în mod convenabil poate fi făcută și în cazul scăderilor. (Trebuie doar să fim atenți la semnul fiecărui termen.)



### Adunarea și scăderea termenilor asemenea:

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x} \quad \text{și} \quad a\sqrt{x} - b\sqrt{x} = (a-b)\sqrt{x}, \quad x > 0.$$

Doi termeni care sunt numere raționale sunt termeni asemenea.

Doi termeni care pot fi scriși sub forma  $a\sqrt{x}$  și  $b\sqrt{x}$ ,

$a, b \in \mathbb{Q}$  și  $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , sunt termeni asemenea.

$$7\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 15\sqrt{3} \quad \text{și} \quad 7\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

29 și 11 sunt termeni asemenea

$5\sqrt{2}$  și  $3\sqrt{2}$  sunt termeni asemenea

29 și  $5\sqrt{2}$  nu sunt termeni asemenea

$\sqrt{7}$  și  $\sqrt{5}$  nu sunt termeni asemenea

Pentru termenii care nu sunt asemenea, se poate doar aproxima rezultatul adunării și rezultatul scăderii.

$\sqrt{3} + \sqrt{7}$  nu se poate restrânge la o expresie de forma  $a\sqrt{x}$ , dar se poate aproxima

$$\sqrt{3} + \sqrt{7} \approx 1,73 + 2,64 = 4,37.$$

### Înmulțirea și împărțirea numerelor de forma $a\sqrt{x}$

Dacă  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $x \geq 0$  și  $y > 0$ , atunci:

$$a\sqrt{x} \cdot b\sqrt{y} = ab\sqrt{xy} \quad \text{și} \quad \frac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{y}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{y}};$$

Exemple:

$$6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{10}; \quad \frac{6\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \frac{6}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} = 2\sqrt{2,5}$$

factori raționali

$$(4)(5)(6)(\sqrt{3}) = 24\sqrt{15}$$

factori iraționali

### Reținem!



• Opusul numărului real  $x$  este  $-x$ .

• Inversul numărului real nenul  $x$  este  $\frac{1}{x}$ .

• Pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x - y = x + (-y)$ .

• Metoda factorului comun (consecință a distributivității înmulțirii față de adunare):

• Semnul minus în fața unei paranteze schimbă semnele fiecărui termen din paranteză (echivalează cu înmulțirea numărului  $-1$  cu suma scrisă în paranteză, folosind distributivitatea).

• Produsul a două numere reale cu *același semn* este un număr pozitiv.

• Produsul a două numere reale cu *semne contrare* este un număr negativ.

• Dacă  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  și  $x \geq 0$ , atunci

$$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x} \quad \text{și}$$

$$a\sqrt{x} - b\sqrt{x} = (a-b)\sqrt{x}$$

$$x + (-x) = (-x) + x = 0, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

$$x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}^*.$$

$$\text{Pentru orice } x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0, x : y = x \cdot \frac{1}{y}$$

$$ab + ac = a(b+c) \quad \text{și} \quad ab - ac = a(b-c),$$

oricare ar fi  $a, b, c, \in \mathbb{R}$

$$-(a-b+c) = -a+b-c,$$

oricare ar fi  $a, b, c, \in \mathbb{R}$

Dacă  $x, y, \in \mathbb{R}^*$ , atunci

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y \quad \text{și} \quad x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -x \cdot y$$

$$-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} \quad \text{și} \quad \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}.$$

Dacă  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$  și  $x \geq 0$  și  $y > 0$ , atunci

$$a\sqrt{x} \cdot b\sqrt{y} = ab\sqrt{xy} \quad \text{și} \quad \frac{a\sqrt{x}}{b\sqrt{y}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{y}}.$$



**1** Efectuați calculele:

a)  $-1,2 + 3,6$ ; c)  $-\frac{1}{4} + 2\frac{1}{8}$ ;

b)  $-4,3 - (-2,95)$ ; d)  $-\frac{7}{3} - (-2, (3))$ .

**2** Efectuați calculele:

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ ; g)  $\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$ ;

b)  $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ ; h)  $4\sqrt{10} - 3\sqrt{10} - 3\sqrt{10}$ ;

c)  $\sqrt{3} + (-\sqrt{3})$ ; i)  $4\sqrt{2} + (-3\sqrt{2}) + (-5\sqrt{2})$ ;

d)  $\sqrt{5} - \sqrt{5}$ ; j)  $2\sqrt{3} - (-3\sqrt{3}) - (-4\sqrt{3})$ ;

e)  $7\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$ ; k)  $8\sqrt{5} - \sqrt{5} - \sqrt{5}$ .

f)  $\sqrt{6} - 3\sqrt{6}$ ;

**3** Efectuați calculele, apoi aproximați rezultatul cu două zecimale exacte:

a)  $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ ;

b)  $9\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \sqrt{3} - 7\sqrt{3}$ ;

c)  $4\sqrt{5} + (6\sqrt{5} - 11\sqrt{5})$ ;

d)  $-10\sqrt{7} - (19\sqrt{7} - 6\sqrt{7} - 22\sqrt{7})$ .

**4** Calculați  $x + y$  și  $x - y$ , pentru fiecare din situațiile:

a)  $x = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ ,  $y = 8\sqrt{2} - 5\sqrt{5}$ ;

b)  $x = 7\sqrt{3} - 8\sqrt{6}$ ,  $y = 3\sqrt{3} + 7\sqrt{6}$ ;

c)  $x = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 5\sqrt{5}$ ,  $y = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ .

**5** Stabiliți dacă rezultatul sumei  $x + y + z$  este un număr rațional:

a)  $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,  $y = -2\sqrt{3} + 8\sqrt{2}$ ,

$z = -9\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ;

b)  $x = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 5\sqrt{5}$ ,  $y = 6\sqrt{3} - 7\sqrt{5} - 8\sqrt{2}$ ,

$z = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$ .

**6** Efectuați calculele:

a)  $1 + (2 + \sqrt{3})$ ; c)  $7 + (\sqrt{5} - 7)$ ;

b)  $4 - (3 + \sqrt{2})$ ; d)  $3^2 - (\sqrt{11} + 9)$ ;

e)  $1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + (-3\sqrt{2}) + (-4\sqrt{3})$ ;

f)  $(3\sqrt{5} - 5) + 7 + (-2\sqrt{5} - 6) + \sqrt{5} + 4$ .

**7** Știind că  $x = 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ ,

$y = 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 6$ ,  $z = 2\sqrt{3} - 6\sqrt{2} - 21$ , arătați că suma  $x + y + z$  este un număr întreg.

**8** Calculați lungimea segmentului  $AB$ , știind

că abscisele punctelor sunt  $x_A = -\sqrt{2} + 1$  și  $x_B = \sqrt{2} + 1$ .

Reprezentați segmentul pe axa numerelor.

**9** Scoateți factorii de sub radicali, apoi efectuați calculele:

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ ;

b)  $\sqrt{3} + \sqrt{12}$ ;

c)  $\sqrt{5} - \sqrt{20}$ ;

d)  $3\sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$ ;

e)  $7\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$ ;

f)  $\sqrt{28} + \sqrt{63} - \sqrt{175}$ .

**10** Calculați  $x + y$  și  $x - y$ , pentru numerele:

a)  $x = \sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{27}$  și

$y = \sqrt{48} + \sqrt{98} - \sqrt{200}$ ;

b)  $x = \sqrt{49} - 3\sqrt{20} + \sqrt{28}$  și

$y = \sqrt{180} - \sqrt{112} + \sqrt{64}$ .

**11** a) Calculați lungimile segmentelor  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  știind că sunt situate pe axa numerelor și au coordonatele:

$A(\sqrt{2})$ ,  $B(\sqrt{3})$ ,  $C(\sqrt{8})$ ,  $D(2\sqrt{3})$ ;

b) Completați unul din simbolurile  $<$ ,  $=$ ,  $>$ , astfel încât relația obținută să fie adevărată:

$AB + BC + CD \dots 2$ .

**12** Efectuați înmulțirile:

a)  $5 \cdot 0,44$ ; d)  $\frac{5}{3} \cdot (-6\sqrt{2})$ ;

b)  $-\frac{7}{3} \cdot \left(-1\frac{2}{7}\right)$ ; e)  $\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot \left(-\frac{27}{2}\right)$ ;

c)  $-9 \cdot 1, (3)$ ; f)  $(4^2 - 16) \cdot 3\sqrt{3}$ .

**13** Efectuați înmulțirile:

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ ; d)  $-\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}$ ;

b)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$ ; e)  $(-\sqrt{13}) \cdot (-\sqrt{2})$ ;

c)  $\sqrt{5} \cdot (-\sqrt{7})$ ; f)  $-\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{5})$ .

**14** Efectuați înmulțirile și stabiliți dacă produsul este un număr rațional sau un număr irațional:

- a)  $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ ; g)  $\frac{1}{2}\sqrt{7} \cdot \left(-\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$ ;  
 b)  $(-3\sqrt{3}) \cdot (5\sqrt{5})$ ; h)  $-\frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot (-6\sqrt{2})$ ;  
 c)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ ; i)  $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}$ ;  
 d)  $6\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{3})$ ; j)  $\frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{5}{3\sqrt{2}}$ ;  
 e)  $(-7\sqrt{2}) \cdot (-2\sqrt{5})$ ; k)  $\frac{\sqrt{3}}{10} \cdot \left(-\frac{20}{2\sqrt{3}}\right)$ ;  
 f)  $(0,3\sqrt{3}) \cdot (10\sqrt{10})$ ; l)  $\frac{\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}}$ .

**15** Calculați produsul  $x \cdot y$  pentru:

- a)  $x = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$  și  $y = 16\sqrt{3} - 11\sqrt{3}$ ;  
 b)  $x = -8\sqrt{2} + \sqrt{50}$  și  $y = \sqrt{32} + \sqrt{8}$ ;  
 c)  $x = \sqrt{63} - 3\sqrt{28}$  și  $y = \sqrt{20} - 2\sqrt{45}$ .

**16** Demonstrați că numărul

$A = 1, (2) \cdot \sqrt{24} \cdot (-1, 2 \cdot \sqrt{12}) \cdot \left(-\frac{10}{11} \cdot \sqrt{8}\right)$  este cubul unui număr rațional.

**17** Arătați că  $B = \sqrt{2^{50} + 2^{50}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{512^3}$  este număr natural.

**18** Calculați, folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere:

- a)  $2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})$ ; c)  $\sqrt{2} \cdot (5 + \sqrt{2})$ ;  
 b)  $3 \cdot (2\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ; d)  $\frac{8\sqrt{5}}{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{9\sqrt{2}}{4}\right)$ ;

**25** Efectuați calculele:

- a)  $(20\sqrt{2} - 30\sqrt{3}) : 10$ ; b)  $(14\sqrt{2} + 21\sqrt{8}) : (-7\sqrt{2})$ ; c)  $(\sqrt{2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^5} + \sqrt{2^7} + \sqrt{2^9}) : \sqrt{2}$ ;  
 d)  $(\sqrt{3} - \sqrt{3^3} + \sqrt{3^5} - \sqrt{3^7}) : (-\sqrt{3})$ ; e)  $\sqrt{6^{10} + 6^{10} + 6^{11}} : \sqrt{3^{10} + 3^{10} + 3^{11} + 3^{11}}$ .

**26** a) Urmăriți modelul următor și identificați proprietățile operațiilor de adunare și de înmulțire folosite:  
 $(5 + 2\sqrt{3})(4 + 7\sqrt{2}) = (5 + 2\sqrt{3}) \cdot 4 + (5 + 2\sqrt{3}) \cdot (7\sqrt{2}) = 5 \cdot 4 + (2\sqrt{3}) \cdot 4 + 5 \cdot (7\sqrt{2}) + (2\sqrt{3}) \cdot (7\sqrt{2}) =$   
 $= 20 + 8\sqrt{3} + 35\sqrt{2} + 14\sqrt{6}$ .

- b) Folosind distributivitatea înmulțirii față de adunare și față de scădere, urmând modelul de la subpunctul anterior, calculați produsul  $x \cdot y$ , pentru  $x = 5 + 2\sqrt{6}$  și  $y = 5 - 2\sqrt{6}$ .  
 c) Folosind rezultatul obținut la subpunctul b), scrieți inversul numărului  $x$  și inversul numărului  $y$ .

e)  $\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5}) + \sqrt{3}(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ ;

f)  $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} - 1)$ ; g)  $2\sqrt{3} \cdot (3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})$ ;

h)  $-5\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{8})$ .

**19** Efectuați calculele:

- a)  $6, (3) : (-38)$ ; c)  $4\sqrt{2} : 2$ ;  
 b)  $-1\frac{3}{4} : \left(-4\frac{2}{3}\right)$ ; d)  $20\sqrt{3} : (-4)$ ;  
 e)  $-0,5\sqrt{5} : 5$ .

**20** Efectuați calculele:

- a)  $\sqrt{50} : \sqrt{5}$ ; d)  $4\sqrt{21} : \sqrt{7}$ ;  
 b)  $\sqrt{15} : (-\sqrt{3})$ ; e)  $(-9\sqrt{14}) : \sqrt{2}$ ;  
 c)  $-\sqrt{35} : (-\sqrt{7})$ ; f)  $(16\sqrt{42}) : (-8\sqrt{7})$ .

**21** Calculați aria unui pătrat al cărui perimetru este  $\sqrt{512}$  cm.

**22** Determinați numerele naturale de două cifre,  $\overline{ab}$ , cu proprietatea  $\sqrt{a} = \frac{b}{4}$ .

**23** Calculați  $x : y$ , știind că:

- a)  $x = 7\sqrt{10} - 25\sqrt{10}$  și  $y = 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2}$ ;  
 b)  $x = 4\sqrt{60} - \sqrt{135}$  și  $y = -\sqrt{375}$ ;  
 c)  $x = \sqrt{24} - \frac{\sqrt{54}}{2} + \frac{\sqrt{150}}{4}$  și  $y = -\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{16}}$ .

**24** Comparați numerele:

- $a = (\sqrt{32} + \sqrt{128} + \sqrt{288}) : 4$  și  
 $b = \sqrt{32} : 4 + \sqrt{128} : 4 + \sqrt{288} : 4$ .





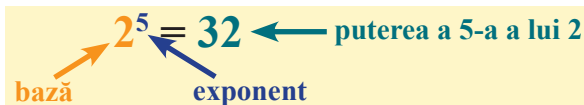
## L2 Ridicarea la putere a numerelor reale

Pentru orice număr rațional nenul, s-a definit puterea cu exponent întreg și s-au precizat, iar apoi s-au aplicat, proprietățile acestora (regulile de calcul cu puteri). Pentru numărul 0, s-au definit puteri cu exponent natural, nenul. Observăm că operația de înmulțire a numerelor reale are aceleași proprietăți ca și operația de înmulțire a numerelor raționale.

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Definiție:** Pentru  $n \in \mathbb{N}$  și  $a \in \mathbb{R}^*$ , se numește **puterea** a  $n$ -a a numărului  $a$ , numărul real  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ . Numărul  $a$  se numește **baza puterii**, iar numărul  $n$  este **exponentul puterii**.

Dacă  $a = 0$ , atunci  $0^n = 0$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Scrierea  $0^0$  nu are sens.



Dacă  $a \in \mathbb{R}^*$ , atunci  $\frac{1}{a} \stackrel{\text{not}}{=} a^{-1}$  și obținem  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

Regulile de calcul cu puteri, cu exponent întreg, învățate la numere raționale, se păstrează și pe mulțimea numerelor reale.

$$\begin{aligned} x^1 &= x \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} & \sqrt{7}^1 &= \sqrt{7}; (-\sqrt{2})^1 = -\sqrt{2}; (4 - \sqrt{5})^1 = 4 - \sqrt{5} \\ x^0 &= 1 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}^* & \sqrt{17}^0 &= 1; (3 - 2\sqrt{5})^0 = 1; (-\sqrt{2} - \sqrt{3})^0 = 1 \\ 0^n &= 0 \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^* & 0^2 &= 0; 0^{2019} = 0 \end{aligned}$$

Pentru  $a, b \in \mathbb{R}^*$  și  $n, p \in \mathbb{Z}$ , au loc:  $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$      $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$      $a^n : a^p = a^{n-p}$  sau  $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad a^n : b^n = (a : b)^n \text{ sau } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Modul de aplicare a acestor reguli, în situația în care  $a, b \in \mathbb{R}^*$ , va fi prezentat parțial în această lecție, urmând să fie completat în anii următori.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Se consideră  $x \in \mathbb{R}$  și  $n \in \mathbb{N}$ , iar  $x$  și  $n$  nu sunt simultan nule.

$$\sqrt{x}^2 = x, \text{ oricare ar fi } x \geq 0$$

$$(\sqrt{17})^2 = 17, (\sqrt{2+8\sqrt{3}})^2 = 2+8\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{x})^n = \sqrt{x^n}, \text{ oricare ar fi } x \geq 0$$

$$(\sqrt{3})^{11} = \sqrt{3^{11}}; \sqrt{7^2} = (\sqrt{7})^2 = 7$$

$$\sqrt{x^n} = \sqrt{x \cdot x \cdot \dots \cdot x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \dots \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^n$$

$$(\sqrt{3-\sqrt{5}})^2 = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = |3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$$

Dacă  $n = 2k$  (număr par), atunci

$$(\sqrt{x})^n = (\sqrt{x})^{2k} = \sqrt{x^{2k}} = x^k, \text{ oricare ar fi } x \geq 0$$

$$(\sqrt{3})^8 = 3^4; (\sqrt{0,2})^6 = 0,2^3$$

Dacă  $n = 2k + 1$  (număr impar), atunci

$$(\sqrt{x})^n = (\sqrt{x})^{2k+1} = \sqrt{x^{2k+1}} = x^k \sqrt{x}, \text{ oricare ar fi } x \geq 0$$

$$(\sqrt{5})^9 = (\sqrt{5})^8 \cdot \sqrt{5} = 5^4 \sqrt{5} = 625\sqrt{5}$$

$$(a\sqrt{x})^n = a^n (\sqrt{x})^n, \text{ oricare ar fi } x \geq 0 \text{ și } a \in \mathbb{R}$$

Dacă  $n = 2k$  (număr par), atunci  $(-x)^n = x^n$  oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}^*$

Dacă  $n = 2k + 1$  (număr impar), atunci  $(-x)^n = -x^n$  oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}^*$

Se consideră  
 $x \in \mathbb{R}$  și  $n \in \mathbb{N}$ .

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$(\sqrt{5})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad (-8)^{-1} = \frac{1}{-8}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(5\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{(5\sqrt{3})^2} = \frac{1}{75}$$

$$(3\sqrt{2})^4 = 3^4 \sqrt{2}^4 = 3^4 \cdot 2^2 = 81 \cdot 4 = 324;$$

$$(2\sqrt{5})^5 = 2^5 \sqrt{5}^5 = 32 \cdot 5^2 \sqrt{5} = 800\sqrt{5}.$$

$$(-\sqrt{3})^{28} = \sqrt{3}^{28}$$

$$(-\sqrt{6})^{75} = -\sqrt{6}^{75}$$

### Reținem!

$$(\sqrt{x})^2 = x, \text{ oricare ar fi } x \geq 0.$$

$$(\sqrt{x})^n = \sqrt{x^n}, \text{ oricare ar fi } x \geq 0.$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \text{ oricare ar fi } x, \text{ număr real nenul.}$$

Dacă  $n = 2k$  (număr par), atunci  $(-x)^n = x^n$  oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}^*$ .

Dacă  $n = 2k + 1$  (număr impar), atunci  $(-x)^n = -x^n$  oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}^*$ .



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1** Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:
- Dacă  $x \in \mathbb{Q}$  și  $n \in \mathbb{N}$ , atunci  $x^n \in \dots$ ;
  - Dacă  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $n \in \mathbb{N}$ , atunci  $x^n \in \dots$  sau  $x^n \in \dots$ ;
  - Dacă  $x = a\sqrt{b}$ ,  $b \geq 0$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $x^n = \dots$ ;
  - Dacă  $a \geq 0$  și  $x = \sqrt{a}$ , atunci  $x^2 = \dots$ ;
  - Pentru fiecare din propozițiile a) – d), probați corectitudinea răspunsului dat, prin câte un exemplu.

**2** Calculați:

- $13^2$ ;
- $(-2)^4$ ;
- $\left(\frac{7}{3}\right)^2$ ;
- $(-2)^3$ ;
- $(-4,63)^1$ ;
- $\left[1 + \frac{7}{2} + 5, (7)\right]^0$ .

**3** Calculați:

- $(\sqrt{7})^2$ ;
- $(-\sqrt{5})^2$ ;
- $(\sqrt{2})^3$ ;
- $(\sqrt{3})^5$ ;
- $(2\sqrt{3})^2$ ;
- $(-3\sqrt{5})^3$ ;
- $-\sqrt{4^2}$ ;
- $(-\sqrt{6})^6$ ;
- $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)^2$ .

**4** Calculați  $x^2$ , pentru:

- $x = \sqrt{2} + \sqrt{8}$ ;
- $x = 2\sqrt{500} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{1500}$ ;
- $x = 4\sqrt{20} - 3\sqrt{45}$ .

**5** Determinați numerele naturale  $a, b, c$ , știind că are loc egalitatea:

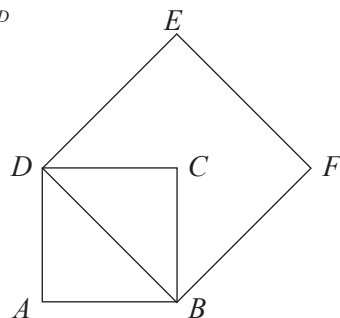
$$\sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^9} + \sqrt{2^{10}} = a \cdot (b + \sqrt{c}).$$

**6** În desenul de mai jos, sunt reprezentate pătratele  $ABCD$  și  $BDEF$ , iar  $AB = 2\sqrt{3}$ .

a) Demonstrați, prin calcul, că

$$\mathcal{A}_{BDEF} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$$

b) Refăceți calculele pentru  $AB = a$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$  și demonstrați că egalitatea are loc pentru orice  $a$ , număr real pozitiv.



### L3 Răționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$

În aplicații, este necesar ca unele fracții de forma  $\frac{x}{a\sqrt{b}}$ , unde  $x$  este număr real nenul,  $a$  și  $b$  sunt numere naturale nenule și  $b$  nu se divide la niciun pătrat perfect diferit de 1, să fie înlocuite cu alte fracții, echivalente cu acestea, dar care au **numitorul număr rațional**. De asemenea, rezultatele, numere iraționale ale unor calcule, se exprimă, de regulă, **prin fracții cu numitorul rațional**.

#### Ne amintim

- 1) Se pot obține fracții echivalente cu o fracție dată prin amplificarea sau prin simplificarea acesteia cu un număr nenul.
- 2)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ , pentru orice  $x \geq 0$ .  $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$ ;  $(2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot 2 = 4$ .
- 3)  $\sqrt{x} : \sqrt{x} = 1$ , pentru orice  $x > 0$ .  $\sqrt{7} : \sqrt{7} = 1$ ;  $2 \cdot \sqrt{2} : \sqrt{2} = 2 \cdot (\sqrt{2} : \sqrt{2}) = 2$ .

Prin *scoaterea factorilor de sub radical*, numărul  $\sqrt[n]{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , va fi scris sub forma  $a\sqrt{b}$ , unde  $b$  este un număr **liber de pătrate**, adică  $b$  este un număr natural care nu se divide la niciun pătrat perfect diferit de 1.

#### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Dacă numitorul este de forma  $a\sqrt{b}$ , cu  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , amplificând fracția cu  $\sqrt{b}$ , numitorul devine număr natural, deci rațional.

$$\frac{\sqrt{b})1}{a\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{ab}, a, b \in \mathbb{N}^*$$

**Observație:** În relația de mai sus, de regulă, se dorește ca  $b$  să fie liber de pătrate (adică nu se mai pot scoate factori naturali de sub radical). Această condiție nu este, însă, obligatorie; se folosește doar pentru simplificarea calculelor și pentru frumusețea rezultatelor.

Transformarea unei fracții într-o *fracție echivalentă* cu aceasta, dar care are numitorul un număr rațional, se numește **operația de răționalizare** a numitorului.

$$\frac{\sqrt{30})1}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{30}, \quad \frac{\sqrt{2})1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

*Răționalizarea numitorilor fracțiilor* este o operație utilă în efectuarea unor operații, care ne ajută să comparăm și să ordonăm numerele reale reprezentate prin fracții cu numitorii iraționali.

#### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Dacă  $b$  este număr liber de pătrate, pentru răționalizarea numitorului fracției  $\frac{c}{a\sqrt{b}}$ , se amplifică fracția cu  $\sqrt{b}$ .

$$\frac{\sqrt{3})2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad \frac{\sqrt{7})7}{5\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{5 \cdot 7} = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

Dacă  $b$  nu este număr liber de pătrate, pentru răționalizarea numitorilor, parcurgem următorii pași:

**Pasul I** – scoatem factorii de sub radical și scriem numitorul în forma  $a'\sqrt{b'}$ , cu  $b'$  liber de pătrate;

**Pasul II** – amplificăm fracția cu  $\sqrt{b'}$ .

$$\frac{1}{5\sqrt{18}} = \frac{1}{5 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{15\sqrt{2}};$$

$$\frac{\sqrt{2})1}{15\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{15 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{30}, \text{ deci } \frac{1}{5\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{30}.$$

Pentru efectuarea unei adunări sau a unei scăderi, de multe ori, este indicată răționalizarea numitorilor fracțiilor înaintea aducerii la același numitor.

$$\frac{\sqrt{3})1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5})2}{3\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

Pentru efectuarea unei înmulțiri sau împărțiri, de regulă, este indicată raționalizarea numitorilor după efectuarea operațiilor (unii numitori pot deveni numere raționale).

$$\frac{2}{5\sqrt{15}} \cdot \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{14}{5\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{10})14}{5 \cdot 3\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{150} = \frac{7\sqrt{10}}{75}$$

$$\frac{16}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{7\sqrt{5}}{12} = \frac{16 \cdot 7^{(4)}}{3 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{28}{9}$$

### Reținem!

Transformarea unei fracții date, având numitorul irațional, într-o fracție echivalentă cu aceasta, dar care are numitorul un număr rațional, se numește **operația de raționalizare** a numitorului.

$$\frac{\sqrt{b})1}{a\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{ab}, a, b \in \mathbb{N}^*$$



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1** Amplificați fracțiile astfel încât numitorii obținuți să fie numere raționale.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-5}{\sqrt{5}}, \frac{9}{\sqrt{6}}, \frac{10}{\sqrt{10}}, \frac{-24}{\sqrt{30}}$$

- 2** Scoateți factorii de sub radicali, simplificați fracțiile, dacă este posibil, apoi raționalizați numitorii.

$$\frac{3}{\sqrt{8}}, \frac{6}{\sqrt{12}}, -\frac{8}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{24}}, \frac{16}{\sqrt{32}}, \frac{4}{\sqrt{28}}, \frac{2a}{\sqrt{a^2 \cdot b}},$$

unde  $a > 0$  și  $b > 0$ .

- 3** Raționalizați numitorii fracțiilor:

$$\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}, -\frac{7\sqrt{15}}{\sqrt{20}}, \frac{8\sqrt{15}}{\sqrt{20}}, \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{125}}, \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{63}}, \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}$$

- 4** Scrieți următoarele numere reale sub formă de fracții cu numitorii reprezentați prin numere raționale:

$$\sqrt{3\frac{1}{5}}, \sqrt{0,8(3)}, \sqrt{10\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{81}{24}}, \sqrt{\frac{27}{2}}, \sqrt{\sqrt{\frac{400}{121}}}, \sqrt{\frac{a^2b}{b^3c}},$$

unde  $b \neq 0$  și  $c > 0$ .

- 5** Raționalizați numitorii, apoi comparați numerele  $x$  și  $y$ :

a)  $x = \frac{4}{\sqrt{2}}$  și  $y = \sqrt{10}$ ;

b)  $x = -\frac{12}{\sqrt{3}}$  și  $y = -\frac{10}{\sqrt{2}}$ ;

c)  $x = \frac{7}{\sqrt{7}} + \sqrt{28}$  și  $y = \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ .

- 6** Efectuați calculele și scrieți rezultatul sub formă de fracție cu numitorul rațional:

a)  $\frac{7}{2\sqrt{6}} - \frac{4}{3\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}}$ ;

b)  $\frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{8}} - \left( -\frac{3}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ;

c)  $\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3\sqrt{5}} + \frac{3}{5\sqrt{5}}$ ;

d)  $\frac{3\sqrt{5}}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{2\sqrt{5}}$ .

- 7** Efectuați calculele:

a)  $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8}} + \frac{3}{\sqrt{18}}$ ;

b)  $\frac{6}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{27}}$ ;

c)  $\left( \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{45}} - \frac{1}{\sqrt{125}} \right) \cdot \left( 2 - \frac{1}{38} \right)$ ;

d)  $\left( \sqrt{54} - \frac{6}{\sqrt{6}} \right) \cdot \left( \frac{48}{\sqrt{6}} - \frac{15}{\sqrt{24}} \right)$ .

- 8** Efectuați calculele și demonstrați că numărul

$$A = \left( \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{3}{\sqrt{48}} - \frac{5}{\sqrt{108}} \right) \cdot \frac{\sqrt{27}}{10}$$

este rațional.

- 9** Determinați numerele naturale nenule  $a$  și  $b$

pentru care  $\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{a}}{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .

## L4 Ordinea efectuării operațiilor

Folosirea corectă a proprietăților operațiilor care intervin în calcule ne oferă posibilitatea utilizării unui algoritm care se referă la ordinea efectuării acestor operații. Corectitudinea rezultatului oricărui calcul cu numere reale (așa cum știm și de la celelalte mulțimi de numere) depinde fundamental de respectarea cu strictețe a acestui algoritm.

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**A.** Dacă exercițiul nu conține paranteze, atunci:

- 1) se efectuează ridicările la putere și extragerea rădăcinii pătrate, dacă este posibil;
- 2) se efectuează înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care apar;
- 3) se efectuează adunările și scăderile, în ordinea în care apar.

**Observații:** a) Operațiile cu puteri, scoaterea factorilor de sub radical și introducerea factorilor sub radical se pot efectua în etapa pregătitoare, înainte de pasul 1) sau pe parcursul rezolvării, atunci când dorim să optimizăm modul de calcul, scrierea unor numere într-o anumită formă ducând la simplificarea calculelor.

b) Raționalizarea numitorilor unor fracții se efectuează în orice etapă a rezolvării, dacă este necesară.

În cazul în care raționalizarea nu creează o situație avantajoasă, va fi folosită doar în final, pentru eleganța prezentării rezultatului.

**B.** Dacă exercițiul conține și paranteze, atunci:

- 1) se efectuează calculele din parantezele rotunde, respectând ordinea descrisă la A;
- 2) se transformă parantezele pătrate în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate;
- 3) se efectuează calculele din noile paranteze rotunde, respectând ordinea descrisă la A.

Se continuă, în acest mod, până se elimină toate parantezele, apoi se efectuează calculele fără paranteze.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

**Exemplul 1.** Calculați:  $4 \cdot (-0,5)^3 + \sqrt{22^2} : 11 - 9 : (-\sqrt{6})^4$

*Pasul 1:*  $4 \cdot (-0,5)^3 + \sqrt{22^2} : 11 - 9 : (-\sqrt{6})^4 =$  Se efectuează ridicările la putere:  $(-0,5)^3 = -0,125$ ;  
 $= 4 \cdot (-0,125) + 22 : 11 - 9 : 36 =$   $\sqrt{22^2} = 22$  și  $(-\sqrt{6})^4 = 36$

*Pasul 2:*  $= 4 \cdot (-0,125) + 22 : 11 - 9 : 36 =$  Se efectuează înmulțirile și împărțirile, în ordinea în  
 $= -0,5 + 2 - 0,25 =$  care apar:  
 $4 \cdot (-0,125) = -0,5$ ;  $22 : 11 = 2$  și  $9 : 36 = 0,25$

*Pasul 3:*  $= 1,5 - 0,25 = 1,25$  Se efectuează adunările și scăderile, în ordinea în  
 care apar.

**Exemplul 2.** Calculați valoarea expresiei:

$$E = 5\sqrt{12} + 42 : \sqrt{196} - 2\sqrt{15} : \sqrt{20} + \sqrt{25}$$

1) Extragem rădăcina pătrată din pătratele perfecte:  
 $\sqrt{196} = 14$  și  $\sqrt{25} = 5$ .

Scoatem factorul de sub radical:  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

Introducem factorul sub radical:  $2\sqrt{15} = \sqrt{60}$ .

$$E = 5 \cdot 2\sqrt{3} + 42 : 14 - \sqrt{60} : \sqrt{20} + 5$$

2) Efectuăm înmulțirile și împărțirile:

$$5 \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}; 42 : 14 = 3; \sqrt{60} : \sqrt{20} = \sqrt{3}$$

$$E = 10\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + 5$$

3) Efectuăm adunările și scăderile, grupând termenii raționali și termenii iraționali.

$$E = 8 + 9\sqrt{3}$$

Am obținut rezultatul final.

**Exemplul 3:** Calculați expresia  $E = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5^3} - \sqrt{17^8} : \sqrt{17^6} - (\sqrt{3^{12}})^4 : 3^{23}$

- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5^3} = \sqrt{5^4}$ ;  $\sqrt{17^8} : \sqrt{17^6} = \sqrt{17^2}$  și  $(\sqrt{3^{12}})^4 = \sqrt{3^{48}} \Rightarrow E = \sqrt{5^4} - \sqrt{17^2} - \sqrt{3^{48}} : 3^{23}$ .
- $\sqrt{5^4} = 25$ ;  $\sqrt{17^2} = 17$ ;  $\sqrt{3^{48}} = 3^{24} \Rightarrow E = 5^2 - 17 - 3^{24} : 3^{23}$ .
- $3^{24} : 3^{23} = 3 \Rightarrow E = 25 - 17 - 3 = 5$ .

Acest exemplu ne oferă posibilitatea de a observa justetea faptului că operațiile cu puteri se pot efectua atât la început, cât și pe parcursul rezolvării.

**Exemplul 4:**

$$a) \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{19}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5})-9}{\sqrt{5}} = \frac{-9\sqrt{5}}{5};$$

$$b) \frac{6)5}{\sqrt{3}} - \frac{3)7}{2\sqrt{3}} + \frac{2)1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3})11}{6\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{18}$$

$$c) \frac{\sqrt{3})4}{\sqrt{3}} - \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{2)4\sqrt{3}}{3} - \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$d) \frac{\sqrt{2})10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6})12}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{2} + \frac{12\sqrt{6}}{6} = 5\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$$

**Observații:**

a) Operațiile cu puteri, scoaterea factorilor de sub radical și introducerea factorilor sub radical se pot efectua în etapa pregătitoare, sau pe parcursul rezolvării, atunci când scrierea unor numere, într-o anumită formă, duce la simplificarea calculelor.

b) Raționalizarea numitorilor unor fracții se efectuează în orice etapă a rezolvării, dacă este necesară. Se recomandă ca rezultatul final să fie prezentat sub formă de fracție cu numitorul rațional, iar factorul rațional se recomandă să fie în formă ireductibilă.

### Reținem!



**A.** Dacă exercițiul **nu conține paranteze**, atunci:

- 1) se efectuează ridicările la putere și extragerea rădăcinii pătrate, dacă este posibil.
- 2) se efectuează înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care apar.
- 3) se efectuează adunările și scăderile, în ordinea în care apar.

**B.** Dacă exercițiul **conține și paranteze**, atunci:

- 1) se efectuează calculele din parantezele rotunde, respectând ordinea descrisă la A.
- 2) se transformă parantezele pătrate în paranteze rotunde, acoladele se transformă în paranteze pătrate.
- 3) se continuă algoritmul până la obținerea rezultatului final.





**1** Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

- a)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{15}$ ;  
 b)  $\sqrt{26} : \sqrt{13} - 2\sqrt{10} : \sqrt{5}$ ;  
 c)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} : \sqrt{10}$ ;  
 d)  $3 \cdot (2 - \sqrt{7}) + 2(\sqrt{7} - 3)$ ;  
 e)  $2\sqrt{3} + (3\sqrt{6}) \cdot (2\sqrt{2})$ ;  
 f)  $(2\sqrt{2})^3 + 40\sqrt{6} : (-2\sqrt{3})$ .

**2** Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

- a)  $\sqrt{6^2 \cdot 8^2} - \sqrt{6^2 + 8^2}$   
 b)  $\sqrt{0,4} - \sqrt{1,6} + \sqrt{0,9}$   
 c)  $\sqrt{0,04} - \sqrt{1,69} + \sqrt{0,25}$   
 d)  $\sqrt{0,(2)} - \sqrt{0,(8)} + \sqrt{3,(5)}$   
 e)  $(\sqrt{(-2)^{38}} + \sqrt{2^{38}}) : 16^{\sqrt{25}}$   
 f)  $\sqrt{2^{2048}} - 2^{2^{10}} + \left(\sqrt{2\frac{7}{9}} - \frac{7}{9}\right) : \sqrt{2 \cdot \frac{8}{9}}$   
 g)  $2\sqrt{15} + 2\sqrt{5} \cdot [9\sqrt{2} - 3(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})]$   
 h)  $\frac{\sqrt{(39 \cdot 46 + 41 \cdot 43)^2} + \sqrt{(39 \cdot 46 - 41 \cdot 43)^2}}{13 \cdot 23}$

**3** Efectuați calculele, respectând ordinea efectuării operațiilor:

- a)  $2\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{12}) - \sqrt{96}$ ;  
 b)  $2\sqrt{8} \cdot (\sqrt{200} - \sqrt{648} + \sqrt{162})$ ;  
 c)  $3\sqrt{20} + 2\sqrt{5} \cdot (1 - \sqrt{2}) - 8\sqrt{5} + 3\sqrt{10}$ ;  
 d)  $\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} - \sqrt{56} : \sqrt{7}$ ;  
 e)  $0,5\sqrt{24} - \sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} + 2) + \sqrt{54} : (3\sqrt{2})$ ;  
 f)  $(-\sqrt{40} - \sqrt{90} + 2\sqrt{250})^3 : (-\sqrt{3125})$ ;

g)  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}} : \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{0,1(6)} : (2\sqrt{2})$ ;

h)  $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{18}} - \frac{3+2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\right) : \left(2 - \frac{6-\sqrt{32}}{3}\right)$ .

**4** Efectuați calculele și stabiliți dacă numărul  $a$  este pozitiv, negativ sau nul, unde

$$a = \sqrt{63} \cdot [5\sqrt{27} - 3 \cdot (5\sqrt{3} + \sqrt{28})] + 11^2.$$

**5** Pentru  $b = 8\sqrt{6} : (2\sqrt{3}) - 2 \cdot (1 + \sqrt{8})$ , calculați  $1 + b^{-1} + b^{-2}$ .

**6** Se consideră numerele:

$$c = (\sqrt{200} + \sqrt{150}) : (5\sqrt{2}) \text{ și}$$

$$d = [\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - 2) + (\sqrt{6} + \sqrt{12}) : \sqrt{3}] : 2 - \sqrt{8}.$$

Demonstrați că suma  $c + d$  este un număr natural.

**7** Determinați elementele mulțimii

$$M = \{x \in \mathbb{Z} \mid a < x < b\} \text{ știind că}$$

$$a = [\sqrt{15} \cdot (\sqrt{75} - \sqrt{45} + 10\sqrt{3})] : (-15) - \sqrt{3} \text{ și}$$

$$b = 0,75 \cdot \sqrt{72} - \frac{\sqrt{32}}{8} + 0,1(6) \cdot \sqrt{18}.$$

**8** Efectuați calculele, apoi ordonați crescător numerele  $a, b, c, d$ :

$$a = 0,4 \cdot \sqrt{20} - \sqrt{4,05} + \frac{\sqrt{10} : \sqrt{2}}{5}$$

$$b = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{12} - 4) + \sqrt{450} : (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{18} + \frac{\sqrt{384}}{5}\right)$$

$$c = \left[ (\sqrt{3} + \sqrt{6}) \cdot \sqrt{8} - \frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{2\sqrt{300}}{5} \right] \cdot 0,6$$

$$d = \left(\frac{\sqrt{24}}{3} - \frac{\sqrt{54}}{4}\right) \cdot (\sqrt{120} - \sqrt{1080} + 0,5 \cdot \sqrt{750}).$$

**9** Determinați cel mai mare număr natural mai

mic decât  $x = (\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2})^5 : (\sqrt{2})^7 + (\sqrt{2})^9$ .





**10** Determinați cel mai mic număr întreg mai mare decât  $y = (-\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{18})^3 : (\sqrt{6})^{12}$ .

**11** Efectuați calculele necesare și demonstrați că:

a)  $\sqrt{\frac{49+49^2}{50+50^2}} < \sqrt{\frac{50+50^2}{51+51^2}}$

b)  $\sqrt{\frac{16+\sqrt{192}}{18+\sqrt{243}}} > \sqrt{\frac{7+\sqrt{147}}{8+\sqrt{192}}}$

**12** Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a)  $2\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{5}) - 2\sqrt{18} + 2\sqrt{15}$

b)  $5\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{6}) - \sqrt{16-3 \cdot 2} + 10\sqrt{3}$

c)  $2\sqrt{12} - 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{30} : \sqrt{5} - \sqrt{5}) - \sqrt{40}$

d)  $-\sqrt{32} + \sqrt{216} + 3\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - 2\sqrt{2})$

e)  $\frac{6-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

f)  $\left(\frac{11}{15\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) : \frac{5}{48\sqrt{6}}$

g)  $\left(\frac{7}{2\sqrt{3}} - \frac{13}{4\sqrt{3}} + \frac{5}{6\sqrt{3}}\right) : \frac{13}{24\sqrt{3}}$

h)  $\left(\frac{8}{5\sqrt{7}} - \frac{3}{4\sqrt{7}} - \frac{1}{10\sqrt{7}}\right) \cdot \frac{4\sqrt{35}}{3}$

i)  $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{0,(2)}\right)^3 \cdot \sqrt{2}$

**13** Calculați  $x = 30 \cdot a + b$  și  $y = a : b$ , unde

$$a = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

$$b = \sqrt{2}^5 - \sqrt{3}^5 + \sqrt{5}^3$$

**14** Comparați numerele  $a$  și  $b$ :

a)  $a = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{20}}$  și  $b = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{3}$

b)  $a = 2\sqrt{32} - 6 : \sqrt{18}$  și  $b = \frac{49}{\sqrt{8} + \sqrt{50}}$

c)  $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-1}$  și  $b = \sqrt{2^{2^2}}$

**15** Stabiliți care din următoarele numere sunt raționale

a)  $\frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{27}} - \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{12}} - \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

b)  $\frac{\sqrt{2}-10}{5\sqrt{2}} - \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{8}} + \frac{9-2\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

c)  $|5-3\sqrt{3}| - |4\sqrt{3}-7| - 7\sqrt{3}$

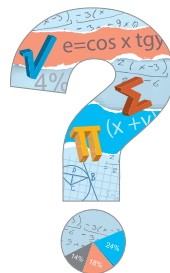
d)  $\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{9}}{\sqrt{63}}$

e)  $\sqrt{3^{10}+3^8-10^7} : \sqrt{3^8-10^6}$

f)  $\sqrt{(2\sqrt{3}+4)^2} - \sqrt{(-\sqrt{3}-2)^2}$

g)  $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{(4\sqrt{3}-7)^2}$

h)  $(8\sqrt{2})^{-1} + (2\sqrt{2})^{-3} - \sqrt{2}^{-5}$



I. La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.

5p	1. Rezultatul calculului $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - (-3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}) + 5\sqrt{5}$ este egal cu: A. $5\sqrt{5}$ B. $7\sqrt{5}$ C. $9\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{5}$
5p	2. Efectuând $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{42} : \sqrt{7} - \sqrt{54}$ , se obține: A. $-\sqrt{6}$ B. $-2\sqrt{6}$ C. $-3\sqrt{6}$ D. $\sqrt{6}$
5p	3. Numărul $a = \sqrt{576} : \sqrt{144} - \sqrt{(-5)^4 : 5^2}$ este: A. număr natural              B. număr rațional pozitiv              C. număr rațional negativ              D. număr irațional
5p	4. Numărul $b = 2\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5})^{-3}$ este: A. număr întreg negativ              B. număr rațional negativ              C. număr întreg pozitiv              D. număr rațional pozitiv
10p	5. Dacă $a = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{27}}$ și $b = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{32}}$ , atunci $a \cdot b$ este: A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{11}{18}$ D. $\frac{5}{18}$
10p	6. Dacă $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}}{b}$ și $\frac{\sqrt{3c}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5d}}$ , atunci $a \cdot b - c \cdot d$ este: A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4
5p	7. Numărul $x$ care verifică egalitatea $x\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{300}$ este: A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5
5p	8. Numărul $y$ care verifică egalitatea $\sqrt{4 \cdot y} + \sqrt{72} = \sqrt{128}$ este: A. 5                      B. 4                      C. 3                      D. 2

II. La problemele următoare se cer rezolvări complete.

5p	1. Rezolvați următoarele cerințe: a) Arătați că numărul $\frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ este rațional.
20p	b) Fie numerele $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{6} - \sqrt{3}$ și $b = \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + 2 + \sqrt{3}$ . Demonstrați că $\frac{6}{5} < \frac{b}{a} < \frac{5}{4}$ .
15p	2. Se consideră expresia $E(x) = 10 - (x + \sqrt{5})^2$ . Calculați $E(-\sqrt{5}) + E(\sqrt{5})$ și precizați dacă rezultatul calculului este un număr pozitiv, un număr negativ sau nul.

1.6

## Media aritmetică ponderată a $n$ numere reale, $n \geq 2$ . Media geometrică a două numere reale pozitive.

### L1 Media aritmetică ponderată a $n$ numere reale, $n \geq 2$ .

#### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Începând cu clasa a V-a, evaluarea rezultatelor învățării se realizează prin note. La sfârșitul fiecărui semestru, se calculează media notelor la fiecare disciplină, după cum urmează:

1. La disciplinele la care nu se dă teză, se calculează media aritmetică a numerelor înscrise în catalog, în rubrica *Note*. Numărul obținut se rotunjește la unități și se înscrie în catalog ca *medie*.

Modul de calcul este dat de următoarea definiție:

**Definiție:** Dacă se dau  $n$  numere reale  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , atunci media lor aritmetică simplă, numită pe scurt *media aritmetică*, este: 
$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Vlad, elev de clasa a VII-a, a obținut la geografie, în semestrul I, următoarele note: 10, 8, 9, 10. Media lui Vlad, la geografie, va fi  $m_a = \frac{10 + 10 + 9 + 8}{4} = 9,25$ . Prin rotunjire, în catalog se va completa media 9.

2. La disciplinele la care se dă teză (notăm cu T nota obținută la teză), media se face în două etape:

a) Se calculează media aritmetică a notelor înscrise în rubrica *Note*, cu excepția tezei, și se exprimă sub formă de fracție zecimală, cu două zecimale exacte. Să considerăm  $M$  această medie.

Vlad a obținut la matematică, în semestrul I, notele: 9, 9, 10, 9, 10, iar la teză, a luat 10. Să-i calculăm media:

$$M = m_a = \frac{9 + 9 + 10 + 9 + 10}{5} = 9,4$$

**Observație:** Unele numere se pot repeta de mai multe ori în calculul mediei aritmetice. De exemplu, în problema de mai sus, Vlad are la matematică două note de 10 și trei note de 9. Calculul mediei ar fi fost mai rapid și mai practic în felul următor:  $M = \frac{2 \cdot 10 + 3 \cdot 9}{2 + 3} = 9,4$ , adică folosind media ponderată. Ponderele notei 10 este 2, iar ponderea notei 9 este 3. Evident, *numărul total* al notelor este *suma ponderilor*.

b) Se calculează media aritmetică a numerelor  $M$  și  $T$ , având **ponderile** 3, respectiv 1.

**Definiție:** Se numește media aritmetică ponderată a  $n$  numere reale  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  cu ponderile  $p_1, p_2, \dots, p_n$  numărul 
$$m_p = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

O vom numi, pe scurt, **media ponderată** a celor  $n$  numere.

Media semestrială la matematică va fi:  $m_p = \frac{3M + T}{4} = \frac{3 \cdot 9,4 + 10}{4} = 9,55$ . Prin rotunjire, în catalog, se va scrie media 10.

În exemplul dat, vom spune că media  $M$  are ponderea 3, iar nota  $T$  are ponderea 1, sau că  $M$  are ponderea 75%, iar nota  $T$  are ponderea 25%. 
$$m_p = \frac{3M + T}{4} = \frac{75}{100} \cdot M + \frac{25}{100} \cdot T$$

Când se calculează media aritmetică a unui număr mare de numere este foarte potrivită folosirea mediei ponderate. Formula pentru media ponderată este doar o sistematizare a formulei pentru media aritmetică simplă, folosind comutativitatea și asociativitatea adunării numerelor reale.

Cei **20 de elevi** ai unei clase au obținut, la ultima evaluare sumativă, notele din tabelul alăturat. Dorim să aflăm media clasei la acest test de evaluare.

Nota	7	8	9	10
Numărul elevilor care au obținut această notă	3	6	7	4
<b>Ponderea notei</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>4</b>

$$m_a = \frac{(10+10+10+10) + (9+9+9+9+9+9+9) + (8+8+8+8+8+8) + (7+7+7)}{20} = 8,6 \text{ (media aritmetică simplă)}$$

$$\text{sau } m_p = \frac{4 \cdot 10 + 7 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot 7}{4 + 7 + 6 + 3} = \frac{172}{20} = 8,6 \text{ (media ponderată).}$$

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Proprietăți ale mediei aritmetice:

**1. Media aritmetică** a două sau mai multe numere este cel puțin egală cu cel mai mic dintre numere și cel mult egală cu cel mai mare dintre numere.

**2. Media ponderată** a două numere este mai apropiată de numărul care are ponderea mai mare.

**3.** Pentru aceleași numere, media aritmetică poate fi diferită, în funcție de ponderile numerelor.

Fie  $n$  numere reale, dintre care  $a$  este cel mai mic, iar  $b$ , cel mai mare. Atunci,  $a = \frac{n \cdot a}{n} \leq m_a \leq \frac{n \cdot b}{n} = b$ .  
În exemplul al doilea,  $7 < 8,6 < 10$ .

În calculul mediei semestriale la matematică, media  $M$  are ponderea mai mare decât  $T$ , iar  $m_p - M < T - m_p$ .  
 $M = 9,4$ ,  $T = 10$  și  $\frac{3M + T}{4} = 9,55$

Sorana și Dragoș au același număr de note la istorie, numai de 9 și de 10. Totuși, cei doi au medii diferite:  
 $m_1 = \frac{3 \cdot 9 + 10}{4} = 9,25$ , iar  $m_2 = \frac{3 \cdot 10 + 9}{4} = 9,75$ .



### Reținem!

• Dacă se dau  $n$  numere reale  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , atunci media lor aritmetică simplă, numită pe scurt

**medie aritmetică**, este  $m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

• Se numește media aritmetică ponderată a  $n$  numere reale  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  cu ponderile  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , numărul

$$m_p = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

**1.** Media aritmetică a două sau mai multe numere este cel puțin egală cu cel mai mic dintre numere și cel mult egală cu cel mai mare dintre numere.

**2.** Media ponderată a două numere este mai apropiată de numărul care are ponderea mai mare.



## Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

**1** Calculați media aritmetică a numerelor reale  $a$  și  $b$  în fiecare din situațiile:

- a)  $a = 2, b = 18$ ;      d)  $a = 1 - \frac{4}{5}, b = 1 + 0,8$ ;  
 b)  $a = 7,25, b = 22,75$ ;    e)  $a = 2\sqrt{6}, b = 8\sqrt{6}$ ;  
 c)  $a = 5,5, b = 1,8(3)$ ;    f)  $a = 3\sqrt{5}, b = 17\sqrt{5}$ ;  
 g)  $a = \sqrt{63} - 2\sqrt{2}, b = \sqrt{7} + \sqrt{8}$ ;  
 h)  $a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}, b = 2 + \sqrt{12} + \sqrt{50}$ .

**2** Calculați media aritmetică a numerelor  $a, b, c$ :  
 $a = 3\sqrt{20} - \sqrt{48}$ ;  $b = \sqrt{108} - 3\sqrt{8}$ ;  $c = \sqrt{72} - \sqrt{12}$ .

**3** Media aritmetică a numerelor  $a, b, c$  este  $4 + 8\sqrt{2}$ .

- a) Știind că  $a = 3 + \sqrt{32}, b = 5 + \sqrt{72}$ , aflați numărul  $c$ ;  
 b) Determinați cele trei numere, dacă  $2a = 3b = 6c$ .

**4** În clasa a VII-a C, sunt 25 de elevi, dintre care 9 băieți. Media înălțimii băieților este 170 cm, iar media înălțimii fetelor este 165 cm. Calculați media înălțimii elevilor clasei a VII-a C.

**5** Lorena a cumpărat struguri din două magazine diferite. Din primul magazin, a cumpărat 1,5 kg de struguri și a plătit 13,5 lei, iar din celălalt magazin a cumpărat 2,25 kg de struguri și a plătit 15,75 lei.

- a) Aflați prețul cu care se vând strugurii (suma încasată pentru 1 kg de struguri) în fiecare dintre cele două magazine.  
 b) Aflați prețul mediu pe care l-a plătit Lorena pe struguri.

**6** Măsurând temperatura aerului, la ora 9 dimineța, în cele șapte zile ale unei săptămâni, un meteorolog a consemnat valorile din tabelul următor. În primele trei zile ale săptămânii următoare, s-au înregistrat, la ora 9, aceeași temperatură pe care o considerăm  $x$  grade Celsius.

ziua	L	Ma	Mi	J	V	S	D	L	Ma	Mi
T	7°C	8°C	9°C	12°C	15°C	15°C	18°C	$x^\circ\text{C}$	$x^\circ\text{C}$	$x^\circ\text{C}$

- a) Calculați temperatura medie din prima săptămână.  
 b) Știind că temperatura medie a celor 10 zile este  $13,5^\circ\text{C}$ , aflați numărul  $x$ .

## L2 Media geometrică a două numere reale pozitive

### Ne amintim

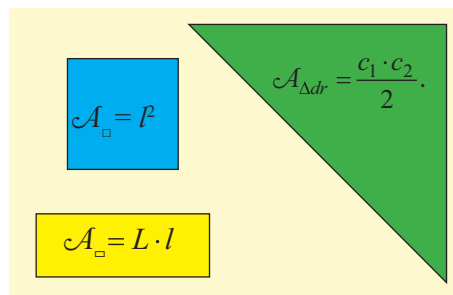
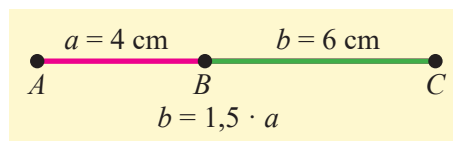
Pentru orice două numere reale pozitive  $a$  și  $b$ , se poate considera raportul  $\frac{b}{a} = k$ , relație care se poate scrie și în forma  $b = a \cdot k$ .

**Exemplu:** Segmentul  $AB$  are lungimea de 4 cm, iar segmentul  $BC$  are lungimea de 6 cm. Scriem  $\frac{BC}{AB} = \frac{6}{4}$  sau  $BC = \frac{6}{4} \cdot AB$  sau  $BC = 1,5 \cdot AB$ .

Aria pătratului cu latura  $l$  este  $\mathcal{A}_\square = l^2$ .

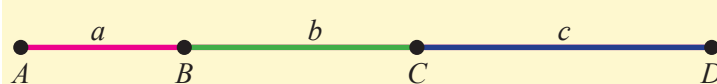
Aria dreptunghiului, având lungimea  $L$  și lățimea  $l$  este  $\mathcal{A}_\square = L \cdot l$ .

Aria triunghiului dreptunghic este  $\mathcal{A}_{\Delta dr} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$ .



### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

1. Fie  $A, B, C, D$  puncte coliniare în această ordine, astfel încât  $AB = a$ ,  $BC = b$  și  $CD = c$ . Se știe că  $BC = k \cdot AB$  și  $CD = k \cdot BC$ .
  - a) Formați o proporție folosind numerele pozitive  $a, b, c$ .
  - b) Exprimați numărul pozitiv  $b$  în funcție de numerele pozitive  $a$  și  $c$ .



$$\left. \begin{array}{l} \frac{BC}{AB} = \frac{b}{a} = k \\ \frac{CD}{BC} = \frac{c}{b} = k \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = a \cdot c \Leftrightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$$

Vom spune că numărul  $b$  este **media geometrică** a numerelor  $a$  și  $c$ .

2. Considerăm dreptunghiul  $ABCD$ , cu  $AB = 9$  și  $BC = 25$ .
  - a) Calculați aria dreptunghiului.
  - b) Determinați lungimea laturii pătratului care are aria egală cu aria dreptunghiului dat.

Fie  $a$  lungimea laturii pătratului.  $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC = 9 \cdot 25$ ,

$$\mathcal{A}_{\text{pătrat}} = a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \cdot 25, \text{ deci } a = \sqrt{9 \cdot 25} = 15.$$

Vom spune că latura pătratului este **media geometrică** a dimensiunilor dreptunghiului cu aceeași arie.

**Definiție:** Media geometrică a două numere reale pozitive  $x$  și  $y$  este numărul pozitiv  $m_g = \sqrt{x \cdot y}$ .

Pornind de la echivalența  $\frac{m_g}{x} = \frac{y}{m_g} \Leftrightarrow m_g = \sqrt{x \cdot y}$ , media geometrică a numerelor  $x$  și  $y$  se mai numește și **media proporțională** a numerelor  $x$  și  $y$ . Datorită multiplelor aplicații în geometrie, denumirea de medie geometrică este mai des întâlnită.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

1. Se consideră șirul de numere pozitive: 2, 4, 8, 16, 32, ... (fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin înmulțire cu 2).
  - a) Scrieți următorii 3 termeni ai șirului.
  - b) Să observăm că  $4^2 = 2 \cdot 8$  sau  $4 = \sqrt{2 \cdot 8}$ . Identificați alte două astfel de relații între termenii șirului.
2. Compuneți o problemă asemănătoare celei de mai sus, folosind alte numere.

**B.** Proprietăți ale mediei geometrice a două numere pozitive  $x$  și  $y$ :

1. Media geometrică a două numere pozitive este cel puțin egală cu cel mai mic dintre numere și cel mult egală cu cel mai mare dintre numere; dacă numerele sunt egale, atunci media geometrică este egală cu fiecare dintre ele.

Fie  $0 < x < y$ , atunci  $x = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x \cdot y} \leq \sqrt{y^2} = y$       Cum  $m_g = \sqrt{x \cdot y}$ , obținem  $x \leq m_g \leq y$ .

Pentru  $x = y$  obținem  $m_g = \sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x \cdot x} = x$ .

2. Media geometrică a două numere pozitive este mai mică sau egală decât media aritmetică a acelorași numere.

Oricare ar fi  $x > 0$  și  $y > 0$ ,  $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$ .      **Example:**  $\sqrt{2 \cdot 18} = 6 < 10 = \frac{2+18}{2}$ ;  $\sqrt{9 \cdot 10} \approx 9,4868 < 9,5 = \frac{9+10}{2}$ .

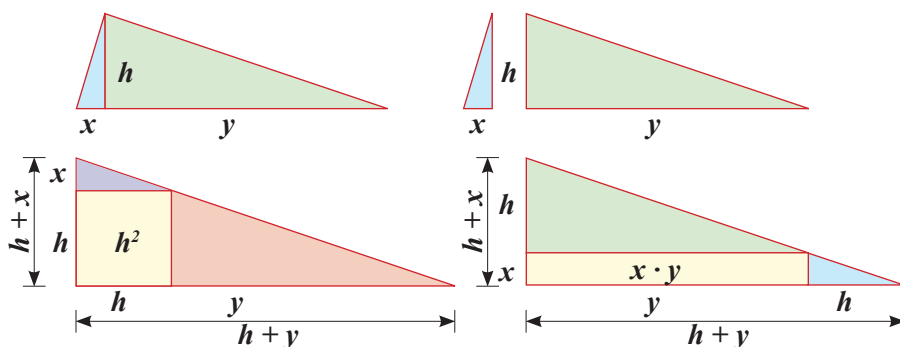
3. Dacă  $x$  și  $y$  sunt numere pozitive, atunci  $\sqrt{x \cdot y} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = y$ .



## Aplicație practică

La această aplicație, lucrați în echipe de cel puțin doi elevi.  
Aveți nevoie de: carton, markere, instrumente geometrice, foarfece.

1. Desenați pe carton un triunghi dreptunghic.
2. Construiți înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Notați cu  $h$  înălțimea, apoi notați cu  $x$  și  $y$  segmentele determinate de ea pe ipotenuză.
3. Hașurați, folosind culori diferite, cele două triunghiuri dreptunghice formate.
4. Decupați triunghiurile obținute.
5. Desenați și apoi decupați un pătrat cu latura  $h$  și un dreptunghi cu dimensiunile  $x$ , respectiv  $y$ .
6. Alăturați, pe un carton mai mare, cele două triunghiuri și pătratul astfel încât să obțineți un triunghi. Desenați, apoi decupați triunghiul mare care se formează.
7. Așezați cele două triunghiuri mici împreună cu dreptunghiul pregătit, astfel încât să formați un triunghi dreptunghic. Ce constatați?
8. Comparați materialele realizate cu imaginile alăturate și observați relațiile obținute.



Când alăturăm triunghiurile și pătratul cu aria  $h^2$ , obținem un triunghi dreptunghic cu catetele  $h + x$ , respectiv  $h + y$ .

Prin alăturarea celor două triunghiuri mici cu dreptunghiul de arie  $x \cdot y$ , obținem un triunghi dreptunghic congruent cu primul.

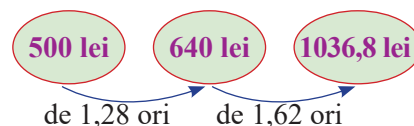
**Concluzie:** Aria pătratului și cea a dreptunghiului sunt egale, adică  $h^2 = x \cdot y \Rightarrow h = \sqrt{x \cdot y}$ , deci înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este medie proporțională (geometrică) a lungimilor segmentelor determinate de ea pe ipotenuză.

**Observație:** Prin această aplicație, ați demonstrat un rezultat foarte important pentru geometria triunghiului dreptunghic, numit *Teorema înălțimii*. Ne vom ocupa de acest rezultat la geometrie.

Este important să identificăm, în practică, necesitatea folosirii mediei geometrice în rezolvarea problemelor.

### Exemple

Tatăl lui Mihnea face parte din echipa de marketing a unui magazin. Un produs din acest magazin costă 500 de lei. Își propune să realizeze, în viitor, două scumpiri succesive ale acestuia. Vrea să mărească prețul, mai întâi, de 1,28 ori și după 6 luni să mărească noul preț de 1,62 ori. După ce face calculele necesare, constată că produsul va costa, în final 1036,8 lei.



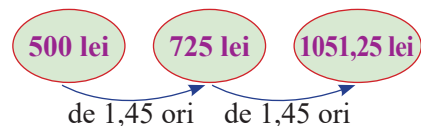
Mihnea îi propune ca prețurile să crească, în cele două etape, de același număr de ori, notat cu  $x$ , astfel ca în final să obțină același preț.

Tatăl îl felicită pe Mihnea pentru idee și întreabă:  
Cum calculăm numărul  $x$ ?

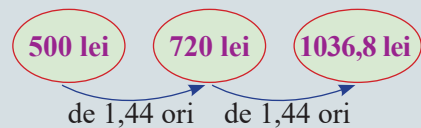




Mihnea calculează media aritmetică a numerelor care reprezintă cele două mărituri:  $\frac{1,28 + 1,62}{2} = 1,45$ . Dar, își dă seama că *nu obține același preț*.



După ce se gândește mai bine, Mihnea își dă seama că este necesar să folosească media geometrică:  $x = \sqrt{1,28 \cdot 1,62} = 1,44$ . Explicați de ce trebuie folosită media geometrică.



### Reținem!



**Media geometrică** sau *media proporțională* a două numere reale pozitive  $x$  și  $y$  este numărul pozitiv  $m_g = \sqrt{x \cdot y}$ .

1. Pentru orice  $0 < x < y$ ,  $x < m_g < y$ .
2. Dacă  $x > 0$  și  $y > 0$ , atunci  $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$ , adică  $m_g \leq m_a$ .
3. Dacă  $x$  și  $y$  sunt numere pozitive, atunci  $\sqrt{x \cdot y} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = y$ , adică  $m_g = m_a$  dacă și numai dacă  $x = y$ .



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. Calculați media geometrică a numerelor reale pozitive  $a$  și  $b$ :  
 a)  $a = 2, b = 18$ ;      b)  $a = 3, b = 12$ ;  
 c)  $a = \frac{14}{5}, b = \frac{10}{7}$ ;      d)  $a = 112, b = \frac{4}{7}$ ;  
 e)  $a = 1,2, b = 3,(3)$ .
2. Calculați media geometrică a numerelor reale pozitive  $a$  și  $b$ :  
 a)  $a = 6\sqrt{2}, b = 3\sqrt{2}$ ;  
 b)  $a = 3\sqrt{15}, b = 5\sqrt{15}$ ;  
 c)  $a = \sqrt{3} + \sqrt{12}, b = \sqrt{48} - \sqrt{3}$ ;  
 d)  $a = \sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{50}, b = \sqrt{162} - \sqrt{72}$ .
3. Media geometrică a două numere pozitive este  $4\sqrt{2}$ , iar unul dintre ele este  $2\sqrt{2}$ . Aflați cel de-al doilea număr.
4. Media geometrică a două numere pozitive este  $5\sqrt{3}$ , iar unul dintre ele este  $\sqrt{5}$ . Calculați media aritmetică a celor două numere.
5. Se consideră numerele  $a = \sqrt{5\sqrt{625}}, b = 4\sqrt{5}$ . Calculați media aritmetică  $m_a$  și media geometrică  $m_g$  a celor două numere. Comparați numerele  $m_a$  și  $m_g$ .
6. a) Determinați două numere naturale a căror medie geometrică este  $\sqrt{101}$ .  
 b) Găsiți două numere naturale a căror medie geometrică este 5.
7. Determinați numerele naturale de forma  $\overline{ab}$ , știind că media geometrică a numerelor  $2^a$  și  $4^b$  este 8.
8. Media geometrică a numerelor pozitive 8 și  $x$  este 12.  
 a) Aflați numărul  $x$ .  
 b) Aflați cu cât trebuie mărit numărul  $x$  pentru ca media geometrică să se dubleze.
9. Raportul numerelor pozitive  $a$  și  $b$  este  $\frac{4}{9}$ , iar media lor geometrică este 18. Aflați numerele  $a$  și  $b$ .



**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

**I.** La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.

<b>5p</b>	<b>1.</b> Tudor are la limba engleză o notă de 7, trei note de 8 și câte două note de 9 și două note 10. După rotunjire, media lui Tudor la limba engleză este: A. 7                      B. 8                      C. 9                      D. 10
<b>5p</b>	<b>2.</b> Media geometrică a numerelor 6 și 54 este: A. 18                      B. 16                      C. 14                      D. 12
<b>5p</b>	<b>3.</b> Media ponderată a numerelor $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$ , cu ponderile 8, 12, respectiv 16, este: A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$
<b>5p</b>	<b>4.</b> Media geometrică a numerelor $x$ și 12 este 18. Numărul $x$ este: A. 24                      B. 27                      C. 30                      D. 36
<b>5p</b>	<b>5.</b> Media geometrică a numerelor 3 și $y$ este $5\sqrt{3}$ . Numărul $y$ este: A. 20                      B. 24                      C. 25                      D. 50
<b>5p</b>	<b>6.</b> Media geometrică a numerelor $\overline{ab}$ și $\overline{ac}$ este $6\sqrt{6}$ . Media aritmetică a acestor numere este: A. 10                      B. 12                      C. 15                      D. 18
<b>10p</b>	<b>7.</b> Numărul pozitiv $x$ din proporția $\frac{0,3}{x} = \frac{x}{\sqrt{23,04}}$ este: A. 1,5                      B. 1,4                      C. 1,3                      D. 1,2
<b>10p</b>	<b>8.</b> Dacă $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{27}}{b} = \frac{\sqrt{48}}{c}$ , atunci produsul dintre media geometrică a numerelor $a$ și $c$ și media geometrică a numerelor $a$ și $b$ este: A. $6\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

**II.** La problemele următoare se cer rezolvări complete.

<b>10p</b>	<b>1.</b> Se consideră numerele naturale $a$ și $b$ , cu $0 < a < b$ .
<b>10p</b>	<b>a)</b> Calculați media geometrică a numerelor $a$ și $b$ știind că media aritmetică a acestora este egală cu 2.
<b>10p</b>	<b>b)</b> Calculați media aritmetică a numerelor $a$ și $b$ știind că media geometrică a acestora este egală cu 3.
<b>5p</b>	<b>c)</b> În condițiile punctului b), calculați media ponderată a numerelor $a$ și $b$ știind că au ponderile $2b$ și $7a$ .
<b>10p</b>	<b>2.</b> Fie numerele $x$ și $y$ astfel încât $\sqrt{(x - 2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(6\sqrt{3} - y)^2} \leq 0$ .
<b>10p</b>	<b>a)</b> Aflați numerele $x$ și $y$ .
<b>5p</b>	<b>b)</b> Comparați numerele $\frac{2}{x+y}$ și $\frac{1}{\sqrt{xy}}$ .

## 1.7 Ecuații de forma $x^2 = a$ , unde $a \in \mathbb{R}$

### Ne amintim

1. Oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , au loc relațiile:  $x^2 = (-x)^2$ .

a)  $7^2 = 49$  și  $(-7)^2 = 49$

b)  $\sqrt{5}^2 = 5$  și  $(-\sqrt{5})^2 = 5$ ;

c)  $(2\sqrt{3})^2 = 12$  și  $(-2\sqrt{3})^2 = 12$ .

2. Pătratul oricărui număr real este un număr real pozitiv sau nul.

a)  $(2\sqrt{3})^2 > 0$ ;

b)  $(-2\sqrt{3})^2 > 0$ ;

c)  $0^2 = 0$ .

3. Pentru fiecare număr real nenegativ  $a$ , se definește rădăcina pătrată a acestuia, notată  $\sqrt{a}$ , care este, de asemenea, număr real nenegativ, rațional sau irațional.

a)  $\sqrt{9} = 3$ ;      c)  $\sqrt{6,25} = 2,5$ ;      e)  $\sqrt{5} \approx 2,23$ .

b)  $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ ;      d)  $\sqrt{3} \approx 1,73$ ;

4. Orice număr negativ este mai mic decât orice număr pozitiv și decât 0.

Dacă  $a < 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $a < b$ .

5. Dacă  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ .

Dacă  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$ .

### Rezolvăm și observăm

Să rezolvăm următoarea **problemă**:

Se consideră mulțimea  $M = \{-6, -5, -4, 2, 5\}$ .

a) Determinați numerele reale  $x$  aparținând mulțimii  $M$ , pentru care  $x^2 = 25$ .

b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x^2 = 25$ .

**Soluție:** a)  $M = \{-6, -5, -4, 2, 5\}$ . Pentru fiecare element  $x$  al mulțimii  $M$ , calculăm  $x^2$  și obținem:

$(-6)^2 = 36 \neq 25$ ;  $(-5)^2 = 25$ ;  $(-4)^2 = 16 \neq 25$ ;

$2^2 = 4 \neq 25$ ;  $5^2 = 25$ . În concluzie, singurele numere, elemente ale mulțimii  $M$ , care verifică egalitatea, sunt 5 și  $-5$ .

b) Din a) rezultă că numerele 5 și  $-5$  verifică egalitatea, deci sunt **soluții ale problemei** noastre.

Se constată ușor că: 1) Dacă  $x > 5$  sau  $x < -5$ , atunci  $x^2 > 25$ , deci nu verifică egalitatea.

2) Dacă  $x > -5$  și  $x < 5$ , atunci  $x^2 < 25$ , deci nu verifică egalitatea.

Rezultă că singurele numere reale, **soluții ale problemei**, sunt 5 și  $-5$ .

**Problema** rezolvată poate fi reformulată astfel:

Se consideră mulțimea

$M = \{-6, -5, -4, 2, 5\}$ .

a) Rezolvați, în mulțimea  $M$ , ecuația  $x^2 = 25$ .

b) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația  $x^2 = 25$ .

**Soluție:** Vom spune că ecuația dată are **necunoscuta**  $x$ .

Am demonstrat că numerele 5 și  $-5$  verifică ecuația, deci sunt soluțiile ecuației date, atât în mulțimea  $M$ , cât și în mulțimea  $\mathbb{R}$ .

Mulțimea  $S = \{-5, 5\}$  este **mulțimea soluțiilor** ecuației date, în ambele cazuri.

Demersul realizat în scopul determinării tuturor soluțiilor unei ecuații se numește **rezolvarea ecuației**.

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

O **ecuație** de forma  $x^2 = a$ , cu  $a \in \mathbb{R}$  conduce la determinarea tuturor numerelor reale care verifică egalitatea.

- *Necunoscuta* ecuației este  $x$ .
- Fiecare valoare atribuită necunoscutei, număr real, care verifică ecuația, se numește *soluție* a acesteia.
- Mulțimea valorilor reale ale necunoscutei  $x$  care verifică egalitatea se numește *mulțimea soluțiilor* ecuației.
- *A rezolva* o ecuație înseamnă a determina toate soluțiile sale.

Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x^2 = 256$ .

Numărul 16 este soluție a ecuației, deoarece  $16^2 = 256$ . De asemenea, numărul  $-16$  este soluție a ecuației, deoarece  $(-16)^2 = 256$ . Dacă  $x > 16$  sau  $x < -16$ , atunci  $x^2 > 256$ , deci nu verifică egalitatea. Dacă  $x > -16$  și  $x < 16$ , atunci  $x^2 < 256$ , deci nu verifică egalitatea. În concluzie, 16 și  $-16$  sunt singurele soluții ale ecuației.

Vom scrie  $x_1 = 16$  și  $x_2 = -16$ . Mulțimea soluțiilor va fi:  $S = \{-16, 16\}$ .

**Observație:** Numărul 16 este rădăcina pătrată a numărului 256, iar  $-16$  este opusul numărului 16.

Putem scrie:  $x_1 = \sqrt{256} = 16$  și  $x_2 = -\sqrt{256} = -16$ .

**Rezolvarea ecuației** de forma  $x^2 = a$ , cu  $a \in \mathbb{R}$ .

1) Dacă  $a > 0$ , ecuația  $x^2 = a$  se poate scrie  $|x| = \sqrt{a}$ , egalitate care are loc dacă și numai dacă  $x = \sqrt{a}$  sau  $x = -\sqrt{a}$ .

Vom spune că ecuația are soluțiile reale

$$x_1 = \sqrt{a} \text{ și } x_2 = -\sqrt{a}.$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este

$$S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}.$$

a)  $x^2 = 64 \Rightarrow x_1 = \sqrt{64} = 8$  și  $x_2 = -\sqrt{64} = -8$ , deci  $S = \{-8, 8\}$ ;

b)  $x^2 = 15 \Rightarrow x_1 = \sqrt{15}$  și  $x_2 = -\sqrt{15}$ , deci  $S = \{-\sqrt{15}, \sqrt{15}\}$ ;

c)  $x^2 = 18 \Rightarrow x_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$  și  $x_2 = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$ , deci  $S = \{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\}$ .

2) Ecuația  $x^2 = 0$  are doar soluția  $x = 0$ , iar  $S = \{0\}$ .

a)  $(2x)^2 = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$  și  $S = \{0\}$ .

b)  $(2x - 10)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$  și  $S = \{5\}$ .

3) Ecuația  $x^2 = a$ , unde  $a < 0$ , nu are nicio soluție, număr real, pentru că  $x^2 \geq 0$  și  $a < 0$ , deci  $x^2 \neq a$ , oricare ar fi numărul real  $x$ . Mulțimea soluțiilor ecuației este  $S = \emptyset$ .

a) Ecuația  $x^2 = -16$  nu are nicio soluție și  $S = \emptyset$ .

b) Ecuația  $x^2 = -1$  nu are nicio soluție și  $S = \emptyset$ .

**Observație:** 1) Necunoscuta unei ecuații se poate nota și cu alte litere. De exemplu, ecuația  $t^2 = 16$  cu necunoscuta  $t$ , are soluțiile  $t_1 = -4$  și  $t_2 = 4$ , iar mulțimea soluțiilor va fi  $S = \{-4, 4\}$ , ca și în cazul ecuației  $x^2 = 16$  sau  $m^2 = 16$  sau chiar  $a^2 = 16$ .

2) Se recomandă ca rezolvarea unei ecuații să se încheie cu scrierea mulțimii soluțiilor sale.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Ne amintim că două ecuații pentru care necunoscuta aparține aceleiași mulțimi și care au aceleași soluții, se numesc *ecuații echivalente*. Vom numi **transformări echivalente** acele transformări prin care se obțin ecuații echivalente. Putem folosi, în acest sens, următoarele transformări:

- 1) adunăm sau scădem la ambii membri ai ecuației același număr real;
- 2) înmulțim sau împărțim ambii membri ai ecuației cu același număr real nenul;
- 3) dacă  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$ , atunci  $a = b$  dacă și numai dacă  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ .

Multe dintre ecuațiile propuse spre rezolvare sunt prezentate într-o altă formă, dar prin transformări echivalente, putem obține ecuații de forma  $x^2 = a$ .

**Exemple**

a)  $2x^2 + 5 = 133 \quad | -5$   
 $2x^2 = 128 \quad | :2$   
 $x^2 = 64$   
 $|x| = \sqrt{64} \Leftrightarrow |x| = 8$   
 $x_1 = -8, x_2 = 8$   
 $S = \{-8, 8\}.$

b)  $(x - 9)^2 = 144$   
 $|x - 9| = \sqrt{144} \Leftrightarrow |x - 9| = 12$   
 $x - 9 = -12 \text{ sau } x - 9 = 12$   
 $x_1 = -3 \text{ sau } x_2 = 21$   
 $S = \{-3, 21\}.$

c)  $(2x - 9)^2 = 25$   
 $|2x - 9| = \sqrt{25} \Leftrightarrow |2x - 9| = 5$   
 $2x - 9 = -5 \text{ sau } 2x - 9 = 5$   
 $2x = 4 \text{ sau } 2x = 14$   
 $x_1 = 2 \text{ sau } x_2 = 7$   
 $S = \{2; 7\}$

**Reținem!**



- 1) Dacă  $a > 0$ , atunci  $x^2 = a \Leftrightarrow |x| = \sqrt{a} \Leftrightarrow x = \sqrt{a} \text{ sau } x = -\sqrt{a}$ .  $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$
- 2)  $x^2 = 0$  dacă și numai dacă  $x = 0$ .  $S = \{0\}$ .
- 3) Dacă  $a < 0$ , atunci  $x^2 \neq a$ , oricare ar fi numărul real  $x$ .  $S = \emptyset$ .



**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

- 1 Rezolvați în  $\mathbb{N}$  ecuațiile:  
 a)  $x^2 = 625$ ;                      d)  $-7 \cdot x^2 = -343$ ;  
 b)  $x^2 = 256$ ;                      e)  $3 \cdot x^2 + 1 = 76$ .  
 c)  $2 \cdot x^2 = 800$ ;
- 2 Scrieți toate perechile  $(a^2, a)$ , știind că:  
 a)  $a^2 \in \{16, 81, 400\}$  și  $a \in \mathbb{N}$ ;  
 b)  $a^2 \in \{25, 49, 144\}$  și  $a \in \mathbb{Z}$ ;  
 c)  $a^2 \in \{16, 81, 400\}$  și  $a \in \mathbb{Q}$ .
- 3 Determinați soluțiile reale ale ecuațiilor:  
 a)  $x^2 = 36$ ;    c)  $x^2 = \frac{25}{4}$ ;    e)  $x^2 + 7 = 907$   
 b)  $x^2 = 3,24$ ;    d)  $x^2 = -9$ ;    f)  $4 \cdot x^2 + 1 = 9^2$ .

- 4 Rezolvați, în  $\mathbb{R}$ , ecuațiile:  
 a)  $5x^2 = 320$ ;                      d)  $\frac{x}{20} = \frac{45}{x}$ ;  
 b)  $\frac{4}{3} \cdot x^2 = \frac{16}{27}$ ;                      e)  $\frac{21}{8x} = \frac{3x}{14}$ ;  
 c)  $(x - 1)^2 = 2, (7)$ ;                      f)  $\frac{2m - 1}{3} = \frac{27}{2m - 1}$ .

- 5 Determinați soluțiile reale negative ale ecuațiilor:

a)  $2x^2 + 7 = 105$ ;                      b)  $\frac{14}{15x} = \frac{x}{105}$ .

- 6 Determinați soluțiile reale negative ale ecuațiilor:

a)  $x^2 + 15 = 51$ ;                      b)  $\frac{2}{3} \cdot x^2 + 0, (6) = \sqrt{1\frac{7}{9}}$ .

- 7 Rezolvați în mulțimea  $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 94 \leq x^2 \leq 169\}$  ecuațiile:

a)  $x^2 + 15 = 51$ ;                      b)  $\frac{2}{3} \cdot x^2 + 0, (6) = \sqrt{1\frac{7}{9}}$ .

- 8 Rezolvați, în  $\mathbb{R}$ , ecuațiile:

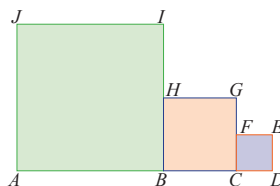
a)  $x^2 = 5$ ;                                      d)  $12x^2 + 7 = \frac{25}{3}$ ;  
 b)  $t^2 = \frac{1}{2}$ ;                                      e)  $x^2 + 3^3 = (-2)^4$ ;  
 c)  $2 \cdot x^2 = 0$ ;                                      f)  $\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{3}{2} = 1, (6)$ .

- 9 Fie mulțimea:  $M = \left\{0, 81; \frac{1}{4}; -1; 0; 2; -9; 225\right\}$ .

Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare, un număr  $a$  din mulțimea  $M$ , ecuația  $x^2 = a$  să admită:

- a) soluții raționale;                      c) soluții reale;  
 b) soluții întregi;                      d) o singură soluție reală.

- 10 Desenul alăturat reprezintă schița unui teren format prin alăturarea a trei suprafețe pătratice  $ABIJ$ ,  $BCGH$  și  $CDEF$ .



Punctul  $H$  este mijlocul segmentului  $BI$ , iar  $F$  este mijlocul segmentului  $CG$ . Știind că întreaga suprafață are  $0,035$  ha, calculați lungimile laturilor celor trei pătrate.



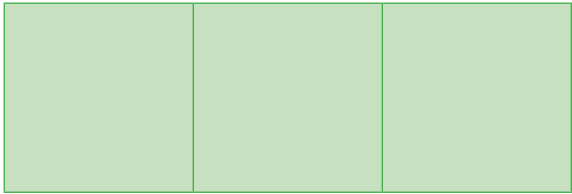
**Evaluare sumativă**

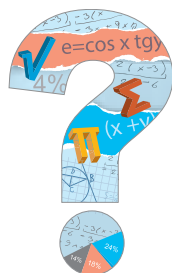
Se acordă 10 puncte din oficiu.

**I.** La cerințele următoare, alegeți litera care indică răspunsul corect; doar un răspuns este corect.

<b>5p</b>	<b>1.</b> Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 81 = 0$ este: A. $\{-81, 81\}$ B. $\{-3, 3\}$ C. $\{-9, 9\}$ D. $\{-27, 27\}$
<b>5p</b>	<b>2.</b> Mulțimea soluțiilor ecuației $-4x^2 + 25 = 0$ este: A. $\left\{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}$ B. $\left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ C. $\left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ D. $\{-0,25; 0, 25\}$
<b>5p</b>	<b>3.</b> Dacă $x > 0$ și $(x - 3)^2 = 36$ , atunci $x$ este: A. $-3$ B. $3$ C. $6$ D. $9$
<b>5p</b>	<b>4.</b> Dacă $x < 0$ și $(x - 1)^2 = (1 - \sqrt{5})^2$ , atunci $x$ este: A. $2 - \sqrt{5}$ B. $-2 - \sqrt{5}$ C. $\sqrt{5} - 2$ D. $\sqrt{5} - 3$
<b>10p</b>	<b>5.</b> Numărul natural $a$ pentru care $a \cdot (a + 6) = 6 \cdot (a + 1,5)$ este: A. $6$ B. $3$ C. $1,5$ D. $9$
<b>10p</b>	<b>6.</b> Numărul întreg negativ $b$ pentru care $\frac{b-1}{21} = \frac{27}{7b-7}$ , este: A. $8$ B. $10$ C. $-8$ D. $-10$

**II.** La problemele următoare se cer rezolvări complete.

<b>10p</b>	<b>1.</b> Un teren are formă de pătrat. Dacă se mărește latura cu 25 m, se obține un teren cu suprafața de 0,5625 ha. Determinați latura pătratului.	
<b>10p</b>	<p><b>2.</b> În figura alăturată este reprezentată schița unui teren format prin alăturarea a trei suprafețe pătratice cu aceeași arie. Aria suprafeței terenului este 2187 m<sup>2</sup>.</p> 	
<b>5p</b>		<b>a)</b> Aflați latura unui pătrat.
<b>5p</b>		<b>b)</b> Determinați dimensiunile dreptunghiului.
<b>5p</b>	<b>c)</b> Calculați lungimea unui gard care ar înprejmui complet terenul.	
<b>20p</b>	<b>3.</b> În camera lui Călin, pe un perete cu dimensiunile 6 m și 2,4 m, este lipit un poster cu formă pătratică, având latura exprimată printr-un număr natural, în metri. Știind că suprafața posterului depășește $\frac{1}{4}$ din suprafața peretelui, calculați dimensiunile posterului.	



# 2 Ecuatii și sisteme de ecuații liniare

2.1 Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

2.2 Ecuatii de forma  $ax + b = 0$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale

2.3 Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

2.4 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații liniare



**Competențe specifice:**

1.2 2.2 3.2 4.2 5.2 6.2



2.1

# Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

## Ne amintim

- 1) Relația de egalitate, pe mulțimea numerelor reale, are proprietățile:
  - a) Orice număr real este egal cu el însuși, adică  $x = x$ .
  - b) Dacă  $x = y$ , atunci  $y = x$ .
  - c) Dacă  $x = y$  și  $y = z$ , atunci  $x = z$ .
- 2) Într-o egalitate, expresia scrisă în partea stângă a semnului „=” se numește *membrul stâng* al egalității, iar expresia scrisă în membrul drept al semnului „=” se numește *membrul drept* al acesteia.

## Descoperim, înțelegem, exemplificăm

- În rezolvarea problemelor, observăm că o informație poate fi comunicată în mai multe moduri, prin enunțuri aparent diferite. De exemplu, enunțurile „ $x + 3 = 7$ ”, „ $x - 2 = 2$ ” și „ $x = 4$ ” sunt formulate diferit, dar ne oferă aceeași informație și anume că numărul 4 este singura valoare a necunoscutei  $x$  pentru care are loc egalitatea. Despre astfel de enunțuri, vom spune că sunt echivalente. Vom scrie: „ $x + 3 = 7 \Leftrightarrow x - 2 = 2$ ” sau „ $x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 4$ ” sau „ $x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$ ”.



**A.** Pornind de la o egalitate, se pot obține egalități echivalente prin următoarele transformări:

- 1) Se adună sau se scade, din ambii membri ai egalității, același număr real.
- 2) Se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității, cu același număr real nenul.
- 3) Dacă cei doi membri ai egalității sunt numere pozitive, se pot obține egalități echivalente și astfel:
  - a) se ridică la puterea  $n$ , număr întreg, ambii membri ai egalității.
  - b) se extrage radical din ambii membri ai egalității.

În limbaj matematic, transformările enumerate pot fi formulate astfel:

1)  $x = y \Leftrightarrow x + a = y + a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ ;  
 $x = y \Leftrightarrow x - a = y - a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .

2)  $x = y \Leftrightarrow x \cdot a = y \cdot a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}^*$ ;  
 $x = y \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{a}$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}^*$ .

3) Dacă  $x > 0$  și  $y > 0$ , atunci  $x = y \Leftrightarrow x^n = y^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$ ;  
 Dacă  $x \geq 0$  și  $y \geq 0$ , atunci  $x = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$ .

### Exemple

- 1)  $x = y \Leftrightarrow x + 3 = y + 3$   
 $x = y \Leftrightarrow x - 5 = y - 5$
- 2)  $x = y \Leftrightarrow x \cdot 2,5 = y \cdot 2,5$   
 $x = y \Leftrightarrow \frac{x}{-3} = \frac{y}{-3}$
- 3)  $1,5 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1,5^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$   
 $1,2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \sqrt{1,2} = \sqrt{\frac{6}{5}}$

Pentru redactarea unor transformări echivalente, observați următoarele exemple:

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } 5x - 6 = 5y - 6 \mid +6 & \text{b) } 3 - x = 3 - y \mid -3 & \text{c) } x = y \mid :7 & \text{d) } \frac{x}{5} = \frac{y}{9} \mid \cdot (5 \cdot 9) \\
 5x = 5y \mid :5 & -x = -y \mid \cdot (-1) & \frac{x}{7} = \frac{y}{7} & 9x = 5y \\
 x = y & x = y & & 
 \end{array}$$

**B.** Fiind date două egalități, se pot obține noi egalități utile, folosind una dintre următoarele transformări:

- 1) Se adună, membru cu membru, cele două egalități.
- 2) Se scade, membru cu membru, cele două egalități.
- 3) Se înmulțesc, membru cu membru, cele două egalități.
- 4) Se împart, membru cu membru, cele două egalități.
- 5) Se ridică la putere, membru cu membru, cele două egalități.

$$\begin{array}{llllll}
 \begin{array}{l} x = y \\ a = b \end{array} \mid (+) & \begin{array}{l} x = y \\ a = b \end{array} \mid (-) & \begin{array}{l} x = y \\ a = b \end{array} \mid (\cdot) & \begin{array}{l} x = y \\ a = b \end{array} \mid (: ) & \begin{array}{l} x = y \\ a = b \end{array} \mid \\
 x + a = y + a & x - a = y - b & x \cdot a = y \cdot b & \frac{x}{a} = \frac{y}{b} & x^a = y^b \\
 & & & a \neq 0, b \neq 0 & a, b \in \mathbb{Z}^*
 \end{array}$$

**C.** Numim **identitate matematică** o egalitate care conține una sau mai multe variabile și care este adevărată pentru orice set de valori atribuite variabilelor.

**Exemple**

1. a)  $x + 0 = x$ ;    b)  $9x - 7x = 2x$ ;    c)  $x \cdot (x + 3) = x^2 + 3x$ ;    d)  $\sqrt{x^2} = |x|$   
sunt egalități care au loc pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , deci sunt identități cu o singură variabilă.
2.  $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$ , pentru orice  $a \in \mathbb{R}^*$  și  $n, p \in \mathbb{N}$ , deci este o identitate cu trei variabile.
3.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .



**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

1) Calculați  $a + b + x + y$ , știind că  $x + b = 27$  și  $y + a = 4$ .

*Soluție:* 
$$\begin{array}{l} x + b = 27 \\ y + a = 4 \end{array} \mid (+) \\
 a + b + x + y = 31$$

3) Dacă  $a = b$  și  $x = y$ , unde  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , arătați că

$$a\sqrt{x} = b\sqrt{y}.$$

*Soluție:*  $x = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$

$$\begin{array}{l} a = b \\ \sqrt{x} = \sqrt{y} \end{array} \mid (\cdot) \\
 a\sqrt{x} = b\sqrt{y}$$

2) Dacă  $3x + 2y = 7x$ , demonstrați că  $y$  este dublul lui  $x$ .

*Soluție:* 
$$\begin{array}{l} 3x + 2y = 7x \\ 2y = 4x \end{array} \mid -3x \\
 2y = 4x \mid :2 \\
 y = 2x$$

4) Calculați  $7a + 4b + 7x + 4y$  știind că  $a + x = 10$  și  $b + y = 8$ .

*Soluție:* 
$$\begin{array}{l} a + x = 10 \\ 7a + 7x = 70 \end{array} \mid \cdot 7 \quad \text{și} \quad \begin{array}{l} b + y = 8 \\ 4b + 4y = 32 \end{array} \mid \cdot 4 \\
 7a + 7x = 70 \\
 4b + 4y = 32 \end{array} \mid (+) \\
 7a + 4b + 7x + 4y = 102$$

5) Dacă  $a + b = 14$  și  $x + y = 17$ , calculați  $a + b - x - y$ .

$$\begin{array}{r} \text{Soluție: } x + y = 17 \quad | \cdot (-1) \\ -x - y = -17 \\ \quad a + b = 14 \\ \hline -x - y = -17 \quad | (+) \\ \hline a + b - x - y = -3 \end{array}$$

6) Dacă  $a + b = 5$  și  $b + c = 7$ , calculați  $7a + 10b + 3c$  și  $7a + 4b - 3c$ .

$$\begin{array}{r} \text{Soluție: } a + b = 5 \quad | \cdot 7 \quad \text{și} \quad b + c = 7 \quad | \cdot 3 \\ 7a + 7b = 35 \quad \quad \quad 3b + 3c = 21 \\ 7a + 7b = 35 \quad | (+) \quad \quad 7a + 7b = 35 \quad | (-) \\ 3b + 3c = 21 \quad \quad \quad \text{și} \quad 3b + 3c = 21 \\ \hline 7a + 10b + 3c = 56 \quad \quad 7a + 4b - 3c = 14 \end{array}$$

### Temă de portofoliu

1) Pentru fiecare dintre transformările descrise la **A.** și la **B.**, formulați câte un exemplu, urmând modelele prezentate.

2) a) Dacă  $\frac{a}{b} = \frac{8}{3}$  și  $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ , calculați  $\frac{a}{c}$ . b) Dacă  $a \cdot c = 38$  și  $b \cdot c = 19$ , calculați  $\frac{a}{b}$  și  $\frac{a+b}{a-b}$ .

### Reținem!



Pornind de la o egalitate, se pot obține egalități echivalente prin următoarele transformări:

- Se adună sau se scade, din ambii membri ai egalității, același număr real.
- Se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității cu același număr real nenul.
- Dacă cei doi membri ai egalității sunt numere **pozitive**, atunci se pot obține egalități echivalente și astfel:
  - a) Se ridică la puterea  $n$ , număr întreg, ambii membri ai egalității.
  - b) Se extrage radical din ambii membri ai egalității.

Numim **identitate matematică** o egalitate care conține una sau mai multe variabile și care este adevărată pentru orice set de valori atribuite variabilelor.



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1) Dacă  $a = 7$  și  $b + c = 77$ , calculați:  
a)  $77 \cdot a + 3 \cdot b + 3 \cdot c$ ; b)  $88 \cdot a - 7 \cdot b - 7 \cdot c$ .
- 2) Calculați numărul  $n$  știind că  $a - b - 1 = 5$  și  $n = -3 \cdot a + 19 + 3 \cdot b$ .
- 3) Se știe că  $x + 4 \cdot y = 3 \cdot y + 2 \cdot z = 14$ .  
Aflați numărul  $m = 5 \cdot x + 11 \cdot y - 6 \cdot z$ .
- 4) Numerele  $x$  și  $y$  verifică egalitatea  $x \cdot (y + 3) + y = 98$ .  
Aflați numerele naturale  $x, y$  știind că  $x < y$ .
- 5) Au loc egalitățile  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{c}{b} = \frac{7}{5}$ ,  $\frac{c}{d} = \frac{7}{11}$ ,  
 $\frac{d}{x} = \frac{11}{183}$ . Comparați numerele  $\frac{a}{x}$  și  $62^{-1}$ .
- 6) Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$  cu  $a \cdot b = 6$ ,  $b \cdot c = 12$ ,  
 $c \cdot a = 8$ .  
Aflați  $a \cdot b \cdot c$  și  $a^2b^2c + ab^2c^2 + a^2bc^2$ .
- 7) Calculați  $7a + 4b + 7x + 4y$  știind că  
 $a + x = 10$  și  $b + y = 8$ .
- 8) Dacă  $a + b = 21$  și  $x + y = 15$ , calculați  
 $a + b - x - y$ .
- 9) Dacă  $a + b = 15$  și  $b + c = 23$ , calculați  
 $7a + 10b + 3c$  și  $7a + 4b - 3c$ .
- 10) Dacă  $a - 2b = 1$ ,  $2b - 3c = 2$ ,  $3c - 4d = 2$   
și  $4d - 5e = 1$  calculați  $a - 5e$ .

2.2

# Ecuatii de forma $a \cdot x + b = 0$ , unde $a, b \in \mathbb{R}$ . Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuatii echivalente

**Ne amintim**

1) Am învățat să rezolvăm, în mulțimea numerelor raționale sau în submulțimi ale acesteia, ecuații de forma  $a \cdot x + b = 0$ , cu coeficienți raționali.

Numerele  $a$  și  $b$  se numesc **coeficienți** ai ecuației, iar  $x$  se numește **necunoscuta** ecuației.

Numărul  $b$  se mai numește **termenul liber** al ecuației.

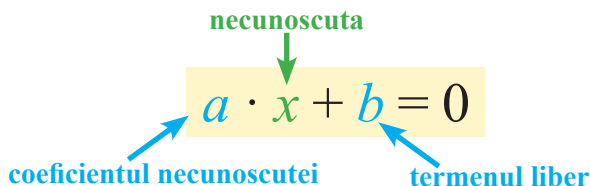
2) Două ecuații sunt echivalente dacă au același domeniu și aceleași soluții.

**Exemple**

1) În  $\mathbb{Q}$ , ecuația  $6 \cdot x + 3 = 0$  are soluția  $x = -0,5$ .

2) În  $\mathbb{Z}$ , ecuația  $3 \cdot x + 6 = 0$  are soluția  $x = -2$ .

3) În  $\mathbb{N}$ , ecuația  $2 \cdot x + 6 = 0$  nu are soluții.



a) Ecuațiile  $2x - 7 = 5$ ,  $x \in \mathbb{Z}$  și  $8 - x = 2$ ,  $x \in \mathbb{Z}$  sunt echivalente, deoarece au aceeași soluție,  $x = 6$ .

b) Ecuațiile  $2x = 8$ ,  $x \in \mathbb{Q}$  și  $x - 3 = 4$ ,  $x \in \mathbb{Q}$  nu sunt echivalente, deoarece prima are soluția  $x = 4$ , iar a doua are soluția  $x = 7$ .

Ne propunem să rezolvăm, în mulțimea numerelor reale sau în submulțimi ale mulțimii numerelor reale, ecuații de forma  $a \cdot x + b = 0$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Descoperim, înțelegem, exemplificăm**

	A. Problemă	B. Ecuație
1	Fie $D = \{-1, \sqrt{2}, 3\}$ . Determinați numerele $x \in D$ , pentru care are loc egalitatea $\sqrt{2} \cdot x + 2 = 0$ .	Rezolvați în mulțimea $D = \{-1, \sqrt{2}, 3\}$ ecuația $\sqrt{2} \cdot x - 2 = 0$ .
2	Determinați numerele reale $x$ , pentru care are loc egalitatea $-\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} = 0$ .	Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $-\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} = 0$ .

Mulțimea  $D$  căreia se dorește să aparțină soluțiile sau mulțimea pe care expresiile care apar în formularea ecuației au sens se numește **domeniul** ecuației.

Fiecare valoare, element al domeniului, pentru care se obține egalitate, se numește **soluție** a ecuației.

**Observație:** Mulțimea soluțiilor unei ecuații este o submulțime a domeniului acesteia.

A rezolva ecuația înseamnă a determina mulțimea  $S$  a tuturor soluțiilor.

Copiați pe caiet tabelul, apoi completați-l folosind modelul prezentat:

Problema	domeniul	coeficienții	termenul liber	necunoscuta
Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: $-\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3} = 0$	$\mathbb{Z}$	$-\sqrt{3}$ și $2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$x$
Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{2} \cdot t + 2 = 0$				$t$
Rezolvați în ... ecuația: .....	$\mathbb{R}$	$-7$ și $0,3$	$0,3$	$y$
Rezolvați în ... ecuația: .....	$\mathbb{Q}$	$\sqrt{2}$ și $-2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$z$

## Rezolvăm și observăm

**A.** Pentru identificarea soluțiilor ecuațiilor este foarte important **domeniul**  $D$ , în care se cere rezolvarea. Dacă nu se precizează explicit care este domeniul unei ecuații, acesta se consideră ca fiind mulțimea formată din toate valorile pentru care ecuația are sens. La majoritatea ecuațiilor pe care le vom întâlni pe parcursul clasei a VII-a, domeniul ecuației este  $\mathbb{R}$ .

1) Rezolvați, în $A = \{-1, 0, 3\}$ , ecuația $x - \sqrt{3} = 0$	$-1 - \sqrt{3} \neq 0$ ; $0 - \sqrt{3} \neq 0$ ; $3 - \sqrt{3} \neq 0$ .
2) Rezolvați, în $\mathbb{Q}$ , ecuația $x - \sqrt{3} = 0$	Dacă $x \in \mathbb{Q}$ , atunci $(x - \sqrt{3}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , deci $x - \sqrt{3} \neq 0$
3) Rezolvați ecuația $x - \sqrt{3} = 0$	Se observă ușor că $x = \sqrt{3}$ este singura soluție, număr real, a ecuației.
<b>Concluzie:</b> O ecuație poate să aibă soluții într-o mulțime și să nu aibă soluții în altă mulțime.	

**B.** Rezolvarea ecuației  $a \cdot x + b = 0$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ , în mulțimea numerelor reale.

1) Ne ocupăm, pentru început, de ecuațiile de forma  $a \cdot x + b = 0$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Folosind transformări echivalente, obținem:  $a \cdot x + b = 0 \mid -b \Leftrightarrow a \cdot x = -b \mid : a \Leftrightarrow x = -\frac{a}{b}$ , care este un număr real și care este singura soluție a ecuației. Vom scrie  $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ .

2) În practică, întâlnim situații în care unele ecuații se reduc, prin transformări echivalente, la ecuații de forma  $a \cdot x + b = 0$ , iar despre  $a$  nu știm că este nenul.

Pentru  $a = 0$ , ecuația  $a \cdot x + b = 0$  devine  $0 \cdot x + b = 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Sunt posibile următoarele cazuri:

a)  $b = 0$  și egalitatea are loc pentru orice valoare reală a lui  $x$ , deci  $S = \mathbb{R}$ .

b)  $b \neq 0$  și egalitatea nu are loc pentru nicio valoare reală a necunoscutei, deci  $S = \emptyset$ .

## Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Frecvent, ecuațiile pe care le avem de rezolvat nu sunt scrise în forma  $a \cdot x + b = 0$ , dar sunt echivalente cu ecuații de această formă. Pentru a identifica coeficienții și pentru a aplica algoritmul de rezolvare, este necesar să fie efectuate mai multe transformări echivalente. Ecuația obținută în acest fel este echivalentă cu ecuația inițială și prin urmare, va avea aceleași soluții.

Parcurgem etapele:

1) Se aduce ecuația la forma  $a \cdot x + b = 0$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2) Se aplică algoritmul de rezolvare a ecuației.

3) Se scrie mulțimea soluțiilor ecuației, având în vedere domeniul acesteia.

**Observație:** Dacă se dorește doar rezolvarea ecuației, algoritmul se poate reformula astfel:

a) Se separă termenii (în membrul stâng se vor găsi termenii care conțin necunoscuta, iar în membrul drept se vor afla numai termenii care nu conțin necunoscuta)

b) Se efectuează calculele în cei doi membri ai ecuației.

c) Se determină mulțimea soluțiilor ecuației.

**Exemplul 1:** Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $3(0,5x + 1) - 7 = 8$ .

*Soluția I:*

$$3(0,5x + 1) - 7 = 8 \mid +7 \Leftrightarrow$$

$$3(0,5x + 1) = 15 \mid :3 \Leftrightarrow$$

$$0,5x + 1 = 5 \mid -1 \Leftrightarrow$$

$$0,5x = 4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$x = 8 \Rightarrow S = \{8\}$$

*Soluția a II-a:*

$$3(0,5x + 1) - 7 = 8 \Leftrightarrow$$

$$1,5x + 3 - 7 = 8 \Leftrightarrow$$

$$1,5x - 4 = 8 \Leftrightarrow$$

$$1,5x = 12 \Leftrightarrow$$

$$x = 12 : 1,5 \Leftrightarrow$$

$$x = 8 \Rightarrow S = \{8\}$$

**Exemplu 2:** Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\frac{8x-1}{4} = \frac{6x+1}{3}$ .

*Soluție:*  $3(8x-1) = 4(6x+1) \Leftrightarrow 24x-3 = 24x+4 \Leftrightarrow -3 = 4$ , afirmație falsă, deci  $S = \emptyset$ .

**Exemplu 3:** Să se rezolve în  $\mathbb{R}$  ecuația  $5(2x+1) - 3 = 8 - 2(3-5x)$ .

*Soluție:*  $10x+5-3 = 8-6+10x \Leftrightarrow 2 = 2$ , relație adevărată pentru orice valoare reală a necunoscutei  $x$ , deci  $S = \mathbb{R}$ .

**Exemplu 4:** Să se rezolve în  $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$  ecuația  $\frac{3}{x-4} = \frac{2}{x}$ .

*Soluție:* Domeniul ecuației este  $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$  pentru că valorile 0 și 4 atribuite necunoscutei conduc la anularea numitorilor și fracțiile nu ar avea sens.

$$\frac{3}{x-4} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow 3 \cdot x = 2 \cdot (x-4) \Leftrightarrow 3 \cdot x = 2 \cdot x - 8 \Leftrightarrow x = -8, \text{ deci } S = \{-8\}.$$

Uneori, rezolvarea unor ecuații constă în rezolvarea mai multor ecuații de forma  $a \cdot x + b = 0$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Numărul soluțiilor depinde de domeniul în care se cere rezolvarea.

**Exemplu 5:** Rezolvați ecuația  $(x-1)(2x-3)(x+4) = 0$  în fiecare dintre mulțimile:  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ .

În rezolvarea ecuației, se va folosi următorul rezultat matematic:

Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere reale și  $a \cdot b = 0$ , atunci  $a = 0$  sau  $b = 0$ .

$$(x-1)(2x-3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ sau } 2x-3 = 0 \text{ sau } x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ sau } x = 1,5 \text{ sau } x = -4.$$

a) În  $\mathbb{R}$ ,  $S = \{1; -4; 1,5\}$ .      b) În  $\mathbb{Q}$ ,  $S = \{1; -4; 1,5\}$ .      c) În  $\mathbb{Z}$ ,  $S = \{1; -4\}$ .      d) În  $\mathbb{N}$ ,  $S = \{1\}$ .



## Estimarea soluției unei ecuații

Să rezolvăm următoarea problemă: O navă de pescuit poate transporta cel mult 20 de tone de pește. După ce s-a încărcat la 95% din capacitatea sa, vasul s-a întors în port. Știind că greutatea medie a unui pește este de aproximativ 700 de grame, estimați, la ordinul miilor, numărul de pești pe care i-a transportat nava.

*Soluție:* Pentru a formula o ecuație, masa unui pește și masa întregii cantități de pește vor fi exprimate în aceeași unitate de măsură. Este optim să folosim kilogramul.  $700 \text{ g} = 0,7 \text{ kg}$ ;  $20 \text{ t} = 20\,000 \text{ kg}$ .

Notăm cu  $x$  numărul peștilor transportați. Vom estima soluția ecuației  $0,7 \cdot x = \frac{95}{100} \cdot 20\,000$ .

Prin transformări echivalente, se obține  $0,7 \cdot x = 19\,000 \Leftrightarrow x = \frac{190\,000}{7}$ .

Aproximarea la ordinul miilor a numărului de pești este 27 000.



## Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm



**1** Numerele  $a, b, c, d$  sunt reale,  $d \neq 0$  și  $a = b$ .

Completați spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:

$p_1$ : „ $a + c = b + \dots$ ”;

$p_2$ : „ $b - c = a - \dots$ ”;

$p_3$ : „ $a \cdot c = b \cdot \dots$ ”;

$p_4$ : „ $b : d = a : \dots$ ”;

$p_5$ : „ $a^n = \dots^n$ ”;

$p_6$ : „Dacă  $a \geq 0, b \geq 0$  atunci  $\sqrt{a} = \dots$ ”.

**2** Se consideră ecuația  $0,25 \cdot x + 2 = 0$ .

a) Verificați dacă ecuația dată are soluții în mulțimea  $A = \{-4, 0, 4\sqrt{2}\}$ .

b) Decideți dacă ecuația dată are soluții întregi.

**3** Decideți, prin verificare, care dintre ecuațiile următoare are soluția  $x = -\sqrt{2}$ .

a)  $x + 2 = 0$ ;      b)  $2 - x = 0$ ;

c)  $2 \cdot x + \sqrt{8} = 0$ ;      d)  $\frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$ .

**4** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

- a)  $x + \sqrt{2} = \sqrt{8}$ ;      b)  $4,5 \cdot x + 9 = 13,5$   
 c)  $\sqrt{3} \cdot x - 2 = 1$ ;      d)  $-3\frac{1}{2} \cdot x - 1,5 = \sqrt{2}^2$ ;  
 e)  $\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{12} = \sqrt{27}$ ;      f)  $x \cdot \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$ ;  
 g)  $\sqrt{18} \cdot x + 9 = 0$ ;      h)  $\sqrt{24} \cdot x = 0$ .

**5** Scrieți trei ecuații de forma  $a \cdot x + b = 0$ , care admit soluții în mulțimea

$$B = \left\{ -1, 0, \sqrt{2}, \frac{5}{2} \right\}.$$

**6** Determinați mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{7} \cdot x + 1 = \sqrt{7} + 1 \right\};$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \frac{2}{5} \cdot x + 3 = 5,4 \right\};$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid 1 + \sqrt{7} \cdot x = \sqrt{8} + 1 \right\};$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{3} \cdot x}{3} - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0 \right\}.$$

**7** a) Rezolvați, în  $\mathbb{R}$ , ecuațiile  $3x - 57 = 0$  și  $-5x + 95 = 0$ , apoi scrieți,  $S_1$ , mulțimea soluțiilor primei ecuații și  $S_2$ , mulțimea soluțiilor celei de-a doua ecuații.  
 b) Stabiliți relația între mulțimile  $S_1$  și  $S_2$ .

**8** Pentru  $x \in \mathbb{R}$ , demonstrați că următoarele perechi de ecuații sunt echivalente:

a)  $-1,5 \cdot x + 0,75 = 0$  și  $\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4} = 0$ ;

b)  $\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{8} = 0$  și  $-\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ .

**9** Demonstrați că următoarele perechi de ecuații nu sunt echivalente:

a)  $3x - 6 = 0$  și  $6x - 3 = 0$ ;

b)  $\frac{x}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} = 0$  și  $9x + 1,6 = 0$ .

**10** Determinați numărul real  $a$  astfel încât ecuațiile

$$0,1 \cdot x + \frac{6}{5} = 0 \text{ și } \frac{3}{4} \cdot x + a = 0, \text{ să fie echivalente.}$$

**11** Rezolvați, în  $\mathbb{Z}$ , ecuațiile:

a)  $3x + 7 = x + 21$ ;      b)  $0,5x + 3 = 0,25x + 4$ ;

c)  $2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot x = \sqrt{48}$ ;      d)  $(x-2) \cdot (x+\sqrt{2}) = 0$ ;

e)  $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2 \cdot 3$ ;      f)  $-3 \cdot (x+1) = 2 \cdot (x+6)$ ;

g)  $\frac{x-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{x-5}{6} + \frac{1}{12}$ .

**12** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuațiile:

a)  $\sqrt{3} \cdot x + 3 = 0$ ;      b)  $-\sqrt{5} \cdot x + 10 = \sqrt{20} \cdot x - 20$ ;

c)  $\frac{y-\sqrt{2}}{3} + \frac{y+\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} + y$ ;

d)  $(y-\sqrt{3}) \cdot (y-\sqrt{5}) = 0$ ;      e)  $|7-\sqrt{7} \cdot x| = 14$ .

**13** Rezolvați, în  $\mathbb{Q}$ , ecuațiile:

a)  $\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{6}\right)$ ;

b)  $\sqrt{3} \cdot x + 1 = x + \sqrt{3}$ ;      c)  $\frac{x-2}{3} = \frac{4-x}{2}$ ;

d)  $\frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ;

e)  $\frac{3y+7}{5} - 0,1 + \frac{3-2y}{2} = 0,3 \cdot (4y-5)$ .

**14** Determinați mulțimea soluțiilor reale pentru fiecare dintre ecuațiile următoare:

a)  $\frac{7}{x-3} = \frac{8}{x-5}$ ;      b)  $(x+\sqrt{2})^2 = 8$ ;

c)  $|x-4| - |x+1| = 0$ ;

d)  $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} + \dots + \frac{x+9}{10} - 9 = 0$ .

**15** a) Scrieți o ecuație care admite o singură soluție în mulțimea  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

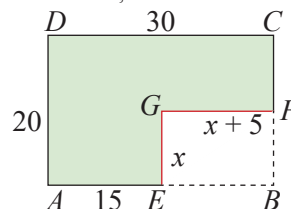
b) Scrieți o ecuație care admite o singură soluție în mulțimea  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ .

c) Scrieți o ecuație care admite o infinitate de soluții reale.

d) Scrieți o ecuație care nu admite nicio soluție reală.

**16** Determinați numărul real  $m$  pentru care numărul  $-3$  este soluție a ecuației  $x - 2 = m \cdot x + 4$ , având necunoscuta  $x$ .

**17** a) Formulați o ecuație cu necunoscuta  $x$ , reductibilă la o ecuație de forma  $a \cdot x + b = 0$ , folosind datele din figura de mai jos, știind că  $ABCD$  și  $BEGF$  sunt dreptunghiuri.



b) Rezolvați ecuația obținută la subpunctul a).  
 c) Determinați lungimile segmentelor  $GE$  și  $CF$ .

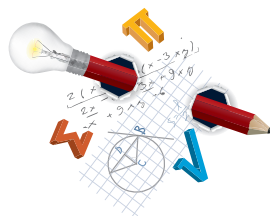


I. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p	1. Dintre ecuațiile următoare admite soluție numărul $-2$ : A. $2 \cdot x - 4 = 0$ B. $\sqrt{3} \cdot x - \sqrt{12} = 0$ C. $ -4  \cdot x = 8$ D. $5 \cdot x + 10 = 0$
5p	2. Ecuația $5 \cdot x + 3 = x - m$ admite soluția $-1$ , pentru $m$ egal cu: A. 1      B. 2      C. $-1$ D. $-2$
5p	3. Soluția ecuației $2 \cdot x - \frac{1}{2} = 3 \cdot x - \frac{1}{3}$ este numărul: A. 1      B. $-\frac{1}{3}$ C. 6      D. $-\frac{1}{6}$
5p	4. Valoarea numărului $a$ , pentru care ecuațiile $8 - 3 \cdot x = 11$ și $2 \cdot x + a = 3 \cdot a \cdot x + 10$ sunt echivalente, este: A. 1      B. 2      C. 3      D. 4
5p	5. Soluția ecuației $ 3 \cdot x - 1  + 1 = 6$ este mulțimea: A. $\left\{-\frac{4}{3}, 2\right\}$ B. $\left\{-\frac{3}{4}, 2\right\}$ C. $\left\{-\frac{4}{3}, -1\right\}$ D. $\left\{-\frac{3}{4}, -2\right\}$
5p	6. Dacă $\sqrt{x + 222} = 22$ , atunci $x$ este: A. 264      B. 262      C. $-200$ D. 200

II. La problemele următoare se cer rezolvări complete.

10p	1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
10p	a) $5 \cdot \{4 \cdot [3 \cdot (2 \cdot x + 1) + 1] + 1\} - 44 = 876$
10p	b) $\frac{x-1}{4} + 1 = x - \frac{x-3}{2} + 0,25$
10p	c) $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (x-2) + \sqrt{48} = \sqrt{12}$
10p	d) Stabiliți dacă printre cele trei ecuații există ecuații echivalente.
	2. Fie numerele $n = \frac{3 \cdot a + 19}{5}$ și $m = \frac{2 \cdot a + 91}{5}$ , unde $a$ este număr natural.
10p	a) Dacă $n \in \mathbb{N}$ , arătați că și $m \in \mathbb{N}$ .
10p	b) Determinați numărul $a \in \mathbb{N}$ pentru care $n$ și $m$ sunt numere naturale consecutive.



2.3

# Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute. Rezolvarea prin metoda substituției și/sau prin metoda reducerii

## L1 Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

### Rezolvăm și observăm

#### Problemă:

La o partidă de baschet, Adrian marchează în total 20 de puncte din aruncări de 3 puncte și din aruncări de 2 puncte (cel puțin una de fiecare fel).  
Aflați câte aruncări de 3 puncte și câte aruncări de 2 puncte a reușit Adrian.



#### Reformulare:

Dacă vom nota cu  $x$  numărul aruncărilor reușite de 3 puncte și cu  $y$  numărul aruncărilor reușite de 2 puncte, atunci trebuie să aflăm valorile naturale nenule ale lui  $x$  și ale lui  $y$  pentru care are loc egalitatea  $3x + 2y = 20$ .

**Soluție:** Cum  $x$  și  $y$  sunt numere naturale nenule, deducem ușor că  $x$  este număr par și că  $2 \leq x \leq 6$ .

Vom obține:  $x = 2$  și  $y = 7$  sau  $x = 4$  și  $y = 4$  sau  $x = 6$  și  $y = 1$ .

Această scriere a soluțiilor nu este una practică și poate fi înlocuită cu:  $(2, 7), (4, 4), (6, 1)$ .

Analizând problema rezolvată, putem observa:

- Ecuatia  $3x + 2y = 20$  stabilește dependența între punctajul total, de 20 de puncte, numărul aruncărilor reușite de 3 puncte și numărul aruncărilor reușite de 2 puncte.
- Ecuatia are mai multe soluții, deci și problema are mai multe soluții.
- Fiecare valoare atribuită lui  $x$  realizează egalitatea (verifică ecuația) doar împreună cu o anumită valoare atribuită lui  $y$ . Deci fiecare soluție a ecuației (și a problemei) constă într-o pereche de numere, scrise în ordinea în care apar necunoscutele în ecuație (o *pereche ordonată*).

Se numește **ecuație liniară** cu două necunoscute o ecuație de forma  $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ , unde  $a, b, c$  sunt numere reale.

Numerele reale  $a, b, c$  se numesc **coeficienții ecuației**,  $c$  se mai numește și **termenul liber** al ecuației, iar  $x$  și  $y$ , în această ordine, sunt **necunoscutele** ecuației.

#### Observații:

- Necunoscutele  $x$  și  $y$  desemnează numere reale sau elemente ale unor submulțimi de numere reale.
- Necunoscutele se pot nota și cu alte litere. Este, însă, esențială ordinea în care acestea apar în ecuație.

**Exemplu:** Completați căsuțele libere ale tabelului:

Ecuatia	necunoscutele	coeficienții	termenul liber
1) $2x + 3y - 8 = 0$	$x$ și $y$	$a = 2; b = 3; c = -8$	$c = -8$
2) $9x - 4,5y = 1 \Leftrightarrow 9x - 4,5y - 1 = 0$			
3) $y\sqrt{3} + 2t = -1 \Leftrightarrow$	$y$ și $t$		
4) ..... = 0	$x$ și $y$	$a = -1; b = \sqrt{2}; c = 1 - \sqrt{2}$	$c = 1 - \sqrt{2}$

Ne propunem să răspundem la următoarele întrebări:

- Ce reprezintă o soluție a unei ecuații liniare cu două necunoscute?
- Câte soluții are o astfel de ecuație?

## Rezolvăm și observăm



1) Determinați numerele naturale  $x$  și  $y$  pentru care  $x - y = 5$ .

Observăm că:  $5 - 0 = 5$ ;  $6 - 1 = 5$ ;  $7 - 2 = 5$ ;  $8 - 3 = 5$ ;  $9 - 4 = 5 \dots$

Pentru fiecare număr natural  $x \geq 5$ , găsim numărul natural  $y = x - 5$ , astfel încât să aibă loc egalitatea. Fiecare pereche ordonată de numere **naturale**  $(x, x - 5)$  va fi o soluție a ecuației.

2) Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  pentru care  $x - y = 5$ .

Pe lângă perechile de numere identificate la 1), pentru fiecare număr real  $x$ , găsim numărul real  $y = x - 5$ , astfel încât să aibă loc egalitatea. Fiecare pereche ordonată de numere **reale**  $(x, x - 5)$  va fi o soluție a ecuației.

*Exemple de soluții:*  $(8, 3)$ ,  $(5 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

## Descoperim, înțelegem, exemplificăm

*Comentariu:* Să remarcăm faptul că *soluțiile ecuațiilor liniare* cu două necunoscute sunt perechi de numere.

Scriind că  $(0, 7)$  este soluție a ecuației, vom înțelege că dacă primei necunoscute (de regulă  $x$ ), i se atribuie valoarea 0, iar celei de-a doua necunoscute (de regulă  $y$ ) i se atribuie valoarea 7, atunci se obține egalitate (este verificată ecuația).

a) Perechea  $(a, b)$  este ordonată dacă și numai dacă pentru  $a \neq b$  are loc  $(a, b) \neq (b, a)$ .

b) Două perechi ordonate  $(a, b)$  și  $(c, d)$  **sunt egale** dacă și numai dacă  $a = c$  și  $b = d$ .

**Exemplu:**  $(1, 3) \neq (3, 1)$

**Exemplu:** Perechile  $(4^2, 1^5)$  și  $(2^4, 5^0)$  sunt egale

Se numește **soluție** a unei ecuații liniare cu două necunoscute o *pereche ordonată* de numere care verifică acea ecuație.

**Exemplu:** Perechile  $(0, 7)$ ,  $(1, 5)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 1)$  sunt singurele soluții ale ecuației  $2x + y = 7$ , unde  $x$  și  $y$  sunt numere naturale scrise cu o cifră.

Dacă  $x$  și  $y$  desemnează numere reale, atunci ecuația de gradul întâi cu două necunoscute are o **infinitate de soluții**.

**Exemplu:** Orice pereche de forma  $(\alpha, 7 - 2\alpha)$ , unde  $\alpha \in \mathbb{R}$ , este soluție a ecuației  $2x + y = 7$ , unde  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Dacă  $a = 0$ , ecuația devine  $0 \cdot x + b \cdot y + c = 0$ , iar soluțiile ecuației sunt de forma  $\left(x, -\frac{c}{b}\right)$ .

Dacă  $b = 0$ , ecuația devine  $a \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$ , iar soluțiile ecuației sunt de forma  $\left(-\frac{c}{a}, y\right)$ .

Mulțimea tuturor perechilor ordonate care verifică ecuația se numește **mulțimea soluțiilor** ecuației.

O ecuație liniară cu două necunoscute se obține, de fapt, formulând matematic modul în care depind una de alta două mărimi.

**Problemă:** Pe scara A a blocului în care locuiește Sorana, sunt 16 apartamente de câte 2 sau 3 camere, în total 36 de camere. Aflați câte apartamente au două camere și câte apartamente au trei camere.

**Soluție:** Considerăm  $x$  numărul apartamentelor cu două camere și  $y$  numărul apartamentelor cu 3 camere.

Atunci,  $x + y = 16$  și  $2x + 3y = 36$ .

Cum  $x$  și  $y$  reprezintă numere naturale, este ușor să observăm că  $x = 12$  și  $y = 4$ .

S-au stabilit următoarele convenții:

- 1) Se scriu ecuațiile una sub alta, asociate printr-o acoladă, înțelegând prin asta faptul că trebuie să fie satisfăcute simultan.
- 2) Ordinea termenilor este aceeași în cele două ecuații. Vom spune că am scris un sistem de două ecuații liniare, cu două necunoscute.
- 3) Scriem soluțiile sistemului, ca și la ecuațiile liniare, sub formă de perechi ordonate.

Două ecuații liniare cu două necunoscute formează un **sistem de ecuații liniare cu două necunoscute**. Forma generală a unui sistem de ecuații liniare cu două necunoscute este  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ , unde  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Numerele  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  se numesc coeficienții sistemului;  $a_1, b_1, a_2, b_2$  se numesc **coeficienții necunoscutelor**, iar  $c_1, c_2$  se numesc **termeni liberi**.

**Definiție:** O pereche ordonată de numere reale se numește **soluție a sistemului** dacă este soluție pentru ambele ecuații care formează sistemul.

A rezolva un sistem înseamnă a găsi mulțimea tuturor soluțiilor sale. Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații este intersecția mulțimilor soluțiilor celor două ecuații.

Două sisteme de ecuații liniare se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

**Observație:** Dacă înlocuim o ecuație a sistemului cu o ecuație echivalentă cu ea, sau dacă înlocuim ambele ecuații ale sistemului cu ecuații echivalente, obținem un sistem echivalent cu cel inițial.

**Exemplu:** Fie sistemul:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 7x - 6y = 20 \end{cases} \text{ Prin transformările } \begin{cases} 3x + 4y = 2 & | \cdot 3 \\ 7x - 6y = 20 & | \cdot 2 \end{cases} \text{ obținem sistemul echivalent } \begin{cases} 9x + 12y = 6 \\ 14x - 12y = 40 \end{cases}$$

Prin adunarea membru cu membru a ecuațiilor unui sistem se obține o nouă ecuație.

Dacă înlocuim una din ecuațiile sistemului cu această nouă ecuație, se obține un sistem echivalent cu cel inițial.

**Exemplu:** Fie sistemul  $\begin{cases} -5x + 9y = 4 \\ 7x - 5y = 2 \end{cases}$ . Adunând membru cu membru cele două ecuații obținem  $2x + 4y = 6$ .

Sistemele  $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 7x - 5y = 2 \end{cases}$  și  $\begin{cases} -5x + 9y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$  sunt echivalente cu cel inițial. Este suficient să determinăm mulțimea soluțiilor unuia dintre ele.



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1 Verificați care dintre perechile  $(4, 7)$ ,  $(3, -4)$ ,  $(2, -7)$ ,  $(7, 4)$  sunt soluții ale ecuației  $4x - 2y = 20$ .
- 2 Verificați care dintre perechile  $(\sqrt{3}, 1)$ ,  $(1, \sqrt{3})$ ,  $(2\sqrt{3}, -0,5)$ ,  $(-\sqrt{3}, 4)$  sunt soluții ale ecuației  $x\sqrt{3} + 2y = 5$ .
- 3 Arătați că perechea  $(3 - 2m, m)$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ , este soluție a ecuației  $x + 2y = 3$ .
- 4 Verificați dacă perechea de numere  $(2\sqrt{2}, 0)$  este soluție a sistemului de ecuații: 
$$\begin{cases} x\sqrt{2} - y = 4 \\ 0,5 \cdot x + 5y = \sqrt{2} \end{cases}$$
- 5 Se consideră sistemele de două ecuații liniare, cu necunoscutele  $x$  și  $y$ : 
$$1) \begin{cases} x + y = 9 \\ 2x - y = 0 \end{cases}; 2) \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x + y = 9 \end{cases}; 3) \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$
 Alegeți, prin verificare, sistemul pentru care perechea  $(5; 4)$  este soluție.
- 6 a) Determinați două perechi de numere naturale care verifică egalitatea  $(2x + y - 4)^2 = 0$ .  
b) Scrieți într-un sistem, ecuațiile obținute din egalitatea  $|x - y + 1| + (2x + y - 4)^2 = 0$ .  
c) Verificați dacă perechile găsite la subpunctul a) sunt soluții ale sistemului obținut.

### Ne amintim

Considerăm un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute.

- Dacă înlocuim una sau ambele ecuații ale sistemului cu ecuații echivalente, obținem un sistem echivalent cu cel inițial.
- Prin adunarea membru cu membru a celor două ecuații ale sistemului se obține o nouă ecuație.
- Dacă înlocuim una din ecuațiile sistemului cu această nouă ecuație, se obține un sistem echivalent cu cel inițial.

A rezolva un sistem de ecuații liniare înseamnă a determina mulțimea tuturor soluțiilor sale.

Se folosesc, de regulă, **metoda reducerii** sau **metoda substituției** și tehnici de transformare a egalităților în egalități echivalente.

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

#### Metoda substituției - Algoritm de rezolvare



1. Se alege necunoscuta pe care vrem să o înlocuim (să o substituim).
2. Folosind una dintre ecuații, se exprimă necunoscuta aleasă în funcție de cealaltă.
3. Se înlocuiește în ecuația rămasă necunoscuta aleasă, folosind relația găsită.
4. Se rezolvă ecuația obținută și se află una dintre necunoscute.
5. Se înlocuiește valoarea găsită în una dintre ecuații și se află cealaltă necunoscută.
6. Se scrie soluția sistemului.

$$\text{Fie sistemul } \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 7y = 3 \end{cases}$$

Alegem să înlocuim necunoscuta  $x$ .

Din prima ecuație deducem  $x = 2 + 3y$ .

În ecuația  $2x - 7y = 3$  vom înlocui pe  $x$  cu  $2 + 3y$  și obținem  $2(2 + 3y) - 7y = 3$

$$\begin{aligned} 4 + 6y - 7y &= 3 \\ -y &= -1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

În relația  $x = 2 + 3y$ , înlocuim pe  $y$  cu 1 și obținem  $x = 5$ .

$x = 5, y = 1$ , deci  $S = \{(5, 1)\}$ .

#### Metoda reducerii - Algoritm de rezolvare

1. Dacă este necesar, se rescriu ecuațiile astfel încât necunoscutele notate cu aceeași literă să fie plasate pe aceeași poziție ( $x$  sub  $x$  și  $y$  sub  $y$ ).
2. Se alege una dintre necunoscute cu scopul de a o reduce.
3. Dacă este necesar, se înmulțesc sau se împart ecuațiile cu numere nenule, astfel încât coeficienții necunoscutei alese să devină numere opuse, în cele două ecuații.

$$\text{Sistemul } \begin{cases} 7y + 2x = 8 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases} \text{ se rescrie } \begin{cases} 2x + 7y = 8 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 8 \\ 3x - 4y = 5 \end{cases} \text{ Alegem necunoscuta } x.$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 8 & | \cdot 3 \\ 3x - 4y = 5 & | \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 21y = 24 \\ -6x + 8y = -10 \end{cases}$$

4. Se adună cele două ecuații și se reduce necunoscuta aleasă.

$$\begin{cases} 6x + 21y = 24 \\ -6x + 8y = -10 \end{cases} (+)$$

$$29y = 14$$

5. Se rezolvă ecuația obținută.

$$y = \frac{14}{29}$$

6. Se reiau pașii 3, 4 și 5 pentru cealaltă necunoscută.

$$\begin{cases} 2x + 7y = 8 \mid \cdot 4 \\ 3x - 4y = 5 \mid \cdot 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 28y = 32 \\ 21x - 28y = 35 \end{cases} (+)$$

$$29x = 67 \Rightarrow x = \frac{67}{29}$$

7. Se scrie soluția sistemului.

$$x = \frac{67}{29}, y = \frac{14}{29} \text{ și } S = \left\{ \left( \frac{67}{29}, \frac{14}{29} \right) \right\}$$

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

**Observație:** În practică, pentru economie de timp, pasul 6 din algoritmul de rezolvare prin metoda reducerii poate fi înlocuit cu: „Se înlocuiește valoarea aflată într-una din ecuații și se află cealaltă necunoscută”.

**Exemplu:** 
$$\begin{cases} 5x - 3y = 7 \mid \cdot 2 \\ 3x + 2y = 8 \mid \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x - 6y = 14 \\ 9x + 6y = 24 \end{cases} (+)$$

$$19x = 38 \Rightarrow x = 2$$

Înlocuim pe  $x$  cu 2 în ecuația  $3x + 2y = 8$  și obținem  $6 + 2y = 8$ , deci  $y = 1$  și  $S = \{(2, 1)\}$ .

Un sistem de ecuații liniare cu două necunoscute poate avea:

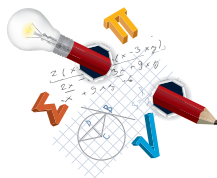
- a) o singură soluție      a) Sistemul  $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$  are soluția unică  $S = \{(2, 1)\}$ .
- b) o infinitate de soluții      b) Sistemul  $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ -2x - 4y = -18 \end{cases}$  are o infinitate de soluții.

Ecuațiile care îl alcătuiesc sunt echivalente.

$$S = \left\{ \left( m, \frac{9-m}{2} \right) \mid m \in \mathbb{R} \right\} \text{ sau } S = \{(9 - 2a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

- c) poate să nu aibă nicio soluție      c) Sistemul  $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$  nu are nicio soluție. Scăzând cele două ecuații, obținem o propoziție falsă: „ $8 - 5 = 0$ ”. Deci  $S = \emptyset$ .

**Observație:** Dacă  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ,  $a'$  și  $b'$  fiind nenule, atunci sistemul  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  are soluție unică.





**1** Se consideră sistemele de ecuații:

$$a) \begin{cases} x = 2 \\ y + 1 = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Rezolvați sistemele și scrieți mulțimea soluțiilor pentru fiecare sistem.

**2** Scrieți un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, care să admită soluția  $(1; -1)$ .

**3** Scrieți următoarele sisteme de ecuații liniare într-o formă convenabilă, apoi rezolvați-le, prin metoda substituției.

$$a) \begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + y + 13 = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} \frac{2x + y - 1}{x + 2} = 2 \\ 5x - y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}; \quad e) \begin{cases} \frac{1}{x} + y = 12 \\ \frac{1}{x} - 2y = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2(x + y - 1) - y = -3 \\ 3(x - y) - y = -3x \end{cases}$$

**4** Rezolvați prin metoda substituției:

$$a) \begin{cases} 2(x + y + 1) - 3(2x - y - 3) = 12 \\ 4(2x - y - 1) + 3(3 - x - y) = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{5} \cdot y = 7 \\ \sqrt{5} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} \frac{x + 3}{y - 1} = \frac{x}{y - 8} \\ x - 4 \cdot y = 6 \end{cases}$$

**5** Se consideră numerele reale  $x, y$  care verifică simultan ecuațiile:

$$(1) \quad x + y = 101 \quad (2) \quad x - y = 23$$

a) Adunați, membru cu membru, cele două egalități, rezolvați ecuația obținută și aflați valoarea reală a lui  $x$ .

b) Scădeți, membru cu membru, cele două egalități, rezolvați ecuația obținută și aflați valoarea reală a lui  $y$ .

c) Scrieți mulțimea soluțiilor sistemului format cu cele două ecuații liniare.

**6** Rezolvați, prin metoda reducerii, următoarele sisteme de ecuații liniare:

$$a) \begin{cases} x + 2y = 11 \\ 8x - 2y = -2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x + 1 = 3y - 7 \\ 3(x - y) + 1 = x + y - 11 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 3y = -10 \\ -x + 2y = -5 \end{cases} \quad e) \begin{cases} 6x + 7y = 4 \\ -2x + 9y = -24 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x - 3y = 7,5 \\ 5x + y = -4,1 \end{cases} \quad f) \begin{cases} 3x + 11y = -1 \\ -2x + 9y = 17 \end{cases}$$

**7** Rezolvați, prin metoda reducerii, următoarele sisteme de ecuații liniare:

$$a) \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 13 \\ -\frac{x}{2} + y = 4 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad c) \begin{cases} -x + \frac{y}{3} = 0, (3) \\ \frac{x}{2} - y = -\frac{25}{18} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3(x + y - 1) = 2x - y + 6,5 \\ -2x + 9y = -24 \end{cases}$$

**8** Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru fiecare din situațiile:

$$a) \quad |a - 1| + |a^2 - b^2| = 0$$

$$b) \quad \left| \frac{a - 2}{b - 3} - \frac{1}{5} \right| + \left| \frac{a + 3}{b + 4} - \frac{2}{5} \right| = 0.$$

**9** Rezolvați următoarele sisteme de ecuații liniare, prelucrând mai întâi ecuațiile și alegând convenabil metoda de rezolvare.

$$a) \begin{cases} 2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot \left( y + \frac{1}{3} \right) = 4 \\ 12 - 6 \cdot \left( y - \frac{1}{3} \right) = 4 \cdot (x + 1) \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - \frac{3}{4} \cdot (x - y + 1) = y - 2 \\ y - \frac{2}{3} \cdot (y - x - 1) = x + 3 \end{cases}$$





**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

**I.** La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

<b>5p</b>	<b>1.</b> Perechea (3, 1) este soluție a ecuației: A. $3 \cdot x + y = 11$ B. $3 \cdot x - y = 11$ C. $3 \cdot x + y = 10$ D. $3 \cdot x - y = 11$
<b>5p</b>	<b>2.</b> Sistemul $\begin{cases} a \cdot x + y = 5 \\ 2 \cdot x + b \cdot y = 7 \end{cases}$ admite soluția (-1, 3). Atunci, $a + b$ este: A. 0      B. 1      C. 2      D. 3
<b>5p</b>	<b>3.</b> Soluția sistemului $\begin{cases} 4 \cdot x + y = 7 \\ 2 \cdot x - y = 5 \end{cases}$ este perechea de numere: A. (2, 1)      B. (1, 2)      C. (2, -1)      D. (-1, 2)
<b>5p</b>	<b>4.</b> Numerele reale $a$ și $b$ care verifică egalitatea $ a - b + 1  +  a + 2 \cdot b - 3  = 0$ , sunt: A. $a = \frac{4}{3}, b = \frac{1}{3}$ ;      B. $a = -\frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$ ;      C. $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$ ;      D. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$ .
<b>5p</b>	<b>5.</b> Numărul $\overline{ab}$ care are suma cifrelor 13 și verifică egalitatea $\overline{ab} - \overline{ba} = 27$ , este: A. 85      B. 76      C. 49      D. 94
<b>5p</b>	<b>6.</b> Are loc egalitatea $2 \cdot a \cdot \sqrt{5} + b - 1 = b \cdot \sqrt{5} - 3 + a$ pentru: A. $a = -2, b = 4$ B. $a = -2, b = -4$ C. $a = 2, b = 4$ D. $a = 2, b = -4$

**II.** La problemele următoare se cer rezolvări complete.

<b>20p</b>	<b>1.</b> Fie ecuația $3x - 4y + 5 = 0$ . Completați tabelul alăturat astfel încât fiecare pereche $(x, y)$ să fie soluție a ecuației.	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="background-color: #ffffcc;"><math>x</math></td> <td>-3</td> <td></td> <td>0,6</td> <td></td> <td><math>1 + 4\sqrt{2}</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="background-color: #ffffcc;"><math>y</math></td> <td></td> <td>-1</td> <td></td> <td>1,4</td> <td></td> <td><math>a</math></td> </tr> </table>	$x$	-3		0,6		$1 + 4\sqrt{2}$		$y$		-1		1,4		$a$
$x$	-3		0,6		$1 + 4\sqrt{2}$											
$y$		-1		1,4		$a$										
<b>20p</b>	<b>2.</b> Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x + \frac{5 \cdot y - 1}{3} = -\frac{2}{3} \\ \frac{2 \cdot x + 3}{2} - 3 \cdot y = 10,5 \end{cases}$ .															
<b>20p</b>	<b>3.</b> Aflați numerele reale $a$ și $b$ știind că $\frac{a+1}{b} = \frac{1}{4}$ , $\frac{a}{b+1} = \frac{1}{5}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ .															



## Ne amintim

Multe dintre problemele întâlnite în practică pot fi rezolvate matematic, fie prin metode aritmetice, fie prin metode algebrice.

Atunci când problema poate fi reformulată printr-o ecuație liniară cu o necunoscută și cu coeficienți raționali, iar soluțiile problemei sunt numere raționale, rezolvarea problemei presupune respectarea algoritmului alăturat.

**Pasul 1.** Stabilirea necunoscutei

**Pasul 2.** Scrierea ecuației

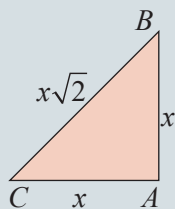
**Pasul 3.** Rezolvarea ecuației

**Pasul 4.** Verificarea soluției și interpretarea rezultatului

Vom deduce algoritmul de rezolvare a unei probleme în următoarele situații:

- atunci când problema poate fi reformulată printr-o ecuație liniară cu o necunoscută și cu coeficienți reali, iar soluțiile problemei sunt numere reale;
- atunci când problema poate fi reformulată printr-un set de două ecuații liniare cu două necunoscute și cu coeficienți reali (un sistem de două ecuații liniare, cu două necunoscute), iar soluțiile problemei sunt perechi de numere reale.

**Problemă:** Un triunghi dreptunghic isoscel are perimetrul  $6 + 3\sqrt{2}$  (m). Aflați laturile triunghiului.



**Soluție:** Vom rezolva problema urmând algoritmul descris mai sus.

**Pasul 1.** Notăm cu  $x$  lungimea unei catete (necunoscuta).

**Pasul 2.** Folosind teorema lui Pitagora, lungimea ipotenuzei este  $x\sqrt{2}$ .

Perimetrul triunghiului este  $\mathcal{P} = x + x + x\sqrt{2}$

Am identificat ecuația:  $2x + x\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2}$

**Pasul 3.**  $2x + x\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x(2 + \sqrt{2}) = 3(2 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow x = 3$ .

**Pasul 4.**  $x = 3 \Rightarrow AB = AC = 3$  (m) și  $BC = 3\sqrt{2}$  (m).

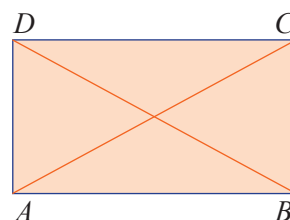
Verificare:  $\mathcal{P} = x + x + x\sqrt{2} = 3 + 3 + 3\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2}$  (m)

## Să nu ne pripim!

Uneori, verificarea soluției este omisă, ea nefiind obligatorie. Totuși, este foarte utilă, deoarece permite corectarea eventualelor greșeli.

**Problema 1:** Darius trebuie să realizeze un cadru dreptunghiular și diagonalele acestuia dintr-o tijă metalică cu lungimea de 10 m, folosind toată tija, ca în figura alăturată. Lungimea dreptunghiului este egală cu dublul lățimii.

- Arătați că lungimea dreptunghiului este mai mică de doi metri.
- Cu ajutorul calculatorului, exprimați lungimea dreptunghiului prin rotunjire, la două zecimale.



**Soluție:** a) Notăm cu  $x$  lățimea dreptunghiului, deci  $AD = BC = x$  și  $AB = DC = 2x$ .

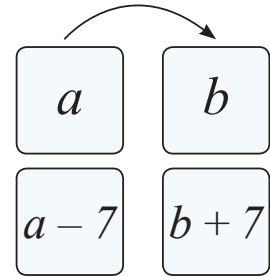
Din teorema lui Pitagora, se obține  $AC = BD = x\sqrt{5}$ .

Avem:  $AB + BC + CD + AD + AC + BD = 10 \Rightarrow 6x + 2x\sqrt{5} = 10 \mid : 2 \Rightarrow 3x + x\sqrt{5} = 5$ , adică  $x = \frac{5}{3 + \sqrt{5}}$ .

Din  $\sqrt{5} > 2$ , rezultă  $3 + \sqrt{5} > 5$ , deci  $x = \frac{5}{3 + \sqrt{5}} < \frac{5}{5} = 1$  și  $2x < 2$ . Lungimea este  $AB = 2x$ , prin urmare este mai mică de 2 metri.

b) Cu ajutorul calculatorului, obținem lungimea dreptunghiului  $AB = 2x \approx 1,91$ .

**Problema 2:** Andrei și Bogdan au împreună 100 de lei. Dacă Andrei îi dă lui Bogdan 7 lei, Andrei va avea triplul sumei lui Bogdan. Ce sumă avea fiecare la început?



**Soluție:** Notăm cu  $a$  suma de bani pe care a avut-o Andrei și cu  $b$  suma pe care a avut-o Bogdan. Atunci,  $a + b = 100$ . După ce Andrei îi dă lui Bogdan 7 lei, sumele vor fi  $a - 7$ , respectiv  $b + 7$ . Deoarece suma lui Andrei devine egală cu triplul sumei lui Bogdan, avem  $a - 7 = 3(b + 7)$ .

Obținem sistemul de ecuații liniare  $\begin{cases} a + b = 100 \\ a - 7 = 3(b + 7) \end{cases}$ . Rezolvând sistemul, obținem  $a = 82$  și  $b = 18$ , adică

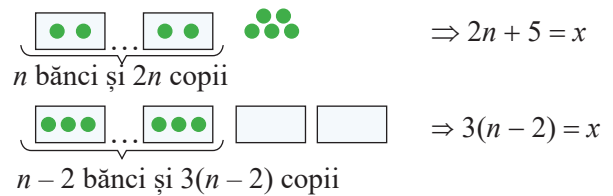
Andrei a avut 82 de lei și Bogdan a avut 18 lei.

**Problema 3:** Dacă elevii unei clase se așază câte doi în bancă, vor rămâne cinci elevi în picioare. Dacă se așază câte trei într-o bancă, vor rămâne două bănci libere. Aflați numărul elevilor din clasă.

**Soluție:** Notăm  $x =$  numărul elevilor și  $n =$  numărul de bănci.

Obținem sistemul  $\begin{cases} 2n + 5 = x \\ 3(n - 2) = x \end{cases}$

$\Rightarrow 2n + 5 = 3(n - 2) \Rightarrow n = 11$  și  $x = 27$



**Problema 4:** Un bazin al unui ștrand poate fi umplut, folosind două robinete cu debit constant, în 5 ore. Dacă unul dintre robinete funcționează 7 ore singur, apoi este deschis și al doilea, atunci ar fi nevoie de încă trei ore pentru ca, împreună, să umple bazinul. Aflați în câte ore ar umple bazinul fiecare robinet.

**Soluție:** Notăm cu  $t_1$  timpul (exprimat în ore) necesar umplerii bazinului prin funcționarea primului robinet și cu  $t_2$  timpul necesar umplerii bazinului prin funcționarea celui de-al doilea robinet. Fie  $C$  capacitatea bazinului.

Cantitatea de apă care curge, într-o oră, prin fiecare dintre cele două robinete este  $\frac{C}{t_1}$ , respectiv  $\frac{C}{t_2}$ .

Se formează sistemul de ecuații:  $\begin{cases} 5 \cdot \frac{C}{t_1} + 5 \cdot \frac{C}{t_2} = C \mid : C \\ 7 \cdot \frac{C}{t_1} + 3 \cdot \frac{C}{t_1} + 3 \cdot \frac{C}{t_2} = C \mid : C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{t_1} + \frac{5}{t_2} = 1 \\ \frac{10}{t_1} + \frac{3}{t_2} = 1 \end{cases}$

În exemplul nostru, notăm  $\frac{1}{t_1} = x$  și  $\frac{1}{t_2} = y$  și obținem sistemul  $\begin{cases} 5x + 5y = 1 \\ 10x + 3y = 1 \end{cases}$ , cu soluția  $x = \frac{2}{35}$  și  $y = \frac{1}{7}$ .

Revenind,  $t_1 = 17,5$  și  $t_2 = 7$ .

În concluzie, primul robinet poate umple bazinul în 17,5 ore, iar cel de-al doilea poate umple bazinul în 7 ore.

**Observație:** Unele probleme pot conduce la sisteme care nu au forma celor studiate de noi. Pentru rezolvarea acestora, se pot face unele transformări, artificii, notații care permit tratarea lor ca sisteme de ecuații liniare.

**Problema 5:** La festivitatea de absolvire a clasei a VII-a, s-au oferit premianților 18 buchete de flori, formate din 5 trandafiri albi sau din 7 trandafiri galbeni. Știind că, în total, au fost oferiți 116 trandafiri, aflați numărul buchetelor albe și numărul buchetelor galbene.

**Soluție:** Notăm cu  $x$  numărul buchetelor albe și cu  $y$  numărul buchetelor galbene. Rezultă 
$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 5x + 7y = 116 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, obținem  $x = 5$  și  $y = 13$ , deci s-au oferit 5 buchete albe și 13 buchete galbene.

Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor sau cu ajutorul sistemelor de ecuații liniare presupune parcurgerea algoritmului descris, sintetic, mai jos.

### Reținem!



#### Pasul 1: Observarea și înțelegerea problemei

Stabilirea și notarea necunoscutelor.

Se citește cu atenție enunțul.  
Se identifică ipoteza și concluzia.  
Se identifică mărimile necunoscute.

#### Pasul 2: „Traducerea” în limbaj matematic

Scrierea ecuațiilor  
Scrierea sistemului de ecuații

Se exprimă cât mai clar legăturile dintre date, folosind desene, scheme, vizualizări.  
Se transpun în limbaj matematic relațiile dintre valorile mărimilor necunoscute.

#### Pasul 3: Realizarea raționamentului și redactarea

Rezolvarea ecuației/sistemului de ecuații

Se rezolvă ecuația/sistemul de ecuații, folosind metoda substituției, metoda reducerii sau o variantă mixtă.  
Se redactează clar pașii parcurși, se scrie soluția sau mulțimea soluțiilor.

#### Pasul 4: Verificare și autoevaluare

Verificarea soluției și interpretarea rezultatului

Se verifică soluția găsită, folosind ipoteza problemei.  
Se interpretează rezultatul.

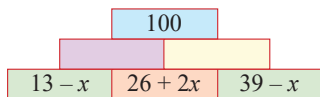


### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1 Vlad și Dragoș au cumpărat un set de 60 de abțibilduri. Dragoș a cumpărat cu 12 abțibilduri mai multe decât Vlad. Determinați numărul abțibildurilor folosite de fiecare dintre cei doi copii, în două moduri.
  - a) cu ajutorul unei ecuații echivalente cu o ecuație de forma  $a \cdot x + b = 0$ ;
  - b) cu ajutorul unui sistem de două ecuații liniare, cu două necunoscute.
- 2 Suma prețurilor de vânzare a două obiecte este 400 de lei. Dacă prețul primului obiect ar crește cu 15 lei, iar prețul celui de-al doilea s-ar micșora cu 5%, atunci suma prețurilor de vânzare ar rămâne neschimbată. Aflați prețul fiecărui obiect.
- 3 Dacă se micșorează un număr real  $a$  cu 10, apoi rezultatul se dublează, se obține același rezultat ca atunci când se împarte același număr la 3. Determinați numărul  $a$ .
- 4 Norma săptămânală a unui muncitor este de  $x$  piese. Dacă muncitorul ar realiza încă 40 de piese, acesta ar realiza triplul normei săptămânale. Aflați numărul  $x$ .
- 5 Un pahar are masa de 100 g, iar o cană are masa de 270 g. Aflați cum trebuie să distribuim 300 ml de apă în cele două recipiente, astfel încât, la final, acestea să aibă aceeași masă. (Considerăm că 1 l de apă cântărește 1 kg.)

**6** Silviu locuiește în localitatea A, iar prietenul lui, Dan, locuiește în localitatea B. Distanța dintre localitățile A și B este de 12 km. Silviu și Dan au plecat, în același timp, din cele două localități, unul spre celălalt. În momentul în care cei doi prieteni s-au întâlnit, Silviu parcursese cu 800 de metri mai mult decât Dan. Aflați ce distanță a parcurs fiecare până în momentul întâlnirii.

**7** În imaginea de mai jos, suma numerelor scrise în două căsuțe vecine este completată în căsuța situată deasupra lor.



- a) Completați tabelul, apoi formulați ecuația corespunzătoare pentru a determina numărul  $x$ .  
 b) Rezolvați ecuația și scrieți în fiecare căsuță din tabel numerele descoperite.

**8** Diferența a două numere naturale este 53. Împărțind pe unul dintre ele la celălalt, se obține câtul 3 și restul 1. Aflați cele două numere.

**9** Într-o tabără, au sosit primii 400 de elevi, din care 60% sunt băieți. După 7 zile, câțiva băieți au plecat, numărul celor rămași fiind de două ori mai mare decât 60% din numărul fetelor. Aflați numărul băieților care au plecat din tabără.

**10** În laboratorul de chimie, Cezara vrea să obțină un litru de soluție salină cu concentrația de 24%, prin amestec între o soluție cu concentrația de 20% și o altă soluție, cu concentrația de 30%. Determinați cantitățile de soluții (exprimate în litri) pe care trebuie să le folosească Cezara în acest scop.

**11** Compuneți o problemă care să se rezolve:

- a) cu ajutorul ecuației  $\frac{x+5}{x} = \frac{4}{3}$ ;  
 b) cu ajutorul sistemului de ecuații  $\begin{cases} x+3y=13 \\ 4x-y=11 \end{cases}$ .

### Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

10p	1. Suma a cinci numere întregi impare consecutive este 2025. Cel mai mare dintre numere este: A. 407                      B. 409                      C. 411                      D. 413
10p	2. Prețul unui obiect s-a redus cu 20 lei, apoi s-a mai redus o dată cu 20%. Ca să se ajungă la prețul inițial, ar trebui făcută o scumpire /majorare cu 30%. Prețul inițial a fost: A. 520 lei                      B. 525 lei                      C. 530 lei                      D. 540 lei
10p	3. Dan parcurge o distanță cu trei mijloace de transport astfel: $\frac{5}{6}$ din distanță cu trenul, $\frac{1}{9}$ din distanță cu feribotul și restul de 12 km cu taxiul. Distanța parcursă cu trenul este de: A. 220 km                      B. 210 km                      C. 230 km                      D. 216 km
10p	4. Pentru un spectacol s-au vândut 124 bilete de două categorii, bilete cu 12 lei și bilete cu 20 lei, încasându-se 1832 lei. Numărul билетelor cu 20 lei a fost: A. 41                      B. 42                      C. 43                      D. 44

II. La problemele următoare se cer rezolvări complete.

10p	1. Numărătorul unei fracții ordinare este cu 4 mai mic decât numitorul. Dublând numărătorul și mărinđ numitorul cu 1 se obține o fracție echiunitară. Aflați fracția de la care se pornește.
20p	2. Ana și Maria au împreună o sumă de bani. Dacă Ana i-ar da Mariei o șesime din suma sa, atunci Maria ar avea jumătate din cât îi rămâne Anei. Dacă Maria i-ar da Anei o zecime din suma sa, atunci Ana ar avea cu 96 lei mai mult decât îi rămân Mariei. Aflați ce sumă de bani au împreună cele două fete.
20p	3. Suma inverselor a două numere raționale este $\frac{5}{6}$ , iar diferența inverselor numerelor este $\frac{1}{6}$ . Calculați suma și produsul numerelor.

# 3 Elemente de organizare a datelor

3.1 Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan

3.2 Dependențe funcționale



**Competențe specifice:**

1.3 2.3 3.3 4.3 5.3 6.3



3.1

# Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Sistem de axe ortogonale în plan

## L1 Produsul cartezian a două mulțimi nevide

### Ne amintim

Perechea  $(a, b)$  este ordonată dacă și numai dacă pentru  $a \neq b$  are loc  $(a, b) \neq (b, a)$ .  
Două perechi ordonate  $(a, b)$  și  $(c, d)$  **sunt egale** dacă și numai dacă  $a = c$  și  $b = d$ .

### Rezolvăm și observăm

**Problema 1.** În vacanță, Matei și Vlad își petrec diminețile în aceleași trei locuri de joacă din oraș, hotărând în fiecare zi, individual, unde doresc să meargă. Ei parcurg distanța până la locul de joacă pe trasee diferite.

- Determinați numărul de trasee folosite de cei doi copii.
- Determinați probabilitatea ca cei doi să meargă simultan în același loc de joacă.

**Soluție:** Notăm cu  $M$  locul în care este casa lui Matei și cu  $V$  locul în care este cea a lui Vlad. Notăm cu  $L_1, L_2, L_3$  cele trei locuri de joacă. Vom avea traseele ilustrate în schița alăturată.

Fiecare drum determină o pereche ordonată, în care prima componentă este unul dintre copii, iar a doua componentă este locul de joacă spre care merge.

Fie  $A = \{V, M\}$  și  $B = \{L_1, L_2, L_3\}$ . Identificăm mulțimea de perechi ordonate:  $\{(V, L_1), (V, L_2), (V, L_3), (M, L_1), (M, L_2), (M, L_3)\}$ .

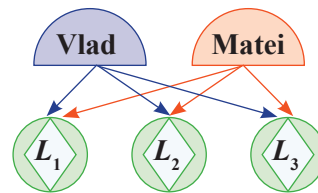
Notăm această mulțime  $A \times B$  și citim: „Produsul cartezian al mulțimilor  $A$  și  $B$ ”.

b) Sunt posibile următoarele cazuri de a merge la locurile de joacă:

$(L_1, L_1), (L_1, L_2), (L_1, L_3), (L_2, L_1), (L_2, L_2), (L_2, L_3), (L_3, L_1), (L_3, L_2), (L_3, L_3)$ .

Dintre acestea, sunt favorabile cazurile:  $(L_1, L_1), (L_2, L_2), (L_3, L_3)$ .

Probabilitatea este  $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0,33$ .



**Problema 2.** Sara și familia ei s-au mutat într-un apartament nou.

Pentru vopsirea celor patru pereți ai camerei, Sara are la dispoziție 2 culori: alb și mov.

Pentru a decide cum să coloreze pereții camerei, ea vrea să știe câte perechi există, astfel încât prima componentă să fie un perete al camerei, iar a doua componentă să fie culoarea asociată acestuia.

**Soluție:** Constatăm că fiecărui perete putem să-i asociem două culori, deci fiecare perete determină două perechi ordonate.

1) Notând cu  $p_1, p_2, p_3, p_4$  cei patru pereți și cu  $a$ , respectiv  $m$  cele două culori, putem realiza tabelul:

peretele	$p_1$		$p_2$		$p_3$		$p_4$	
culoarea	$a$	$m$	$a$	$m$	$a$	$m$	$a$	$m$

2) Datele din tabel conduc la perechile:  $(p_1, a), (p_1, m), (p_2, a), (p_2, m), (p_3, a), (p_3, m), (p_4, a), (p_4, m)$ . Considerăm mulțimile  $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  și  $B = \{a, m\}$ . Obținem mulțimea:  $\{(p_1, a), (p_1, m), (p_2, a), (p_2, m), (p_3, a), (p_3, m), (p_4, a), (p_4, m)\}$ , pe care o notăm cu  $A \times B$ .

Se pot forma 8 perechi ordonate corespunzătoare cerinței problemei.

**Observație:** În problemă, numărul perechilor ordonate care se pot forma nu reprezintă numărul posibilităților de colorare a camerei!

Fiecare posibilitate de colorare a camerei presupune să știm ce culoare va avea fiecare perete, numărul lor fiind 16 (cu regula produsului). Fiecare perete poate fi colorat în 2 moduri, deci pentru colorarea camerei (a celor 4 pereți) vom avea  $2^4$  posibilități.



**Definiție:** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi nevide.

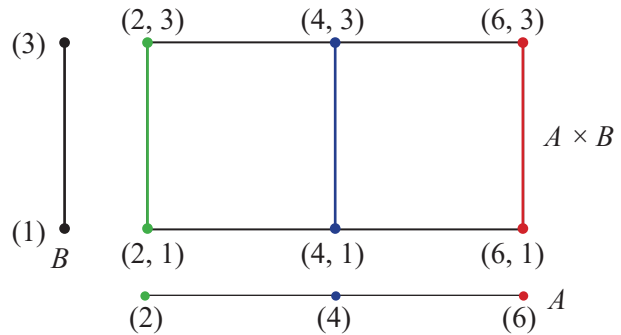
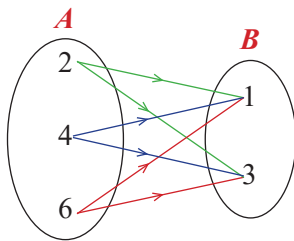
Se numește **produsul cartezian** al mulțimilor  $A$  și  $B$  și se notează  $A \times B$  mulțimea perechilor  $(a, b)$  cu proprietatea că  $a$  este element al mulțimii  $A$ , iar  $b$  este element al mulțimii  $B$ .

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Produsul cartezian poate fi reprezentat și sub forma unor diagrame care ilustrează atât asocierea, cât și sensul asocierii (ordinea componentelor perechilor).

**Exemplu:** Fie mulțimile  $A = \{2, 4, 6\}$  și  $B = \{1, 3\}$ .

Atunci,  $A \times B = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3)\}$  se poate reprezenta sub forma următoarelor două diagrame.



Numărul elementelor produsului cartezian  $A \times B$  este  $3 \cdot 2 = 6$ .

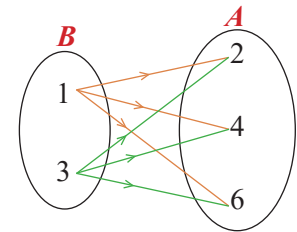
Dacă  $A$  și  $B$  sunt mulțimi diferite, atunci  $A \times B \neq B \times A$ .

**Exemplu:** Pentru mulțimile  $A = \{2, 4, 6\}$  și  $B = \{1, 3\}$  de mai sus, avem:

$$A \times B = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3)\},$$

$$B \times A = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6)\}.$$

Observați diagrama alăturată.



Dacă  $A = B$  atunci  $A \times A$  se notează și  $A^2$ . De exemplu  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ .

Fie mulțimile nevide  $A$  și  $B$  astfel încât  $\text{card } A = a$  și  $\text{card } B = b$ . Observând exemplele de mai sus, deducem că fiecare dintre cele  $a$  elemente ale mulțimii  $A$  generează cu elementele mulțimii  $B$  exact  $a \cdot b$  perechi.

**Teoremă**

Dacă  $A$  și  $B$  sunt mulțimi nevide și  $\text{card } A = a$ ,  $\text{card } B = b$ , atunci  $\text{card } A \times B = a \cdot b$ .

$$\text{card}(A \times B) = (\text{card } A) \cdot (\text{card } B)$$



**Reținem!**

- Pentru mulțimile nevide  $A$  și  $B$  se definește produsul lor cartezian  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ .
- Produsul cartezian se poate reprezenta și prin diagrame sau grafice.
- Dacă  $A \neq B$ , atunci  $A \times B \neq B \times A$ .
- $\text{Card}(A \times B) = (\text{card } A) \cdot (\text{card } B)$
- $\text{Card}(A \times B) = \text{card}(B \times A)$ .



Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm



**1** Fie  $A$  și  $B$  mulțimi nevide. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

- a)  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in \dots, b \in \dots\}$ ;
- b) Dacă card  $A = n$  și card  $A = m$ , atunci card  $A \times B = \dots$ .
- c)  $A \times B \dots B \times A$ .

**2** Fie mulțimile  $A = \{-2; -1; 3\}$  și  $B = \{0; 2\}$ . Determinați  $A \times B, B \times A, A \times A, B \times B$ .

**3** Se consideră mulțimile:

$$C = \{-3; 1\} \text{ și } D = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 2\}.$$

Scrieți produsele carteziene  $C \times D$  și  $D \times C$ .

**4** Dacă  $A \times B = \{(-4, 0), (-4, 2), (-4, 4), (-4, 6), (-2, 0), (-2, 2), (-2, 4), (-2, 6)\}$  determinați mulțimile  $A$  și  $B$ .

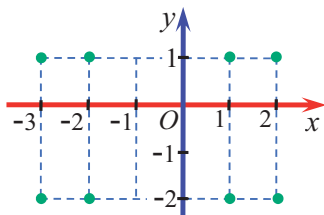
**5** Dați patru exemple de mulțimi  $A$  și  $B$ , știind că mulțimea  $A \times B$  are șase elemente. În cazurile alese, mulțimea  $A$  să aibă număr diferit de elemente.

**6** Determinați mulțimea

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + x \cdot y = -4\}.$$

**7** Aflați mulțimile  $A$  și  $B$  știind că  $A \times B = \{(-2, a), (-1, a), (-2, b), (-1, b), (-2, c), (-1, c)\}$  și  $a, b, c$  sunt cele mai mici numere întregi pozitive distincte, cu proprietatea  $|c - a - b| = 0$ .

**8** Reprezentarea geometrică a produsului cartezian  $A \times B$  este redată în figura de mai jos. Precizați elementele mulțimilor  $A$  și  $B$ .



**9** Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale elementele mulțimilor:

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x| = 3, -3 < y < 1\};$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1, y^2 = 4\};$$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (3x)^2 + y^2 = 10\}.$$

**10** Fie mulțimile

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3}{2x-1} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ și}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{-4}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale mulțimea  $B \times A$ .

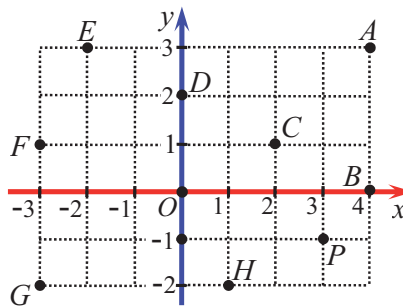
**11** Echipa de organizare a Balului Bobocilor decide că are nevoie de doi prezentatori, o fată și un băiat. La selecție, participă 5 fete: Denisa, Elena, Larisa, Gabriela, Harieta și 3 băieți: Andrei, Liviu, Cristian.

a) Scrieți mulțimea  $F$  a numelor fetelor și mulțimea  $B$  a numelor băieților care au participat la selecție folosind pentru numele copiilor doar inițiala.

b) Scrieți mulțimea  $F \times B$ , apoi  $B \times F$ .

c) Aflați în câte moduri se poate alege perechea de prezentatori. Justificați răspunsul dat.

**12** Pentru reprezentarea din figura de mai jos, identificați coordonatele punctelor marcate. Copiați desenul pe caiete și completați spațiile libere, urmând modelul:  $A(4, 3)$ .



## L2 Sistem de axe ortogonale

### Ne amintim

Se numește **axă** a numerelor o dreaptă pe care s-au fixat **o origine** (punctul  $O$ ), **o unitate de măsură** și un **sens de parcurgere**. Distanța dintre două puncte  $A$  și  $B$  situate pe axă este  $AB = |x_B - x_A|$ .

### Puțină istorie

**René Descartes**, cunoscut și sub numele **Cartesius**, a fost filosof și matematician francez. A trăit între anii 1596–1650. De numele lui se leagă multe dintre conceptele științifice. Între numeroasele contribuții în matematică este și crearea **geometriei analitice**, acea ramură a matematicii care studiază **geometria** utilizând **calculul algebric**.

În acest scop, se definesc sisteme de coordonate pe dreaptă sau în plan (sistem de coordonate **carteziene** sau **reper cartezian**).



### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

#### Definiție:

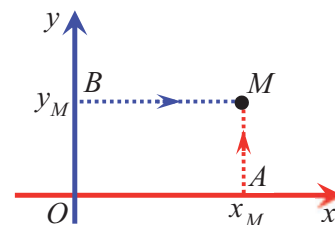
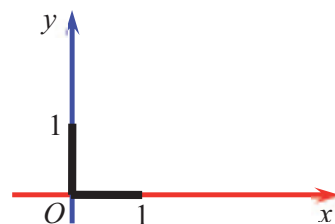
O pereche ordonată de axe perpendiculare (ortogonale) care au aceeași origine se numește **sistem de axe ortogonale** sau **reper cartezian** ori **sistem de coordonate** în plan.

- Originea comună a celor două axe se numește **originea** sistemului de axe sau originea reperului cartezian. Se notează, de regulă, cu  $O$ .
- Axa orizontală se notează cu  $Ox$  și se numește **axa absciselor**. Sensul de parcurgere este de la stânga la dreapta.
- Axa verticală se notează cu  $Oy$  și se numește **axa ordonatei**. Sensul de parcurgere este de jos în sus.
- Reperul cartezian se notează  $xOy$  sau  $(Ox, Oy)$ .

În plan, se consideră un sistem de axe ortogonale  $xOy$ .

Fiecărei perechi de numere reale  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  îi corespunde un unic punct în plan, care se reprezintă astfel:

- se reprezintă pe axa  $Ox$  punctul  $A$ , având coordonata  $a$ ;
- se reprezintă pe axa  $Oy$  punctul  $B$ , având coordonata  $b$ ;
- se desenează dreptunghiul având vârfurile  $O, A$  și  $B$ ;
- al patrulea vârf al dreptunghiului, notat cu  $M$ , este punctul căutat.



$M$  se numește **reprezentarea geometrică** a perechii de numere reale  $(a, b)$ .

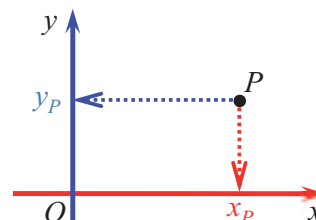
Numerele  $a$  și  $b$  se numesc **ordonatele** punctului  $M$ . Acestea se mai notează și  $x_M$ , respectiv  $y_M$ .

Punctul  $M$  se mai notează și  $M(x_M, y_M)$ . Se citește „Punctul  $M$  cu coordonatele  $x_M$  și  $y_M$ ”.

Coordonata  $x_M = a$  se numește **abscisa** punctului  $M$ , iar coordonata  $y_M = b$  se numește **ordonata** punctului  $M$ .

Reciproc, fiecărui punct  $P$  din plan i se asociază, în mod unic, o pereche de numere reale  $(x, y)$ , notată și  $(x_p, y_p)$ , care se determină astfel: din punctul  $P$  se trasează perpendicularele pe axele de coordonate, care vor intersecta axa  $Ox$  în punctul de coordonată  $x_p$  și axa  $Oy$  în punctul de coordonată  $y_p$ .

Numerele  $x_p$  și  $y_p$  sunt **ordonatele punctului**  $P$ .



**Concluzie:** Între mulțimea punctelor din plan și mulțimea perechilor de numere reale  $(x, y)$  există „o corespondență unu la unu”.

**Unitatea de măsură** aleasă pentru cele două axe este aceeași.

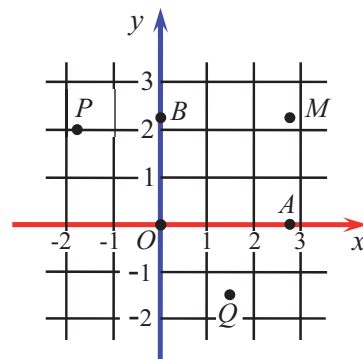
**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

În figura alăturată, sunt reprezentate punctele

$O(0,0)$ ;  $A(\sqrt{8},0)$ ;  $B(0,\sqrt{5})$ ;  $M(\sqrt{8},\sqrt{5})$ ;  $P(-\sqrt{3},2)$  și  $Q(1,5;-\sqrt{2})$ .

**Observații:**

- Un punct este situat pe axa  $Ox$  dacă și numai dacă are ordonata nulă, adică  $M \in Ox \Leftrightarrow y_M = 0$ . În desen avem  $A \in Ox$ .
- Un punct este situat pe axa  $Oy$  dacă și numai dacă are abscisa nulă, adică  $M \in Oy \Leftrightarrow x_M = 0$ . În desen avem  $B \in Oy$ .
- Originea reperului cartezian are coordonatele  $O(0, 0)$



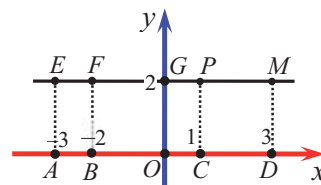
În desenul alăturat, punctele  $A, B, C, D, O$  sunt situate pe axa  $Ox$ :  $A(-3, 0)$ ,  $B(-2, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $C(1, 0)$  și  $D(3, 0)$ , iar punctele  $E, F, G, P, M$  sunt situate pe dreapta orizontală care intersectează axa  $Oy$  în punctul de ordonată 2.

Două puncte situate pe aceeași dreaptă orizontală au aceeași ordonată.

Avem  $E(-3, 2)$ ,  $F(-2, 2)$ ,  $G(0, 2)$ ,  $P(1, 2)$ ,  $M(3, 2)$ , deci  $y_E = y_F = y_G = y_P = y_M$ .

Distanța dintre două puncte  $A$  și  $B$ , situate pe aceeași dreaptă orizontală, este

$$AB = |x_B - x_A|.$$



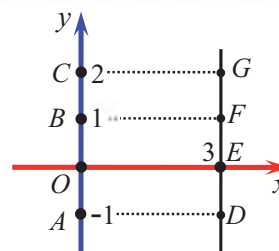
În desenul alăturat,  $A, O, B, C \in Oy$ :  $A(0, -1)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(0, 2)$ .

Două puncte situate pe aceeași dreaptă verticală au aceeași abscisă.

Punctele  $D, E, F, G$  sunt situate pe dreapta verticală care intersectează axa  $Ox$  în punctul de abscisă 3 și  $D(3, -1)$ ,  $E(3, 0)$ ,  $F(3, 1)$  și  $G(3, 2)$ .

Distanța între două puncte  $A$  și  $B$ , situate pe aceeași dreaptă verticală este

$$AB = |y_B - y_A|.$$



**Distanța dintre două puncte**,  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ , în plan, este dată de formula:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

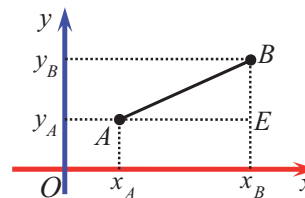
**Demonstrație:**

Considerăm punctul  $E(x_B, y_A)$ . Atunci,  $AE = |x_B - x_A|$ , iar  $BE = |y_B - y_A|$ .

Aplicând teorema lui Pitagora în  $\triangle ABE$ , avem:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2.$$

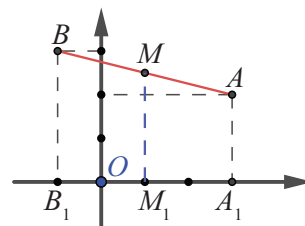
Ținând cont că  $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$ , obținem formula de mai sus.



**Problemă.** Într-un sistem de axe ortogonale, considerăm punctele  $A(3, 2)$  și  $B(-1, 3)$ .

a) Calculați distanța dintre cele două puncte.

b) Precizați coordonatele punctelor  $A_1, B_1$  și  $M_1$ . Folosind informațiile prezentate mai sus, identificați abscisa punctului  $M$ , mijlocul segmentului  $AB$ .



**Soluție:**

a)  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{17}$ .

b) Se observă ușor că  $M_1$  este mijlocul segmentului  $A_1B_1$ .

$MM_1$  este linie mijlocie în trapezul  $A_1B_1BA$ , adică  $MM_1 \parallel Oy$ , deci  $M$  și  $M_1$  au aceeași abscisă:  $x = 1$ .

- 1) Considerăm punctele  $M(x_M, y_M)$  și  $P(x_P, y_P)$ . Alegeți câte 4 perechi de valori convenabile pentru coordonatele celor două puncte și reprezentați-le în sisteme de coordonate diferite.
- 2) Pentru fiecare dintre cele 4 cazuri, identificați, folosind un raționament similar celui de la pag. 94, coordonatele mijlocului segmentului  $MP$  și comparați-le cu numerele  $\frac{x_M + x_P}{2}$ , respectiv  $\frac{y_M + y_P}{2}$ .

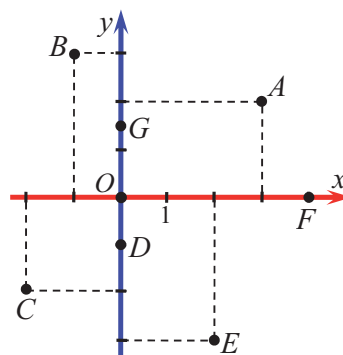


Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1 Fie punctul  $A(a, b)$ . Completați, pe caiet, spațiile libere cu unul dintre cuvintele: *coordonatele*, *abscisa*, *ordonata*, pentru a obține propoziții adevărate:
  - a)  $a$  este ... punctului  $A$ ;
  - $b$  este ... punctului  $A$ ;
  - $a$  și  $b$  sunt ... punctului  $A$ .
- 2 Completați, pe caiet, spațiile punctate. Distanța dintre punctele  $A(x_1, y_1)$  și  $B(x_2, y_2)$  este  $\sqrt{\dots\dots\dots}$ .
- 3 Reprezentați în același sistem de axe ortogonale punctele  $A(1, 3)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(-2, 4)$ ,  $D(-3, 0)$ ,  $E(-4, 2)$ ,  $F(0, -3)$ ,  $G(-2, -2)$ .
- 4 Fie punctele  $A(3, 0)$ ,  $B(-5, 0)$ ,  $C(0, -2)$ ,  $D(0, 4)$ .
  - Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale  $xOy$  punctele  $A, B, C$  și  $D$ .
  - Reprezentați în același sistem de axe ortogonale punctele  $A', B', C'$  și  $D'$  simetricele punctelor  $A, B, C$ , respectiv  $D$ , față de punctul  $O$ .
- 5 Fie punctele  $E(2, 3)$ ,  $F(-3, 2)$ ,  $G(3, -1)$ .
  - Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale  $xOy$  punctele  $E, F, G$  și simetricele lor față de axa  $Ox$ .
  - Notați  $P, Q$ , respectiv  $R$ , aceste puncte și determinați coordonatele lor.
- 6 Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale:
  - punctul  $P(4, 3)$  și calculați  $OP$ ;
  - punctele  $A(-3, 0)$  și  $B(2, 0)$  și calculați  $AB$ ;
  - punctele  $C(0, 6)$  și  $D(\sqrt{13}, 0)$  și calculați  $CD$ .

- 7 Se consideră un sistem de axe ortogonale  $xOy$ .
  - Punctele  $A(-3, a)$ ,  $B(1, b - 1)$ ,  $C(4, 2c - 6)$  aparțin axei  $Ox$ . Calculați  $a + b + c$ .
  - Calculați  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$ , știind că punctele  $Q(q - \sqrt{2}, -2)$ ,  $R(r - \sqrt{8}: 4, -1)$ ,  $S(s + \sqrt{18}, 1)$  sunt situate pe axa  $Oy$ .

- 8 Precizați coordonatele punctelor reprezentate în sistemul de coordonate din desenul de mai jos.



- 9 Într-un sistem de coordonate se consideră punctele  $A(3, 2)$ ,  $B(-1, 2)$ ,  $C(-1, -2)$  și  $D$ , simetricul punctului  $A$  față de axa absciselor.
  - Determinați coordonatele punctului  $D$ .
  - Calculați lungimile segmentelor  $AB, BC, CO$  și  $AC$ .
  - Arătați că  $ABCD$  este un pătrat.
- 10
  - Reprezentați într-un sistem de axe ortogonale punctele  $M(2, 5)$ ,  $N(0, 1)$ .
  - Calculați lungimea segmentului  $MN$ .
  - Fie  $P(4, y)$ . Determinați numărul  $y$ , astfel încât triunghiul  $MNP$  să fie isoscel, cu baza  $NP$ .



3.2

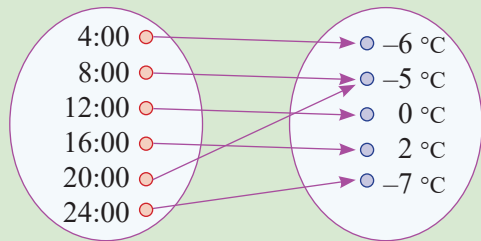
# Dependențe funcționale

## Rezolvăm și observăm

O fișă de monitorizare a temperaturilor înregistrate la o stație meteo conține următorul tabel:

Ora	4:00	8:00	12:00	16:00	20:00	24:00
Temperatura	-6 °C	-5 °C	0 °C	2 °C	-5 °C	-7 °C

- Citim acest tabel: La ora 4:00, temperatura aerului era de -6°, la ora 8:00, temperatura era de -5° și așa mai departe, adică *temperatura depinde de ora* la care a fost măsurată.
- Stabilim relația de dependență dintre ora la care s-a măsurat temperatura și valoarea acesteia: 4:00 → -6 °C; 8:00 → -5 °C; 12:00 → 0 °C; 16:00 → 2 °C; 20:00 → -5 °C; 24:00 → -7 °C.
- Dacă notăm cu *A* mulțimea orelor la care s-a măsurat temperatura și cu *B* mulțimea valorilor înregistrate de termometru, dependența descrisă poate fi evidențiată și prin diagrama alăturată.
- Urmărind săgețile care indică dependența, observăm că fiecărui element din mulțimea *A* îi corespunde un singur element din mulțimea *B*.



## Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Definiție:** Fiind date două mulțimi nevide *A* și *B*, vom spune că între ele are loc o **dependență funcțională**, dacă, printr-o regulă oarecare, facem ca *fiecărui element* al mulțimii *A* să-i corespundă *un singur element* al mulțimii *B*.

Dependențele funcționale se pot reprezenta prin tabele, diagrame circulare, diagrame coloane sau bare, grafice, poligonul frecvențelor.

**Problema 1:** În tabelul alăturat, este redată dependența funcțională dintre mărimile *x* și *y*. Aflați numărul *a*.

<i>x</i>	0	3	9
$y = x - 3$	-3	0	<i>a</i>

**Soluție:**  $a = 9 - 3 = 6$ .

**Problema 2:** Într-o clasă sunt 25 de elevi. Nu a lipsit niciun elev de la test, așa că se stabilește o dependență funcțională între mulțimea elevilor clasei și mulțimea notelor obținute. Elev 1 → nota 6, Elev 2 → nota 7, Elev 3 → nota 6, ..., Elev 25 → nota 7, unele note fiind luate de mai mulți elevi. Numărul de apariții ale notei 6 se numește **frecvență** absolută a acesteia.

Rezultatele obținute la ultima evaluare sumativă sunt redată în tabelul alăturat, numit **tabel de date**. Acesta redă dependența funcțională dintre nota acordată și frecvența acestei note. Astfel de dependențe sunt foarte utile pentru studiul evoluției elevilor dintr-o clasă.

nota	5	6	7	8	9	10
nr. de apariții	1	3	4	6	6	5

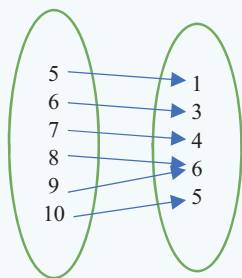
Reprezentările prin **diagrame** sau **grafice**, calcularea mediei, dau informații succinte, care pot fi comparate cu cele de la alte teste și care pot indica progresul clasei, în timp.

**Graficul** unei dependențe funcționale de la mulțimea *A* la mulțimea *B* este mulțimea perechilor  $(x, y)$ ,  $x \in A$ ,  $y \in B$ , astfel încât lui *x* îi corespunde *y*.



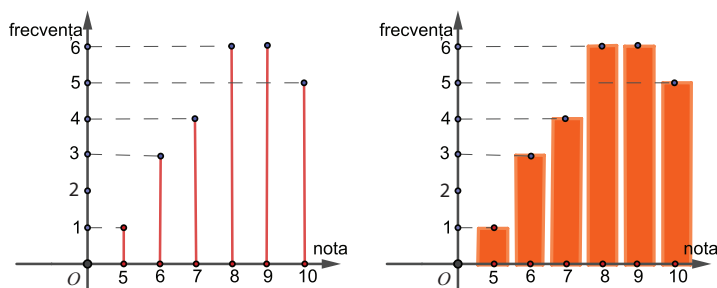
Vom reprezenta datele oferite de tabelul din problema 2 în diferite moduri:

### Diagrame Venn-Euler



- Se reprezintă mulțimile între care are loc dependența funcțională.
- Se asociază, prin săgeți, fiecărui element al primei mulțimi elementul corespunzător din a doua mulțime.

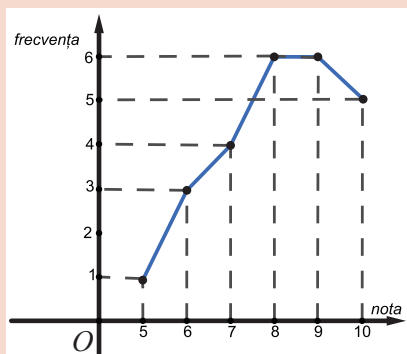
### Reprezentare prin coloane sau batoane



- Se reprezintă, într-un sistem de axe de coordonate, punctele corespunzătoare graficului dependenței funcționale.
- Se reprezintă *segmentele verticale* cu un capăt în unul dintre aceste puncte și celălalt pe axa  $Ox$ , numite *coloane* sau *batoane*.

În reprezentarea de mai sus, segmentele roșii sunt **coloane** sau **batoane**.

### Poligonul frecvențelor



- Se reprezintă, într-un sistem de axe de coordonate, punctele corespunzătoare graficului dependenței funcționale.
- Se reprezintă *linia frântă determinată de segmentele obținute unind, în ordine, punctele desenate*. Această linie se numește **poligonul frecvențelor** (în desen, linia formată din segmentele albastre).

**Observație:** Poligonul frecvențelor ne ajută să comparăm *frecvențele* a două valori (note) diferite, să observăm care dintre aceste valori (note) are *ponderea* mai mare, să estimăm *media* valorilor (notelor). În cazul acestei probleme, notele de 8 și de 9 au ponderea cea mai mare (dominantă), iar nota 5 are ponderea cea mai mică. Putem estima că media clasei la această evaluare este aproximativ egală cu 8. Folosiți calculatorul și calculați media ponderată.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

**Problema 1:** Determinați ultima cifră a numărului  $2^n + 3^n$ , unde  $n$  este număr natural nenul.

Prin calcul, rezultă că ultima cifră a puterilor lui 2 și ale lui 3 se repetă din 4 în 4. Scriem acest lucru printr-o **dependență funcțională** între forma numărului  $n$  (de fapt, restul prin împărțire la 4) și ultima cifră a puterilor lui 2, respectiv ale lui 3, reprezentate prin tabele.

Realizăm un nou tabel, în care completăm datele aflate și care ne ajută să identificăm o a treia **dependență funcțională**: între forma numărului  $n$  și ultima cifră a numărului  $2^n + 3^n$ .

Forma numărului	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$u(2^n)$	6	2	4	8
Forma numărului	$n = 4k$	$n = 4k + 1$	$n = 4k + 2$	$n = 4k + 3$
$u(3^n)$	1	3	9	7
Forma numărului	$u(2^n)$	$u(3^n)$	$u(2^n + 3^n)$	
$n = 4k$	6	1	7	
$n = 4k + 1$	2	3	5	
$n = 4k + 2$	4	9	3	
$n = 4k + 3$	8	7	5	



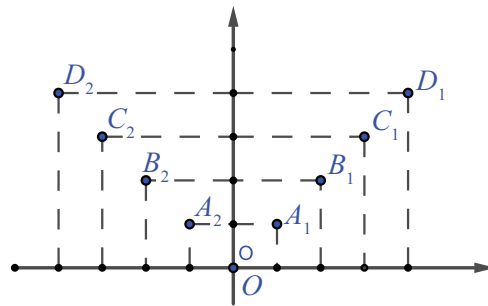
**Problema 2:** Fie mulțimea  $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  și corespondența de la  $A$  la mulțimea numerelor naturale:  $x \rightarrow y = |x|$ .

a) Justificați faptul că între  $A$  și  $\mathbb{N}$  are loc o dependență funcțională.

b) Reprezentați graficul dependenței.

**Soluție:** a) Modulul oricărui număr întreg este un număr natural unic, deci corespondența  $x \rightarrow y = |x|$  definește o dependență funcțională.

c) Această dependență este reprezentată prin graficul din imaginea alăturată, format din punctele de coordonate  $(x, |x|)$ , cu  $x \in A$ .



Punctele  $A_1(1, 1)$ ,  $A_2(-1, 1)$ ,  $B_1(2, 2)$ ,  $B_2(-2, 2)$ ,  $C_1(3, 3)$ ,  $C_2(-3, 3)$ ,  $D_1(4, 4)$ ,  $D_2(-4, 4)$  formează graficul dependenței funcționale.

Există numeroase alte tipuri de tabele care ajută la sintetizarea datelor culese pentru studii statistice și tipuri de diagrame prin care se reprezintă dependențele studiate. Pe unele dintre ele le vom cunoaște prin aplicații.

### Reținem!



Corespondența  $x \rightarrow y$  de la mulțimea nevidă  $A$  la mulțimea nevidă  $B$  este o **dependență funcțională** dacă aceasta face ca *fiecărui element* al mulțimii  $A$  să-i corespundă *un singur element* din mulțimea  $B$ .

Dependențele funcționale se pot reprezenta prin: **tabele, grafice, diagrame.**



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1** Un kilogram de struguri costă 7,5 lei. Aflați cât plătim pentru 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 8 kg, respectiv 10 kg de struguri. Scrieți aceste date în tabelul de mai jos:

Cantitatea de struguri (kg)	1	2	3	4	5	8	10
Suma plătită (lei)	7,5						

- 2** Calculați aria unui pătrat cu latura  $l$ , exprimată în centimetri, unde  $l \in \{2; 3,5; 6; 10,4; \sqrt{201}\}$ . Scrieți datele obținute într-un tabel.

- 3** Reprezentați, prin diagrame, dependența funcțională dintre raza unui cerc și lungimea cercului, pentru valorile  $r$  ale razei, exprimate în centimetri, unde  $r \in \{1; 2,5; 0,75; 4,4\}$ .

- 4** Un ciclist se deplasează cu viteza medie de 18 km/h. Scrieți distanțele parcurse de ciclist în 2 ore, 3 ore, 4,5 ore, 300 min și completați datele pe caiete, într-un tabel, după modelul dat:

Timpul	2 h			
Distanța parcursă	36 km			

- 5** Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 24 cm.
- a) Exprimați lungimea dreptunghiului în funcție de lățimea acestuia.
- b) Calculați lungimea dreptunghiului, știind că lățimea ia, pe rând, valorile: 2 cm, 3 cm, 4,5 cm, 5 cm. Scrieți datele obținute într-un tabel. Reprezentați dependența  $l \rightarrow L$  folosind graficul.

- 6** Elevii unei clase au obținut la un test următoarele note: 9, 8, 4, 7, 8, 9, 7, 8, 10, 10, 5, 8, 9, 6, 9, 8, 10, 7, 7, 6, 4, 8, 9, 8, 9.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi							

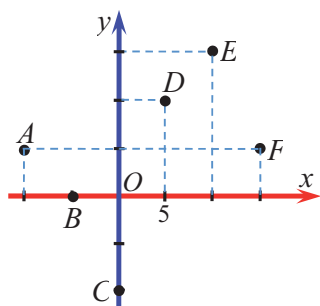
- a) Completați pe caiet, asociind fiecărei note frecvența ei în datele prezentate.
- b) Calculați media clasei.
- c) Reprezentați grafic dependența dintre notele obținute și frecvența acestora.
- d) Reprezentați prin diagrame dependența dintre notele obținute și frecvența acestora.
- e) Precizați nota cu ponderea cea mai mare.

**7** Fie dependența funcțională  $x \rightarrow y$ , de la mulțimea  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$  la mulțimea  $\mathbb{N}$ , dată de regula „ $y$  este ultima cifră a numărului  $x^{2^n}$ ”.

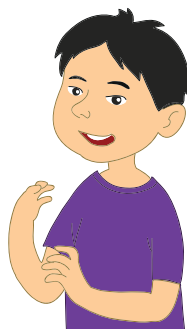
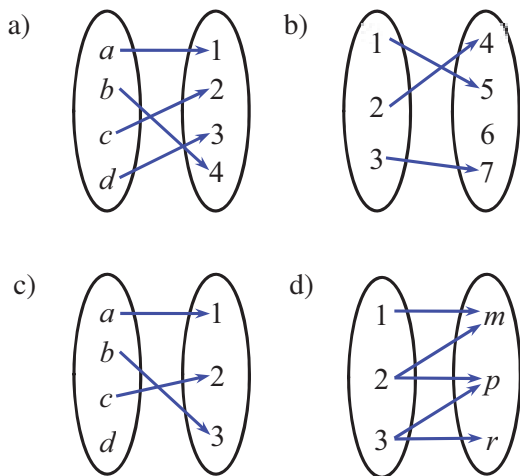
- Determinați mulțimea valorilor pe care le poate lua  $y$ .
- Reprezentați dependența funcțională într-un tabel.
- Reprezentați dependența prin grafic și prin diagrame.

**8** În desenul de mai jos, este reprezentarea grafică a unei dependențe funcționale  $x \rightarrow y$ .

- Determinați coordonatele punctelor  $A, B, C, D, E, F$ , știind că abscisa punctului  $D$  este 5.
- Reprezentați această dependență funcțională prin tabel, apoi prin diagramă Venn-Euler.

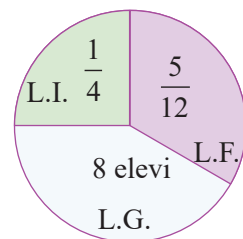


**9** Stabiliți care dintre următoarele reprezentări sunt dependențe funcționale:

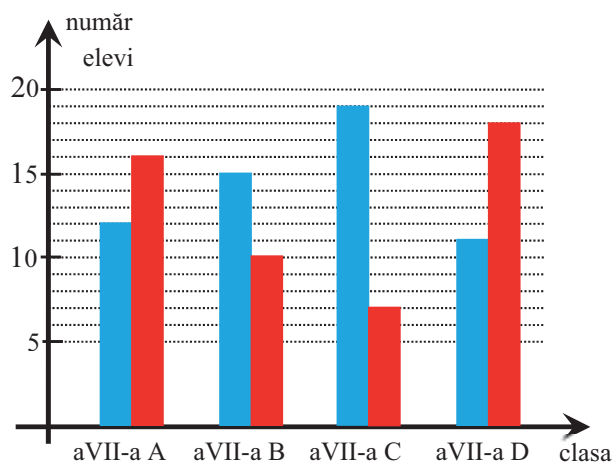


**10** În diagrama de mai jos, sunt prezentate preferințele elevilor unei clase pentru studiul celei de-a doua limbi străine. Aflați numărul elevilor din clasă și numărul elevilor care preferă limba italiană

L.F. – limba franceză  
L.G. – limba germană  
L.I. – limba italiană



**11** În diagrama de mai jos, sunt reprezentate efectivele claselor a VII-a (numărul elevilor din aceste clase) dintr-o școală. Coloanele albastre reprezintă numărul băieților, iar coloanele roșii reprezintă numărul fetelor din fiecare clasă.



- Determinați, cu ajutorul diagramei, efectivul fiecărei clase.
- Calculați numărul băieților de la clasa a VII-a, din acea școală.
- Identificați clasele în care numărul fetelor este mai mare decât numărul băieților.
- Determinați efectivul mediu al claselor a VII-a din școală.
- Observați diagrama și completați, pe caiete, tabelul de date în baza căruia a fost realizată diagrama, urmând modelul:

Clasa	a VII-a A	a VII-a B	a VII-a C	a VII-a D
Numărul fetelor	16			
Numărul băieților	12			
Efectivul clasei	28			



**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p	1. Se consideră punctele $A(-3,8)$ și $B(0,4)$ . Lungimea segmentului $AB$ este: A. 6                                      B. 5                                      C. 7                                      D. 8														
5p	2. Dacă $C(0, -5)$ , $D(a, 3)$ și $CD = 10$ , atunci valoarea pozitivă a numărului $a$ este: A. 6                                      B. 7                                      C. 5                                      D. 4														
5p	3. Simetricul punctului $E(-3, 2)$ față de originea sistemului de axe ortogonale este punctul $F$ . Coordonatele punctului $F$ sunt: A. $(-3, 2)$ B. $(-2, 3)$ C. $(-3, -2)$ D. $(3, -2)$														
5p	4. Fie punctele $A(-4, 1)$ , $B(-1, 5)$ , $C(2, 5)$ , $D(5, 1)$ într-un sistem de axe ortogonale. Perimetrul patrulaterului $ABCD$ este: A. 25                                      B. 26                                      C. 22                                      D. 28														
5p	5. Dacă mulțimea $A$ are trei elemente, atunci produsul cartezian $A \times A$ are: A. 3 elemente                              B. 6 elemente                              C. 9 elemente                              D. 27 elemente														
5p	6. Dacă $A \times B = \{(2, 4), (4, a), (6, 4), (2, b), (4, 6), (6, b)\}$ , atunci mulțimea $B$ este: A. $\{4, 6\}$ B. $\{4, 2\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{2, 6\}$														
5p	7. Tabelul prezentat asociază fiecăreia dintre cele 4 probleme, date la un concurs, numărul elevilor care au rezolvat-o corect. În total, pentru problemele de concurs, s-au primit 221 de rezolvări corecte. <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <thead> <tr> <th>Problema</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Număr elevi</td> <td>27</td> <td><math>2a - 1</math></td> <td><math>a + 25</math></td> <td><math>a + 10</math></td> </tr> </tbody> </table> Problema 3 a fost rezolvată de: A. 45 elevi                              B. 55 elevi                              C. 65 elevi                              D. 75 elevi	Problema	1	2	3	4	Număr elevi	27	$2a - 1$	$a + 25$	$a + 10$				
Problema	1	2	3	4											
Număr elevi	27	$2a - 1$	$a + 25$	$a + 10$											
5p	8. În tabel următor, este înregistrat cursul de schimb euro-leu, pe parcursul unei săptămâni. <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <thead> <tr> <th>luni</th> <th>marți</th> <th>miercuri</th> <th>joi</th> <th>vineri</th> <th>sâmbătă</th> <th>duminică</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4,59</td> <td>4,57</td> <td>4,56</td> <td>4,53</td> <td>4,54</td> <td>4,53</td> <td>4,53</td> </tr> </tbody> </table> Cursul mediu euro-leu, pentru această săptămână, a fost: A. 4,57                              B. 4,56                              C. 4,54                              D. 4,55	luni	marți	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică	4,59	4,57	4,56	4,53	4,54	4,53	4,53
luni	marți	miercuri	joi	vineri	sâmbătă	duminică									
4,59	4,57	4,56	4,53	4,54	4,53	4,53									

II. La problemele următoare se cer rezolvări complete.

10p	1. În tabelul alăturat este prezentată o dependență funcțională. Reprezentați această relație într-un sistem de axe ortogonale.	<table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>-2</td> <td>-3</td> <td>-4</td> <td>1</td> <td>4</td> </tr> </tbody> </table>	$x$	-3	-2	-1	0	3	$y$	-2	-3	-4	1	4
$x$	-3	-2	-1	0	3									
$y$	-2	-3	-4	1	4									
10p	2. O hartă este realizată la scara $1/500\,000$ . Completați tabelul alăturat ținând seama de unitatea de măsură cerută.	<table border="1" style="margin: 10px auto;"> <tbody> <tr> <td>Distanța pe hartă (cm)</td> <td>5</td> <td></td> <td>7,5</td> <td></td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>Distanța pe teren (km)</td> <td></td> <td>20</td> <td></td> <td>350</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Distanța pe hartă (cm)	5		7,5		12	Distanța pe teren (km)		20		350	
Distanța pe hartă (cm)	5		7,5		12									
Distanța pe teren (km)		20		350										
5p	3. Între mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < 6\}$ se stabilește o dependență funcțională după regula $x \rightarrow y, y = -2x + 3$ . Reprezentați această relație:													
5p	a) într-un tabel;													
5p	b) prin diagrame;													
10p	c) folosind graficul.													
5p	4. În graficul din desen este prezentată dependența funcțională între mulțimile $A$ și $B$ .													
5p	a) Determinați mulțimile $A$ și $B$ .													
5p	b) Găsiți o formulă cu ajutorul căreia se exprimă $y$ în funcție de $x$ .													

# 4

# Patrulaterul

- 4.1 Patruleter convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex
- 4.2 Paralelogramul: proprietăți. Aplicații în geometria triunghiului
- 4.3 Paralelograme particulare: dreptunghi, romb, pătrat
- 4.4 Trapezul: clasificare, proprietăți. Linia mijlocie în trapez
- 4.5 Perimetre și arii



**Competențe specifice:**

1.4 2.4 3.4 4.4 5.4 6.4

4.1

# Patrulater convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

## Ne amintim

Trei puncte necoliniare determină un **triunghi**.

Dacă le notăm  $A, B$  și  $C$ , vorbim despre triunghiul  $ABC$  și scriem „ $\Delta ABC$ ”.

**Teorema 1.** Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui triunghi este  $180^\circ$ .

**Teorema 2.** În orice triunghi, lungimea unei laturi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două.

Geometria este fascinantă, multe rezultate geometrice, referitoare la figuri geometrice diferite, ne surprind cu componente comune, asemănătoare atât în ceea ce privește enunțul, cât și în ceea ce privește concluzia. Vom observa astfel de asemănări în cele ce urmează.

Patru puncte, oricare trei necoliniare, determină un patrulater<sup>1</sup>. Dacă le notăm  $A, B, C$  și  $D$ , vorbim despre patrulaterul  $ABCD$ . Din păcate, nu avem o notație ca la triunghi; prin urmare, vom scrie: „patrulaterul  $ABCD$ ”.

Fiecare dintre figurile alăturate îndeplinește condiția de a fi determinat de patru puncte, oricare trei necoliniare, deci toate aceste figuri geometrice sunt patrulatere.

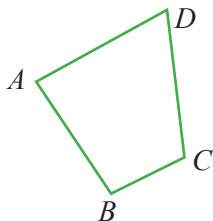


Fig. 1.a

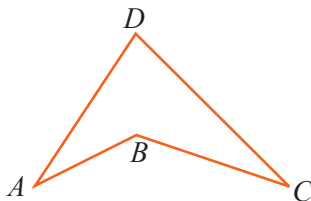


Fig. 1.b

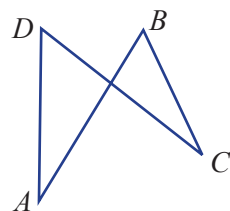


Fig. 1.c

## Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Punctele  $A, B, C$ , și  $D$  se numesc **vârfurile** patrulaterului.

Segmentele  $AB, BC, CD$  și  $DA$  se numesc **laturile** patrulaterului. Putem considera și dreptele care includ laturile patrulaterului și le vom numi **dreptele suport** ale laturilor patrulaterului (acestea sunt desenate punctat, în figurile 2.a, 2.b).

Să analizăm figura 2.a în comparație cu figura 2.b.

- 1) În figura 2.a, oricum am alege o latură, dreapta suport a acesteia nu intersectează altă latură, decât cel mult în vârfurile patrulaterului, ceea ce nu se întâmplă și în figura 2.b.
- 2) Oricum am alege o latură a patrulaterului din figura 2.a, celelalte două vârfuri se află de aceeași parte a dreptei suport a acestei laturi, în timp ce, la cel din figura 2.b, punctele  $C$  și  $D$  sunt situate de o parte și de alta a dreptei suport a laturii  $AB$ .

**Definiția 1:** Se numește **patrulater convex** un patrulater în care dreapta suport a oricărei laturi intersectează celelalte laturi, cel mult, în vârfurile patrulaterului.

Patrulaterele cu proprietăți analoge celui din figura 2.a sunt patrulatere convexe<sup>2</sup>.

**Definiția 2:** Un patrulater în care oricare două laturi se intersectează cel mult în vârfurile patrulaterului și care nu este convex se numește **patrulater concav**.

Patrulaterele din figurile 1.b și 2.b sunt patrulatere concave.

**Observația 1.** Un patrulater este **convex** dacă, pentru oricare dintre laturi, două vârfuri ale patrulaterului se află de aceeași parte a dreptei sale suport. În figura 2.b, dreapta suport a laturii  $AB$  taie latura  $CD$  în  $M$ , care nu este vârf al patrulaterului, iar vârfurile  $D$  și  $A$  sunt de o parte și de alta a dreptei  $BC$ .

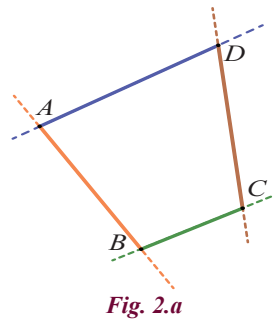


Fig. 2.a

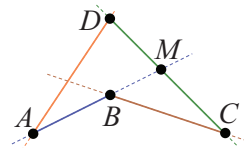


Fig. 2.b

<sup>1</sup> Pentru analogie cu definiția triunghiului și pentru simplitatea formulării, optăm pentru această definiție, mai puțin folosită, a patrulaterului.

<sup>2</sup> În clasa a VII-a vom studia doar patrulaterul convex, uneori, numindu-l *simplu* patrulater.

**Observația 2.**

Dacă patrulaterul  $ABCD$  este convex, atunci schimbând *circular* ordinea vârfurilor, el rămâne convex. (fig. 3.a)

Prin schimbări circulare, obținem patrulaterale:  $BCDA$ ,  $CDAB$  și  $DABC$ . Nicio altă schimbare a vârfurilor *nu păstrează* proprietatea de convexitate. (fig 3.b)

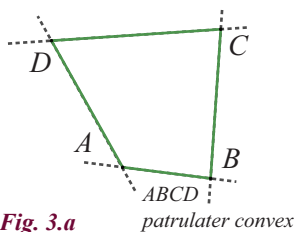


Fig. 3.a

patrulater convex

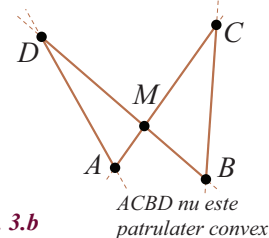


Fig. 3.b

ACBD nu este patrulater convex

Dicționar:

**circular** – aici cu sensul de *jur împrejur*



Ordinea vârfurilor în numirea patrulaterului este de mare importanță, spre deosebire de ordinea vârfurilor în numirea triunghiului, care nu contează.

Să analizăm în detaliu un *patrulater convex*  $ABCD$ , punctând asupra *noțiunilor geometrice* pe care le întâlnim.

- Punctele  $A, B, C$  și  $D$  sunt **vârfurile** patrulaterului. Vârfurile  $A$  și  $B$  sunt *vârfuri vecine*, la fel  $B$  și  $C, C$  și  $D$ , dar și  $A$  și  $D$ . Vârfurile  $A$  și  $C$ , de asemenea vârfurile  $B$  și  $D$ , sunt *vârfuri opuse*.
- Patrulaterul  $ABCD$  are **laturile**:  $AB, BC, CD$  și  $DA$ . (fig. 4)

Un patrulater convex are:

- două perechi de **laturi opuse**:  $(AB; DC)$  și  $(AD; BC)$ ;
- patru perechi de **laturi alăturate**:  $(AB; BC), (BC; CD), (CD; DA), (DA; AB)$ .

Orice două **laturi alăturate** au în comun un punct, vârf al patrulaterului.

De exemplu, vârful  $A$  este comun laturilor  $AB$  și  $AD$ .

- Două vârfuri opuse ale unui patrulater convex determină o **diagonală**: segmentele  $AC$  și  $BD$  sunt diagonalele patrulaterului  $ABCD$ .

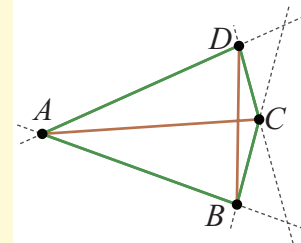


Fig. 4

- Oricare două laturi alăturate ale unui patrulater convex formează câte un **unghi**. Unghiurile patrulaterului  $ABCD$  sunt:  $\sphericalangle DAB, \sphericalangle ABC, \sphericalangle BCD$  și  $\sphericalangle CDA$ . Vârfurile acestor unghiuri coincid cu vârfurile patrulaterului:  $A, B, C$ , respectiv  $D$ . Dacă nu este pericol de confuzie, se pot nota cu  $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$  și se numesc **unghiurile interioare** sau, mai simplu, unghiurile patrulaterului. (fig. 5)

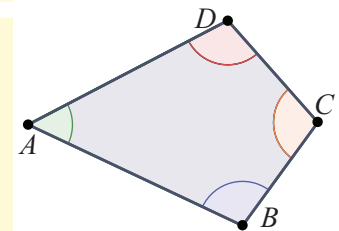


Fig. 5

- Un patrulater convex are:
  - patru perechi de **unghiuri alăturate**:  $(\sphericalangle A, \sphericalangle B), (\sphericalangle B, \sphericalangle C), (\sphericalangle C, \sphericalangle D), (\sphericalangle D, \sphericalangle A)$ ;
  - două perechi de **unghiuri opuse**:  $(\sphericalangle A, \sphericalangle C)$  și  $(\sphericalangle B, \sphericalangle D)$ .
- Partea comună a interioarelor a două unghiuri opuse formează **interiorul** patrulaterului convex.

**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

**Teorema 1.** Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui triunghi este  $180^\circ$ .

*Evident, ne întrebăm dacă pentru unghiurile unui patrulater convex putem descoperi că suma măsurilor unghiurilor sale interioare este un număr constant. Neașteptat, dar răspunsul este afirmativ.*

**Teorema 2.** Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui patrulater convex este  $360^\circ$ .

*Demonstrație:* La geometrie, înainte de a începe orice demonstrație, trebuie să ne gândim intens la rezultate asemănătoare pe care le cunoaștem. Evident, rezultatul aflat despre „suma măsurilor unghiurilor...” este cel referitor la triunghi. Observând că  $360^\circ = 2 \cdot 180^\circ$ , încercăm să identificăm două triunghiuri printr-o construcție care să păstreze cât mai multe unghiuri ale patrulaterului, dar să apară și triunghiuri.

Construim o diagonală. Fie  $AC$  această diagonală. (fig. 6)

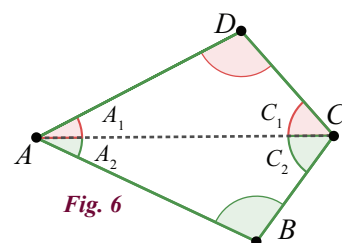


Fig. 6





Am obținut triunghiurile  $ABC$  și  $ACD$ . Găsim, în cele două triunghiuri,  $\sphericalangle A_1$ , respectiv  $\sphericalangle A_2$ , unghiuri care sunt adiacente și  $\sphericalangle A_1 + \sphericalangle A_2 = \sphericalangle A$ . Analog,  $\sphericalangle C_1 + \sphericalangle C_2 = \sphericalangle C$ .  
 În  $\triangle ABC$ ,  $\sphericalangle A_2 + \sphericalangle B + \sphericalangle C_2 = 180^\circ$ , iar în  $\triangle ACD$ ,  $\sphericalangle A_1 + \sphericalangle D + \sphericalangle C_1 = 180^\circ$ . Adunăm cele două relații și ținem cont de relațiile de la unghiuri adiacente.

$$\sphericalangle A_2 + \sphericalangle B + \sphericalangle C_2 + \sphericalangle A_1 + \sphericalangle D + \sphericalangle C_1 = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ.$$

Am evidențiat, prin raționamentul de mai sus, faptul că la un rezultat cunoscut anterior am adăugat sau am schimbat ceva și am obținut un rezultat nou. Astfel de asocieri sunt benefice pentru sedimentarea cunoștințelor de geometrie și pentru dobândirea abilităților specifice geometriei.

### Reținem!



- Un patrulater în care dreapta suport a oricărei laturi nu intersectează celelalte laturi decât, cel mult, în vârfurile patrulaterului, se numește **patrulater convex**.
- **Ordinea vârfurilor** în numirea patrulaterului convex este de mare importanță.
- **Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui patrulater convex este  $360^\circ$ .**



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- a) Desenați patrulaterul convex  $ABCD$ .  
 b) Scrieți perechile de laturi opuse ale patrulaterului.  
 c) Scrieți perechile de laturi alăturate ale patrulaterului.  
 d) Scrieți perechile de unghiuri opuse ale patrulaterului.  
 e) Scrieți perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului.
- Se consideră patrulaterul convex  $MNPQ$ , în care  $\sphericalangle M = 73^\circ$ ,  $\sphericalangle P = 107^\circ$ ,  $\sphericalangle Q = 64^\circ$ .  
 Calculați măsura unghiului  $\sphericalangle N$ .
- Se consideră patrulaterul  $ABCD$ , în care  $AB \perp AD$ ,  $BC \perp CD$  și  $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC$ .  
 Demonstrați că:  
 a)  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ ; b)  $AD \equiv BC$ ; c)  $AC \equiv BD$ .
- În desenul de mai jos, dreptele  $MQ$  și  $NP$  sunt paralele, iar dreptele  $MQ$  și  $PQ$  sunt perpendiculare.

Folosind datele înscrise pe figură, determinați măsurile unghiurilor patrulaterului  $MNPQ$ .
- În patrulaterul convex  $EFGH$  au loc relațiile:  $EF \equiv EH$ ,  $GF \equiv GH$ ,  $\sphericalangle FEG = 28^\circ$ ,  $\sphericalangle EGH = 73^\circ$ .  
 Calculați:  
 a) Măsurile unghiurilor patrulaterului  $EFGH$ .  
 b) Măsura unghiului format de diagonalele patrulaterului  $EFGH$ .
- În triunghiul  $ABC$  cu măsura unghiului  $\sphericalangle ABC$  de  $44^\circ$ , se consideră înălțimea  $AD$ ,  $D \in BC$ , mijlocul  $M$  al laturii  $AB$  și bisectoarea  $DN$  a unghiului  $\sphericalangle ADC$ ,  $N \in AC$ .  
 Știind că  $\sphericalangle AND \equiv \sphericalangle AMD$ , calculați măsurile unghiurilor patrulaterului  $AMDN$ .
- Triunghiul  $ABC$  este echilateral; perpendiculara în punctul  $B$ , pe dreapta  $AB$ , intersectează dreapta  $AC$  în punctul  $D$ , iar punctul  $E$  este mijlocul segmentului  $BD$ .  
 a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.  
 b) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului  $ABEC$ .
- Triunghiul  $ABC$  este echilateral, iar patrulaterul convex  $ABCD$  are două unghiuri opuse drepte.  
 Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului.





## 4.2 Paralelogramul: proprietăți. Aplicații în geometria triunghiului

### L1 Paralelogramul. Proprietăți

#### Ne amintim

*Axioma paralelelor*, cu o lungă istorie și de o importanță deosebită în dezvoltarea geometriei euclidiene și neeuclidiene, are un enunț scurt și clar: *printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură dreaptă paralelă cu aceasta.*

Două **drepte paralele** formează cu o secantă oarecare:

- *perechi de unghiuri **alterne interne, alterne externe, corespondente congruente;***
- *perechi de unghiuri **interne sau externe de aceeași parte a secantei suplementare.***

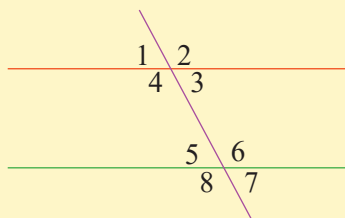


Fig. 1

$$\begin{aligned} \sphericalangle 4 &\equiv \sphericalangle 6, \sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 5 \\ \sphericalangle 1 &\equiv \sphericalangle 7, \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8 \\ \sphericalangle 1 &\equiv \sphericalangle 5, \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 6 \\ \sphericalangle 4 &\equiv \sphericalangle 8, \sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 7 \\ \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 &= 180^\circ \\ \sphericalangle 3 + \sphericalangle 6 &= 180^\circ \\ \sphericalangle 1 + \sphericalangle 8 &= 180^\circ \\ \sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 &= 180^\circ \end{aligned}$$

În clasa a VI-a, am consumat multă energie rezolvând probleme despre *paralelism*. Am observat că, uneori, trebuie să demonstrăm că două drepte sunt paralele, alteori știm că dreptele sunt paralele și demonstrăm alte proprietăți, folosind acest fapt.

Să ne oprim puțin și să admirăm *puterea unor termeni din geometrie*. O simplă afirmație prin care aflăm că o *dreaptă taie două drepte paralele* atrage după sine *8 congruențe de unghiuri și 4 relații de complementaritate*.

*Condițiile suficiente* ca două drepte tăiate de o secantă să fie paralele, cărora le spunem *criterii de paralelism*, ne învață tehnici prin care demonstrăm că două drepte sunt paralele, folosirea definiției nefiind întotdeauna eficientă. În mod natural, apare întrebarea: câte dintre cele 12 relații dintre unghiuri ar trebui să fie îndeplinite pentru ca dreptele să fie paralele?

- Dacă două drepte formează cu o secantă o **pereche de unghiuri alterne interne** sau o pereche de unghiuri **alterne externe** ori o pereche de unghiuri **corespondente congruente**, atunci dreptele **sunt paralele**.
- Dacă două drepte formează cu o secantă o **pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei** sau o pereche de unghiuri **externe de aceeași parte a secantei suplementare**, atunci dreptele **sunt paralele**.

#### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Problemă:** Cu ce proprietăți este îmbogățit un patrulater convex de *proprietatea de paralelism a laturilor sale opuse*?

- Un patrulater convex care are o **pereche de laturi opuse paralele** se numește **trapez**.
- Un patrulater convex care are **două perechi de laturi opuse paralele** se numește **paralelogram**.

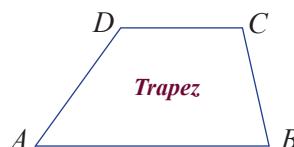


Fig. 2a



Fig. 2b

Paralelogramul este „campion” în privința bogăției proprietăților. Proprietățile paralelogramului au implicații fascinante în demonstrarea proprietăților altor poligoane.

Dicționar

**poligon** – o figură geometrică plană, închisă, determinată de trei sau mai multe segmente (laturi)



Să analizăm figura 2.b, observând, pe rând, laturile paralele  $AB$  și  $CD$ , apoi laturile paralele  $AD$  și  $BC$ .

- 1)  $AB \parallel DC$  și secanta  $AD$ . Unghiurile  $A$  și  $D$  ale paralelogramului sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, deci sunt suplementare, adică  $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180^\circ$ . Deoarece suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este  $360^\circ$ , rezultă că  $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$ .
- 2)  $AD \parallel BC$  și secanta  $AB$ . Unghiurile  $A$  și  $B$  ale paralelogramului sunt interne de aceeași parte a secantei, deci suplementare, adică  $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$ . Deoarece suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este  $360^\circ$ , rezultă că  $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$ . Am obținut (demonstrat) o primă proprietate a paralelogramului:

**Teorema 1.**

Într-un paralelogram, **unghiurile alăturate** sunt **suplementare**.

$$\begin{aligned} \sphericalangle A + \sphericalangle B &= 180^\circ & \sphericalangle B + \sphericalangle C &= 180^\circ \\ \sphericalangle C + \sphericalangle D &= 180^\circ & \sphericalangle A + \sphericalangle D &= 180^\circ \end{aligned}$$

Folosim această proprietate și observăm că  $\sphericalangle D$  este suplementar atât cu  $\sphericalangle A$ , cât și cu  $\sphericalangle C$ , deci  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ . Evident, același rezultat se obține și pentru  $\sphericalangle B$  și  $\sphericalangle D$ . Am demonstrat rezultatul:

**Teorema 2.**

Într-un paralelogram, **unghiurile opuse** sunt **congruente**.

$$\begin{aligned} \sphericalangle A &\equiv \sphericalangle C \\ \sphericalangle B &\equiv \sphericalangle D \end{aligned}$$

Să construim o diagonală (fig. 3). Ne conduce aceasta spre rezultate noi? Diagonala  $AC$  este secantă pentru ambele perechi de laturi paralele ale paralelogramului. Unghiurile  $\sphericalangle DCA$  și  $\sphericalangle BAC$  sunt alterne interne pentru paralelele  $AB$  și  $CD$ , iar unghiurile  $\sphericalangle DAC$  și  $\sphericalangle BCA$  sunt alterne interne pentru paralelele  $BC$  și  $AD$ , deci diagonala determină, cu laturile opuse, două perechi de unghiuri congruente.

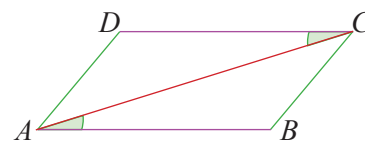


Fig. 3

Pentru diagonala  $BD$ , se obține un rezultat similar.

**Teorema 3.**

Fiecare **diagonală** a unui paralelogram formează, cu **laturile opuse**, unghiuri **congruente**.

$$\begin{aligned} \sphericalangle DCA &\equiv \sphericalangle BAC \\ \sphericalangle DAC &\equiv \sphericalangle BCA \\ \sphericalangle CDB &\equiv \sphericalangle ABD \\ \sphericalangle ADB &\equiv \sphericalangle CBD \end{aligned}$$

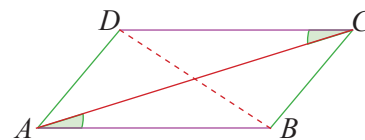


Fig. 4

Remarcăm faptul că triunghiurile formate (fig. 4) au elemente congruente. Cu unul dintre cazurile de congruență U.L.U. sau L.U.U., obținem  $\triangle ACB \equiv \triangle CAD$ , apoi  $AB \equiv CD$  și  $AD \equiv CB$ . Am ajuns la o nouă proprietate a paralelogramului:

**Teorema 4.**

**Laturile opuse** ale unui paralelogram sunt **congruente**.

$$AB \equiv CD \quad AD \equiv CB$$

Să observăm figura 5. Am trasat cele două diagonale ale paralelogramului și am notat cu  $O$  punctul lor de intersecție. S-au format patru triunghiuri care ne atrag atenția. Observăm că  $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OCD$  și  $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle ODC$ , iar teorema 4 ne spune că laturile paralele sunt și congruente, deci  $AB \equiv CD$ . Prin urmare,  $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$  (U.L.U.). Atunci,  $OA \equiv OC$  și  $OB \equiv OD$ . Am demonstrat, în acest fel, că punctul  $O$  este mijlocul fiecărei diagonale. Vom spune că punctul  $O$  înjumătățește diagonalele.

**Teorema 5.**

**Diagonalele** unui paralelogram se **înjumătățesc**.

$$\begin{aligned} OA &\equiv OC \\ OB &\equiv OD \end{aligned}$$

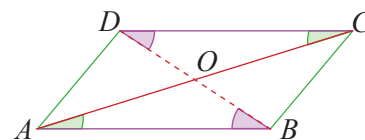


Fig. 5

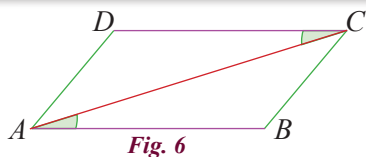
**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

Apare acum o nouă **problemă**: Care ar fi informațiile care, în ipoteza unei probleme sau pe parcursul rezolvării, ne-ar asigura că un patrulater convex este paralelogram?

Căutăm, deci, **condiții suficiente** ca un patrulater convex să fie paralelogram. Care dintre proprietățile studiate și câte dintre acestea sunt suficiente pentru a fi îndeplinite și celelalte proprietăți ale paralelogramului?

**Teorema 6.**

Dacă un patrulater convex are **două laturi opuse paralele și congruente**, atunci acesta este paralelogram.



*Demonstrație:* Considerăm laturile opuse  $AB$  și  $CD$  paralele și congruente. Pentru ca  $ABCD$  să fie paralelogram, rămâne de arătat că laturile opuse  $AD$  și  $BC$  sunt paralele. Desenăm diagonala  $AC$ . (fig. 6)

Paralelismul  $AB \parallel CD$  ne oferă congruența  $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ACD$ .

Din ipoteză,  $AB \equiv CD$ , iar  $AC$  este latură comună a triunghiurilor  $\triangle ADC$  și  $\triangle CBA$ . Folosind cazul de congruență L.U.L., obținem  $\triangle ADC \equiv \triangle CBA$ , prin urmare  $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$ .

Am demonstrat că  $AD$  și  $BC$  formează cu secanta  $AC$  unghiuri alterne interne congruente, deci sunt paralele și, conform definiției,  $ABCD$  este paralelogram.

**Teorema 7.**

Dacă un patrulater are ambele perechi de **laturi opuse congruente**, atunci patrulaterul este un paralelogram.

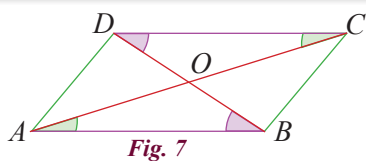
*Demonstrație:* Fie triunghiurile  $\triangle ADC$  și  $\triangle CBA$ .

Din ipoteză,  $AB \equiv CD$  și  $AD \equiv BC$ . Cum  $AC$  este latură comună celor două triunghiuri, rezultă  $\triangle ADC \equiv \triangle CBA$ , deci unghiurile omoloage ale triunghiurilor vor fi congruente. Acestea sunt, însă, unghiuri alterne interne, formate de câte două laturi opuse cu diagonala (secantă), rezultând paralelismul laturilor opuse.

Conform definiției, patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram.

**Teorema 8.**

Dacă într-un patrulater convex **diagonalele se înjumătățesc**, atunci patrulaterul este un paralelogram.



*Demonstrație:* Se formează două perechi de triunghiuri congruente. (fig. 7)

- 1) În  $\triangle OAB$  și  $\triangle OCD$  avem:  $AO \equiv OC$ ,  $BO \equiv OD$ , iar  $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$  (unghiuri opuse la vârf). Din cazul de congruență L.U.L. rezultă  $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$ , de unde  $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OCD$ , adică dreptele  $AB$  și  $CD$ , cu secanta  $AC$ , formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, deci  $AB \parallel CD$ .
- 2) În  $\triangle AOD$  și  $\triangle COB$  avem:  $AO \equiv OC$ ,  $OD \equiv OB$ , iar  $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle COB$  (unghiuri opuse la vârf). Din cazul de congruență L.U.L. rezultă  $\triangle AOD \equiv \triangle COB$ , de unde  $\sphericalangle OAD \equiv \sphericalangle OCB$ , adică dreptele  $AD$  și  $CB$ , cu secanta  $AC$ , formează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, deci  $AD \parallel CB$ . Patrulaterul  $ABCD$  are laturile opuse paralele, deci este paralelogram.

**Teorema 9.**

Dacă într-un patrulater convex oricare două **unghiuri alăturate sunt suplementare**, atunci patrulaterul este un paralelogram.

*Demonstrație:* Oricare două unghiuri alăturate ale unui patrulater convex pot fi considerate unghiuri interne de aceeași parte a secantei, pentru două laturi opuse ale patrulaterului. Secanta este una dintre celelalte două laturi. Folosind criteriul de paralelism corespunzător, rezultă că laturile opuse ale patrulaterului sunt paralele. Conform definiției, patrulaterul este paralelogram.

**Teorema 10.**

Dacă într-un patrulater convex ambele perechi de **unghiuri opuse sunt congruente**, atunci patrulaterul este paralelogram.

*Demonstrație:* Considerăm două unghiuri alăturate, de exemplu  $\sphericalangle A$  și  $\sphericalangle B$ . Din  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$  și  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ , rezultă  $\sphericalangle A + \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C + \sphericalangle D$ . Deoarece suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este  $360^\circ$  rezultă  $\sphericalangle A + \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$ . La fel pentru perechile de unghiuri alăturate  $\sphericalangle A$  și  $\sphericalangle D$ , respectiv  $\sphericalangle B$  și  $\sphericalangle C$ , deci conform teoremei anterioare, patrulaterul este paralelogram.



**Teorema 11.**

Dacă într-un patrulater convex **unghiurile formate de o diagonală cu cele două perechi de laturi opuse sunt congruente**, atunci patrulaterul este paralelogram.

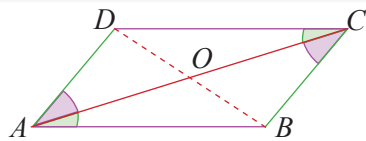


Fig. 8

*Demonstrație:*

Diagonala  $AC$  din figura 8 formează cu laturile opuse perechile de unghiuri congruente  $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle BAC$  și  $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$ .

Cum acestea sunt alterne interne pentru  $AB$  și  $DC$  cu secanta  $AC$ , respectiv alterne interne pentru  $AD$  și  $BC$  cu secanta  $AC$ , rezultă  $AB \parallel DC$  și  $AD \parallel BC$ , adică patrulaterul este paralelogram.



**Reținem!**

Un patrulater convex care are **ambele perechi de laturi opuse paralele** se numește **paralelogram**.

Dacă un patrulater este paralelogram, atunci:

- Laturile opuse sunt paralele.
- Laturile opuse sunt congruente.
- Unghiurile opuse sunt congruente.
- Unghiurile alăturate sunt suplementare.
- Fiecare diagonală formează cu laturile opuse unghiuri congruente.
- Diagonalele se înjumătățesc.

Pentru ca un patrulater convex să fie paralelogram, este suficient să fie îndeplinită una dintre condițiile:

- Ambele perechi de **laturi opuse** ale patrulaterului să fie **congruente**.
- **Două laturi** opuse ale patrulaterului să fie **paralele și congruente**.
- Ambele perechi de **unghiuri opuse ale patrulaterului** să fie **congruente**.
- Oricare două **unghiuri alăturate** ale patrulaterului să fie **suplementare**.
- **Unghiurile formate de o diagonală cu cele două perechi de laturi opuse** să fie **congruente**.
- **Diagonalele** patrulaterului să se **înjumătățească**.



**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

- 1 a) Desenați un paralelogram  $ABCD$ .  
b) Identificați:
  - perechi de laturi paralele;
  - perechi de laturi congruente;
  - perechi de unghiuri congruente;
  - perechi de unghiuri suplementare.
- 2 Fie paralelogramul  $ABCD$ , cu  $AB = 7$  cm și  $BC = 9$  cm.
  - a) Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor.  
 $p_1$ : „ $CD = 7$  cm”  
 $p_2$ : „ $AD = 9$  cm”  
 $p_3$ : „ $AC > 16$  cm”
- 3 Construiți paralelogramul  $MNPQ$ , pentru fiecare dintre cazurile:
  - a)  $MQ = 6$  cm,  $\sphericalangle M = 50^\circ$ ,  $MN = 4$  cm;
  - b)  $\sphericalangle N + \sphericalangle Q = 210^\circ$ ,  $NP = 2 \cdot PQ = 10$  cm.
- 4 a) Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului  $ABCD$ , știind că  $\sphericalangle A = 100^\circ$ .  
b) Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului  $DEFG$ , știind că  $\sphericalangle D = 1,5 \cdot (\sphericalangle E)$ .  
c) Calculați măsurile unghiurilor paralelogramului  $ABCD$ , știind că  $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 300^\circ$ .
- 5 Desenați paralelogramul  $ABCD$ . Fie  $P$  punctul de intersecție a diagonalelor acestuia. Completați:
  - a) Dacă  $AC = 20$  cm, atunci  $AP = \dots$  cm și  $CP = \dots$  cm.
  - b) Dacă  $BP = 7,5$  dm, atunci  $DP = \dots$  dm și  $BD = \dots$  cm.
- 6 Triunghiurile  $ABC$  și  $BCD$  sunt echilaterale, iar punctele  $A$  și  $D$  sunt distincte. Demonstrați că patrulaterul  $ABDC$  este paralelogram.

**7** Se consideră paralelogramul  $MNPQ$ . Punctul  $E$  este mijlocul segmentului  $MN$ , iar punctul  $F$  este mijlocul segmentului  $PQ$ .  
Demonstrați că:

- a)  $EF \equiv MQ$ ;      b)  $EF \parallel NP$ .

**8** În paralelogramul  $ABCD$ , punctul  $M$  este mijlocul laturii  $AB$ , iar  $DM \cap BC = \{E\}$ .  
Demonstrați că:

- a)  $\triangle ADM \equiv \triangle BEM$ ;  
b)  $ADBE$  este paralelogram.

**9** În paralelogramul  $ABCD$ ,  $AB > BC$ . Bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAD$  intersectează latura  $CD$  în  $E$ , iar bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BCD$  intersectează latura  $AB$  în  $F$ .

- a) Demonstrați că triunghiul  $ADE$  este isoscel.  
b) Demonstrați că  $AECF$  este paralelogram.

**10** Fie paralelogramul  $ABCD$  cu  $AC \cap BD = \{O\}$ . Prin  $O$ , se desenează o dreaptă  $d$  care intersectează laturile  $AB$  și  $CD$  în punctele  $E$ , respectiv  $F$  și prelungirile laturilor  $BC$  și  $AD$  în punctele  $P$ , respectiv  $Q$ . Demonstrați că:

- a)  $EO \equiv OF$ ;  
b)  $BPDQ$  și  $APCQ$  sunt paralelograme.

**11** Pe laturile  $EF$  și  $GH$  ale paralelogramului  $EFGH$ , se consideră punctele  $A$ , respectiv  $B$ , astfel încât  $EF = 3AE$  și  $HB = 2BG$ .

- Demonstrați că:  
a)  $EA \equiv BG$ ;  
b)  $AEBG$  este paralelogram;  
c) dreptele  $EG$ ,  $FH$  și  $AB$  sunt concurente.

**12** Punctul  $P$  este situat pe latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ . Punctele  $M$  și  $N$  sunt simetricele punctului  $P$  față de mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $AC$ .  
Demonstrați că:

- a) punctele  $M$ ,  $A$ ,  $N$  sunt coliniare;  
b)  $BCNM$  este paralelogram.

**13** Punctul  $M$  este mijlocul laturii  $EF$ , a triunghiului  $DEF$ . Paralela prin punctul  $E$  la dreapta  $DM$  intersectează dreapta  $DF$  în punctul  $N$ , iar punctul  $P$  este simetricul punctului  $M$  față de  $D$ .

- a) Demonstrați că  $EF \parallel NP$ .  
b) Demonstrați că  $MN \equiv PF$ .

**14** În paralelogramul  $MNPQ$ , avem  $\sphericalangle M > \sphericalangle N$ . Fie  $MR \perp MN$ ,  $R \in NP$  și  $PS \perp PQ$ ,  $S \in MQ$ .  
Demonstrați că:

- a)  $MRPS$  și  $NRQS$  sunt paralelograme;  
b) dreptele  $MP$ ,  $NQ$  și  $RS$  sunt concurente.

**15** Triunghiul  $ABC$  este isoscel, cu baza  $BC$ , iar  $AD$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAC$ ,  $D \in BC$ . Segmentul  $DP$  este mediană a triunghiului  $ABD$ , iar segmentul  $DQ$  este mediană a triunghiului  $ACD$ .

- a) Demonstrați că  $\sphericalangle APD \equiv \sphericalangle AQD$ .  
b) Demonstrați că  $CDPQ$  este paralelogram.  
c) Dacă  $PQ \cap AD = \{E\}$ , calculați valoarea raportului  $\frac{ED}{AD}$ .

**16** În paralelogramul  $ABCD$ ,  $AD \perp BD$ ,  $\sphericalangle CBD = 3 \cdot (\sphericalangle ABD)$  și  $AB = 24$  cm. Asociați fiecărei litere care numește cerința, din coloana întâi, cifra care numește răspunsul corect, din coloana a doua.

- a)  $\sphericalangle ABC =$                       1.  $100^\circ$   
   2.  $120^\circ$   
b)  $\sphericalangle C =$                          3.  $60^\circ$   
c)  $BC =$                          4. 72 cm  
   5. 12 cm  
d)  $\mathcal{P}_{ABCD} =$                  6. 102 cm

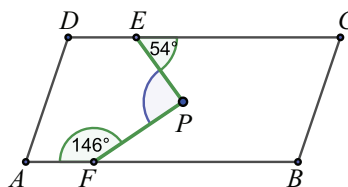
**17** Triunghiurile  $ABC$  și  $AMN$  au aceeași mediană  $AD$ , iar  $M \notin BC$ . Arătați că patrulaterul cu vârfurile  $B$ ,  $C$ ,  $M$ ,  $N$  este paralelogram.

**18** Fie  $C$  mijlocul segmentului  $AB$ . Dreapta  $d$  intersectează mediatoarele segmentelor  $AC$  și  $BC$  în punctele  $D$ , respectiv  $E$ , situate de aceeași parte a dreptei  $AB$ . Demonstrați că dacă  $DC \equiv EC$ , atunci  $ADEC$  este paralelogram.

**19** În paralelogramul  $ABCD$  notăm cu  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor  $DC$ , respectiv  $BC$ . Dreapta  $AE$  intersectează  $BC$  în  $G$ , dreapta  $AF$  intersectează  $DC$  în  $H$ . Arătați că patrulaterul  $DBHG$  este paralelogram.

**20** În patrulaterul convex  $ABCD$ ,  $AC \cap BD = \{O\}$ . Se știe că  $AO \equiv OC$  și  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ . Demonstrați că patrulaterul dat este paralelogram.

**21** Punctul  $P$  este situat în interiorul paralelogramului  $ABCD$ , iar  $E$  și  $F$  sunt pe laturile acestuia. Folosind datele din figura de mai jos, aflați măsura unghiului  $\sphericalangle EPF$ .





## L2 Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului

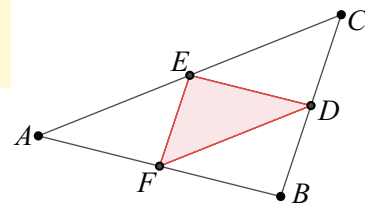
### Ne amintim

- 1) Se numește **mediană** a unui triunghi un segment care unește unul dintre vârfurile triunghiului cu mijlocul laturii opuse acestuia.  
Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a medianelor se notează, de regulă, cu  $G$  și se numește **centru de greutate**.
- 2) Se numește **mediatoarea** unui segment dreapta perpendiculară pe segment care conține mijlocul său.  
Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a mediatoarelor se notează, de regulă, cu  $O$  și se numește **centrul cercului circumscris triunghiului**.
- 3) Se numește **înălțime** a unui triunghi segmentul determinat de un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei duse din acel vârf pe dreapta suport a laturii opuse.  
Înălțimile unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a înălțimilor se notează, de regulă, cu  $H$  și se numește **ortocentru**.
- 4) Se numește **bisectoare** a unui unghi semidreapta interioară unghiului care are originea în vârful unghiului și determină, cu laturile acestuia, două unghiuri congruente.  
Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de intersecție a bisectoarelor se notează, de regulă, cu  $I$  și se numește **centrul cercului înscris în triunghi**.

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

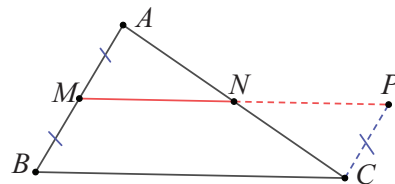
**Definiție:** Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește **linie mijlocie** a triunghiului.

- 1) Punctele  $D, E, F$  sunt *mijloacele* laturilor.
- 2) Segmentele  $DE, EF, FD$  sunt *liniile mijlocii* ale triunghiului  $ABC$ .



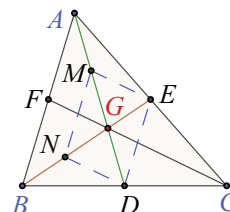
**Teorema 1.** Linia mijlocie determinată de mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia.

*Demonstrație:* Considerăm  $\triangle ABC$  și linia mijlocie  $MN$ ,  $M \in AB$ ,  $N \in AC$ . Prolungim  $MN$  cu segmentul  $NP \equiv MN$ . Deoarece  $N$  este mijlocul segmentului  $AC$ , în patrulaterul  $AMCP$  diagonalele se înjumătățesc, deci  $AMCP$  este paralelogram. Rezultă că  $PC \parallel AM$  și  $PC = AM$ . Dar  $M$  este mijlocul laturii  $AB$  și obținem că  $PC \parallel BM$  și  $PC = BM$ , ceea ce arată că patrulaterul  $BCPM$  este paralelogram. Rezultă succesiv:  $MP \parallel BC$  și  $MP = BC$ , adică  $MN \parallel BC$  și  $2MN = BC$ , iar în final,  $MN \parallel BC$  și  $MN = \frac{BC}{2}$ .



**Teorema 2.** Centrul de greutate al unui triunghi este situat pe fiecare mediană, la două treimi de vârful pe care îl conține și la o treime de mijlocul laturii opuse acestuia.

*Demonstrație:* Considerăm triunghiul  $ABC$  și medianele sale  $AD$  și  $BE$ . Dreptele  $AD$  și  $BE$  sunt concurente, deoarece formează cu secanta  $AB$  unghiuri interne de aceeași parte a secantei care nu sunt suplementare. Într-adevăr,  $\sphericalangle DAB + \sphericalangle EBA < \sphericalangle A + \sphericalangle B < 180^\circ$ . Notăm  $\{G\} = AD \cap BE$ . Fie  $M$  și  $N$  mijloacele segmentelor  $AG$ , respectiv  $BG$ .



În triunghiul  $GAB$  avem  $MN$  linie mijlocie, deci  $MN \parallel AB$  și  $MN = \frac{AB}{2}$ .

În triunghiul  $CAB$  avem  $DE$  linie mijlocie, deci  $DE \parallel AB$  și  $DE = \frac{AB}{2}$ .

Rezultă că  $MN \parallel DE$ ,  $MN = DE$ , ceea ce arată că patrulaterul  $DEMN$  este paralelogram și diagonalele sale se înjumătățesc. Obținem  $AM = MG = GD$  și  $BN = NG = GE$ . În final,  $AG = \frac{2}{3}AD$ ,  $GD = \frac{1}{3}AD$ ,  $BG = \frac{2}{3}BE$  și

$GE = \frac{1}{3}BE$ . Se demonstrează analog că punctul  $G$  aparține și mediane  $CF$  și  $CG = \frac{2}{3}CF$ ,  $GF = \frac{1}{3}CE$ . Punctul situat pe mediana  $AD$ , la o treime de bază și două treimi de vârf este unic. Deducem că cele trei mediane au în comun acest punct, notat cu  $G$  și numit *centru de greutate*.

**Teorema 3.** Înălțimile unui triunghi sunt concurente. Punctul în care se intersectează înălțimile se notează, de regulă, cu  $H$  și se numește *ortocentrul triunghiului*.

Pentru a demonstra această teoremă, vom folosi proprietățile paralelogramului și următorul rezultat, învățat în clasa a VI-a: *Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente într-un punct, numit centrul cercului circumscris triunghiului.*

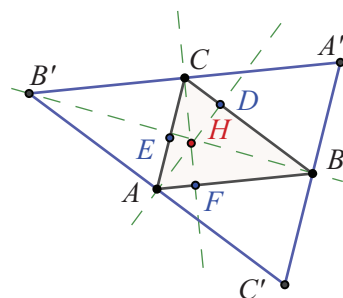
*Demonstrație:* Prin  $A$ ,  $B$  și  $C$  construim paralele la  $BC$ ,  $AC$ , respectiv  $AB$ , care se intersectează, două câte două, în punctele  $A'$ ,  $B'$  și  $C'$ .

Patrulaterul  $BCAC'$  și  $BCB'A$  au laturile respectiv paralele, deci sunt paralelograme.

Așadar  $B'$ ,  $A$ ,  $C'$  sunt coliniare și  $C'A \equiv BC \equiv AB'$ , adică  $A$  este mijlocul lui  $B'C'$ .

Înălțimea  $AD$  este perpendiculară pe  $BC$ , iar  $BC \parallel B'C'$ , deci  $AD \perp B'C'$ .

Prin urmare, înălțimea din  $A$  a  $\triangle ABC$  este mediatoare pentru latura  $B'C'$  a triunghiului  $A'B'C'$ . Cu același raționament, arătăm că înălțimea din  $B$  a  $\triangle ABC$  este mediatoare pentru latura  $A'C'$  a  $\triangle A'B'C'$ , iar înălțimea din  $C$  a  $\triangle ABC$  este mediatoare pentru latura  $B'A'$  a  $\triangle A'B'C'$ . Știm că, în orice triunghi, mediatoarele sunt concurente. În concluzie, înălțimile  $\triangle ABC$ , care sunt situate pe mediatoare, sunt concurente într-un punct. Notăm acest punct cu  $H$  și îl numim ortocentru al  $\triangle ABC$ .

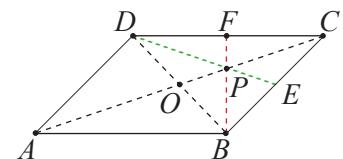


**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

**Aplicația 1:** Punctul  $E$  este mijlocul laturii  $BC$ , a paralelogramului  $ABCD$ , cu  $AC \cap BD = \{O\}$  și  $AC \cap DE = \{P\}$ . Demonstrați că dreapta  $BP$  conține mijlocul laturii  $CD$ .

*Soluție:* În paralelogramul  $ABCD$ , segmentele  $AC$  și  $BD$  sunt diagonale, deci se înjumătățesc și  $CO$  va fi mediană în  $\triangle BCD$ .

Cum și  $DE$  este mediană, rezultă că punctul  $P$  este centrul de greutate al acestui triunghi, deci mediana din  $B$  conține punctul  $P$ . Dacă  $BP \cap CD = \{F\}$ , atunci  $BF$  este mediană și  $F$  este mijlocul laturii  $CD$ .



**Aplicația 2:** Fie  $ABCD$  paralelogram,  $AC \cap BD = \{O\}$  și fie  $M$ , mijlocul segmentului  $AO$ .

Dreapta  $EF$  conține punctul  $M$  și este paralelă cu dreapta  $BD$ ,  $E \in BC$ ,  $F \in CD$ . Demonstrați că punctul  $O$  este centrul de greutate al triunghiului  $CEF$ .

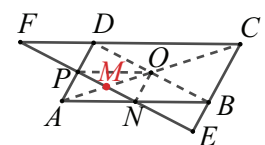
*Soluția I:* Din proprietățile paralelogramului,  $AO = CO$ ,

iar  $AO = 2 \cdot MO$ , deci  $MO = \frac{CM}{3}$ . (1)

Rămâne de demonstrat că  $CM$  este mediană în triunghiul  $CEF$ .

Fie  $EF \cap AB = \{N\}$  și  $EF \cap AD = \{P\}$ . În  $\triangle AOB$ ,  $M$  este mijlocul laturii  $AO$ ,

$N \in AB$  și  $MN \parallel OB$ . Rezultă că  $N$  este mijlocul laturii  $AB$  și  $MN = \frac{BO}{2}$ .





În  $\triangle AOD$ ,  $M$  este mijlocul laturii  $AO$ ,  $P \in AD$  și  $MP \parallel OD$ . Rezultă că  $P$  este mijlocul laturii  $AD$  și  $MP$  este linie mijlocie în  $\triangle AOD$ , deci  $MP = \frac{DO}{2}$ . Deoarece  $BO = DO$ , rezultă că  $MN = MP$ . (2)

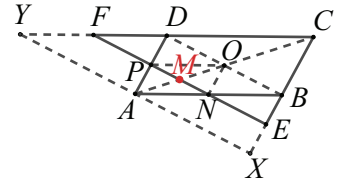
$NO$  este linie mijlocie în  $\triangle BDA \Rightarrow NO \parallel AD \parallel BC$ , iar din ipoteză,  $NE \parallel OB$ , deci patrulaterul  $BENO$  este paralelogram, cu  $EN = BO$ . Analog,  $DFPO$  are laturile opuse paralele, deci  $DFPO$  este paralelogram și  $FP = DO$ , de unde  $EN = FP$ . Folosind relația (2), rezultă  $EM = FM$ . În concluzie, segmentul  $CM$  este mediană în  $\triangle CEF$ , iar din (1),  $O$  este centrul de greutate al acestui triunghi.

*Soluția a II-a:* Construim paralela prin  $A$ , la  $BD$ , care intersectează dreapta  $BC$  în  $X$  și dreapta  $CD$  în  $Y$ . Patrulaterul  $DAXB$  și  $DBAY$  sunt paralelograme

(au laturile opuse paralele). Atunci, în  $\triangle AOB$ ,  $MN = \frac{OB}{2} = \frac{BD}{4}$ , iar în  $\triangle ABX$ ,

$$NE = \frac{AX}{2} = \frac{BD}{2}, \text{ deci } ME = \frac{3}{4}BD. \text{ Analog } MF = \frac{3}{4}BD. \text{ Rezultă } ME = MF, \text{ deci}$$

$CM$  este mediană în  $\triangle CFE$ . Folosind (1), rezultă că  $O$  este centrul de greutate al  $\triangle CFE$ .



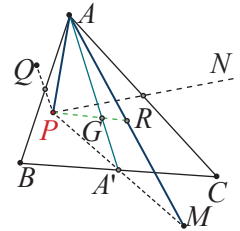
**Aplicația 3:** Punctul  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ , iar punctul  $P$  este situat în interiorul triunghiului și este diferit de  $G$ . Se consideră  $M, N, Q$  simetricele punctului  $P$  față de mijloacele laturilor  $BC, CA$ , respectiv  $AB$ , ale triunghiului.

a) Demonstrați că punctul  $G$  este centru de greutate și pentru triunghiul  $APM$ .

b) Demonstrați că dreptele  $AM, BN$  și  $CQ$  sunt concurente.

*Soluție:* a) Fie  $A'$  mijlocul laturii  $BC$ . Deoarece  $M$  este simetricul punctului  $P$  față de  $A'$ , rezultă că  $P, A'$  și  $M$  sunt coliniare și  $PA' = A'M$ , deci  $AA'$  este mediană a triunghiului  $APM$  și  $G$  este centrul de greutate al acestuia.

b) Analog,  $G$  este centru de greutate al triunghiurilor  $BPN$  și  $CPQ$ . Fie  $R$  mijlocul segmentului  $AM$ . Atunci,  $G \in PR$  și  $PG = 2GR$ . Fie  $S$  mijlocul segmentului  $BN$ . Atunci,  $G \in PS$  și  $PG = 2GS$ . Fie  $T$  mijlocul segmentului  $CQ$ . Atunci,  $G \in PT$  și  $PG = 2GT$ . Obținem  $R = S = T$ , deci dreptele  $AM, BN, CQ$  sunt concurente.



**Aplicația 4:** Se consideră triunghiul  $ABC$  și un punct  $G$  în interiorul său. Demonstrați că  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  dacă și numai dacă triunghiurile  $ABG, BCG$  și  $ACG$  au arii egale.

*Soluție:* Să observăm, mai întâi, că în cerința problemei apare sintagma *dacă și numai dacă*, ceea ce ne spune că avem de demonstrat două implicații:

- 1) Dacă  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ , atunci triunghiurile  $ABG, BCG$  și  $ACG$  au aceeași arie.
- 2) Dacă triunghiurile  $ABG, BCG$  și  $ACG$  au arii egale, atunci  $G$  este centrul de greutate în triunghiul  $ABC$ .

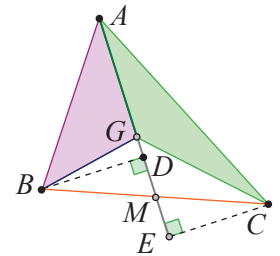
1) Dacă  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  și  $AG \cap BC = \{M\}$ , atunci  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ . Construim  $BD \perp AG, CE \perp AG, D, E \in AG$ .

Folosind cazul de congruență I.U., obținem  $\triangle BDM \equiv \triangle CEM$ , de unde

$$BD = CE \text{ și } \mathcal{A}_{ABG} = \frac{AG \cdot BD}{2} = \frac{AG \cdot CE}{2} = \mathcal{A}_{ACG}.$$

Printr-un raționament similar, se obține  $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{BCG}$ , deci  $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{ACG} = \mathcal{A}_{BCG}$ .

- 2) Dacă  $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{ACG}$ , atunci  $\frac{AG \cdot BD}{2} = \frac{AG \cdot CE}{2}$ , adică  $BD = CE$  și  $\triangle BDM \equiv \triangle CEM$ , deci  $BM = CM$ , adică  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ . Cum  $G$  este situat pe  $AM$ , rezultă că  $G$  aparține medianei  $AM$ . Procedând la fel, din  $\mathcal{A}_{ABG} = \mathcal{A}_{BCG}$ , rezultă că  $G$  aparține medianei din  $B$  a triunghiului  $ABC$ , adică  $G$  este centrul de greutate al  $\triangle ABC$ .



**Aplicația 5:** Considerăm paralelogramul  $ABCD$ , cu unghiul  $A$  ascuțit și  $BM \perp AD$ ,  $M \in AD$ ,  $BN \perp CD$ ,  $N \in CD$ . Știind că  $H$  este ortocentrul triunghiului  $BMN$ , arătați că  $DMHN$  este paralelogram.

**Soluția I:** Fie  $MP$  și  $NQ$  înălțimi în  $\triangle BMN$  și  $MP \cap NQ = \{H\}$ . În patrulaterul  $MPND$ ,  $\sphericalangle MPN + \sphericalangle PND = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle PMD + \sphericalangle MDN = 180^\circ$ , deci  $HM \parallel DN$ . (1)

Deoarece  $BM \perp AD$  și  $NQ \perp BM$ , rezultă  $AD \parallel NQ$ , deci  $DM \parallel HN$ . (2)

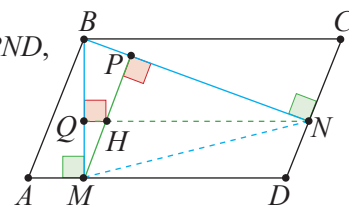
Folosind definiția paralelogramului, relațiile (1) și (2) ne asigură că  $DMHN$  este paralelogram.

**Soluția a II-a:**

Din  $MP \perp PN$  și  $PN \perp ND$  rezultă  $HM \parallel DN$ .

Din  $NQ \perp BM$  și  $BM \perp AD$  avem  $HN \parallel DM$ .

Deci  $HNDM$  este paralelogram.



### Reținem!



- Segmentul care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește **linie mijlocie** a triunghiului.
- Linia mijlocie determinată de două laturi ale unui triunghi este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia.
- Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct  $G$  care se află, pe fiecare mediană, la două treimi de vârful ei și la o treime de mijlocul laturii opuse. Punctul  $G$  este *centrul de greutate al triunghiului*.
- Înălțimile unui triunghi sunt concurente într-un punct  $H$ , numit *ortocentrul triunghiului*.

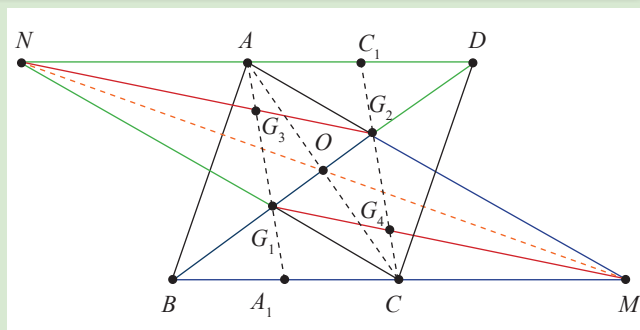
### Temă de portofoliu

I. a) Folosind o foaie suficient de mare și instrumente geometrice, realizați, respectând etapele sugerate, următoarea configurație geometrică.

- 1) Construiți paralelogramul  $ABCD$ , cu centrul  $O$ .
- 2) Identificați centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABC$  și  $ADC$ . Notați-le cu  $G_1$ , respectiv  $G_2$ .
- 3) Construiți segmentele  $AM$  și  $AN$ , unde  $\{M\} = AG_2 \cap BC$ , iar  $\{N\} = CG_1 \cap AD$ .
- 4) Identificați centrele de greutate ale triunghiurilor  $DNG_1$  și  $BMG_2$ . Notați-le cu  $G_3$ , respectiv  $G_4$ .
- 5) Trasați segmentele  $NG_2$  și  $MG_1$ . Trasați cu linie punctată segmentul  $MN$ .
- 6) Demonstrați că patrulaterul  $AMCN$  este un paralelogram care are centrul comun cu cel al paralelogramului  $ABCD$ .
- 7) Demonstrați că  $G_1G_4G_2G_3$  este paralelogram, cu centrul  $O$ .
- 8) Enumerați toate paralelogramele care apar în configurația realizată.

b) Folosind desenul realizat, rezolvați complet cerințele 6), 7) și 8). Pentru fiecare etapă a demersului, descrieți raționamentul făcut.

II. Demonstrați că centrul de greutate al unui triunghi este și centrul de greutate al triunghiului format de simetricile vârfurilor acestuia față de mijloacele laturilor opuse.



Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p	1. Patrulaterul $ABCD$ are unghiurile $A$ și $B$ suplementare și $\sphericalangle C = 100^\circ$ . Măsura unghiului $D$ este: A. $100^\circ$ B. $90^\circ$ C. $80^\circ$ D. $180^\circ$
5p	2. În patrulaterul convex $EFGH$ , $EG \cap FH = \{O\}$ , $EO$ este mediană în triunghiul $EFH$ , $FO$ este mediană în triunghiul $EFG$ . O pereche de drepte paralele este: A. $EO$ și $GF$ B. $FO$ și $HG$ C. $GO$ și $HE$ D. $EF$ și $HG$
5p	3. În patrulaterul $MNPQ$ , $MN = MQ$ și $PN = PQ$ . Unghiul format de dreptele $MP$ și $NQ$ are măsura de: A. $90^\circ$ B. $80^\circ$ C. $120^\circ$ D. $100^\circ$
5p	4. Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este 54 cm, iar $AB = 0,8BC$ . Latura $CD$ are lungimea de: A. 15 cm                      B. 12 cm                      C. 13 cm                      D. 14 cm
5p	5. Triunghiul $DEF$ este isoscel, $D = 30^\circ$ , $DE = DF$ . Paralela prin $F$ la $DE$ intersectează paralela prin $D$ la $EF$ în punctul $P$ . Măsura unghiului $DPF$ este: A. $70^\circ$ B. $80^\circ$ C. $75^\circ$ D. $85^\circ$
5p	6. Fie patrulaterul $LMNP$ , în care $\sphericalangle LMP \equiv \sphericalangle MPN$ . Măsura $\sphericalangle LMN + \sphericalangle MNP$ este: A. $90^\circ$ B. $120^\circ$ C. $150^\circ$ D. $180^\circ$
5p	7. Semidreptele $AE$ și $BE$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle DAB$ și $\sphericalangle ABC$ ale paralelogramului $ABCD$ . Măsura $\sphericalangle AEB$ este: A. $60^\circ$ B. $90^\circ$ C. $30^\circ$ D. $120^\circ$
5p	8. $ABCD$ este un paralelogram, $AC = 20$ dm, $BD = 16$ dm, $BC = 6$ dm, iar $AC \cap BD = \{O\}$ . Perimetrul triunghiului $ADO$ este: A. 30 cm                      B. 20 cm                      C. 24 cm                      D. 18 cm

II. La problemele următoare se cer rezolvări complete.

5p 5p	1. În figura alăturată, segmentul $AC$ este diametru al cercului $C_1$ și $BD$ este diametru al cercului $C_2$ . Cele două cercuri au același centru, punctul $O$ . Demonstrați că: a) $AB \parallel CD$ ; b) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ADC$ .	
10p	2. $BCDE$ este un paralelogram cu $BC = 2CD$ și $M$ este mijlocul laturii $DE$ . Calculați măsura unghiului $BMC$ .	
15p	3. Laturile $AB$ și $AC$ ale triunghiului $ABC$ se prelungesc cu segmentele $BD$ , respectiv $CE$ astfel încât $BD = CE = BC$ . Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB$ se intersectează în punctul $I$ , iar dreptele $BE$ și $CD$ se intersectează în punctul $L$ . Demonstrați că $BLCI$ este paralelogram.	
5p 5p 5p	4. Fie paralelogramul $ABCD$ , în care $AB = 4$ cm, $AB \perp BD$ și $\sphericalangle BAD = 2\sphericalangle ADB$ . Punctul $E$ este simetricul punctului $B$ față de $D$ , iar $EA \cap BC = \{F\}$ . a) Aflați măsurile unghiurilor paralelogramului. b) Calculați perimetrul paralelogramului. c) Determinați lungimile segmentelor $CE$ și $CF$ .	

## 4.3 Paralelograme particulare: dreptunghi, romb, pătrat

### L1 Dreptunghiul. Proprietăți

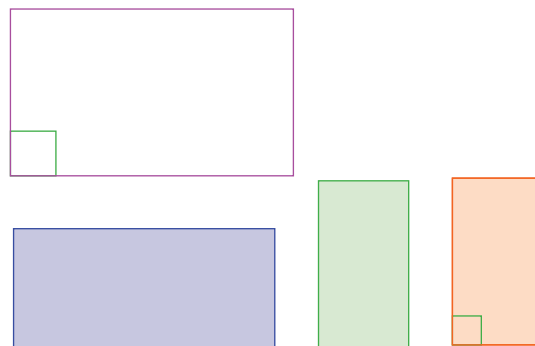
#### Ne amintim

- Patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram dacă și numai dacă  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$  și  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ .
- Patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram dacă și numai dacă are loc una dintre condițiile:
  - 1)  $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$  și  $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$ ;    2)  $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$  și  $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$ ;
  - 3)  $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180^\circ$  și  $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180^\circ$ ;    4)  $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180^\circ$  și  $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ$ .

#### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Definiție:** Paralelogramul cu un unghi drept se numește **dreptunghi**.

Mulțimea tuturor punctelor situate în interiorul unui dreptunghi sau pe laturile acestuia se numește **suprafață dreptunghiulară**.



Întâlnim dreptunghiuri și suprafețe dreptunghiulare în numeroase situații practice: foaia de hârtie a unei cărți sau a unui caiet, masa de scris, ecranul calculatorului, al telefonului etc., deci avem suficiente motive să studiem, în detaliu, proprietățile acestei figuri geometrice.

Dreptunghiul este un paralelogram; prin urmare, el are *toate proprietățile paralelogramului*. Adăugăm câteva proprietăți specifice.

**Teorema 1.** Toate unghiurile unui dreptunghi sunt drepte.

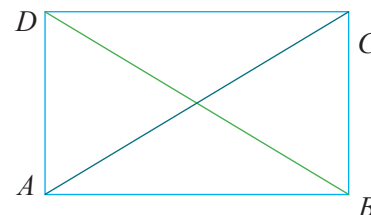
*Demonstrație:* Știm că în paralelogram unghiurile opuse sunt congruente, iar cele alăturate sunt suplementare. Dacă unul dintre unghiuri este drept, atunci unghiul opus este drept, iar unghiurile alăturate lui, fiind suplementare, sunt și ele drepte. În consecință, toate cele patru unghiuri ale unui dreptunghi sunt *drepte*, deci toate sunt *congruente*.



**Teorema 2.** Diagonalele unui dreptunghi sunt segmente congruente.

*Demonstrație:* Fie  $ABCD$  dreptunghi. Triunghiurile dreptunghice  $\triangle DAB$  și  $\triangle CBA$ , în care  $AD \equiv BC$  și  $AB$  este latură comună, sunt congruente conform cazului C.C.

Rezultă  $AC \equiv BD$ , adică diagonalele sunt segmente congruente.



**Teorema 3.** Dacă diagonalele unui paralelogram sunt congruente, atunci acesta este dreptunghi.

*Demonstrație:* În paralelogramul  $ABCD$  diagonalele sunt congruente,  $AC \equiv BD$ . Pentru a arăta că acesta este dreptunghi, vom demonstra că unul dintre unghiurile sale este drept. În acest scop, vom studia congruența a două triunghiuri care conțin diagonalele. În  $\triangle DAB$  și  $\triangle CBA$ , avem:  $AC \equiv BD$ ,  $AD \equiv BC$ , iar  $AB$  este latură comună. Aplicând cazul de congruență L.L.L., avem  $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ , adică  $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ . Dar, cele două sunt unghiuri alăturate în paralelogram, adică sunt suplementare. Fiind și congruente, ele sunt unghiuri drepte, deci patrulaterul este dreptunghi.



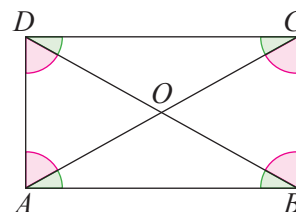
**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

Sunt remarcabile și următoarele proprietăți:

1) Diagonalele unui dreptunghi formează cu două laturi opuse ale acestuia patru unghiuri congruente.

*Demonstrație:* Observăm unghiurile formate de diagonalele  $AC$  și  $BD$  cu laturile  $AB$  și  $CD$ . Triunghiurile dreptunghice  $\triangle ABD$ ,  $\triangle BAC$ ,  $\triangle CDB$ ,  $\triangle DCA$  sunt congruente, conform cazului de congruență C.C., deci  $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle DCA$ .

În mod analog, observăm că unghiurile formate de diagonalele  $AC$  și  $BD$  cu laturile  $AD$  și  $BC$  sunt congruente:  $\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ADB$ .



2) Diagonalele unui dreptunghi formează, cu laturile acestuia, două perechi de triunghiuri isoscele congruente.

*Demonstrație:* Fie  $ABCD$  dreptunghi. Diagonalele dreptunghiului sunt congruente și se înjumătățesc, adică  $AC \equiv BD$  și  $AO \equiv BO \equiv CO \equiv DO$ , unde  $O$  este punctul de intersecție a diagonalelor.

Din  $AO \equiv CO$ ,  $BO \equiv DO$  și  $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ , rezultă  $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ .

Din  $AO \equiv CO$ ,  $DO \equiv BO$  și  $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOC$ , rezultă  $\triangle AOD \equiv \triangle COB$ .

Din  $AO \equiv BO \equiv CO \equiv DO$ , rezultă că toate cele patru triunghiuri sunt isoscele.

Rezultatele obținute ne oferă două tehnici de a demonstra că un patrulater este dreptunghi:

- 1) definiția: „Dreptunghiul este un paralelogram cu un unghi drept”.
- 2) teorema 3: „Dreptunghiul este un paralelogram cu diagonalele congruente”.

Aplicația următoare adaugă la acestea un nou instrument prin care putem arăta că o figură este dreptunghi.

**Aplicație:** Patrulaterul convex cu toate unghiurile congruente este dreptunghi.

*Soluție:* Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este  $360^\circ$ . Cum cele patru unghiuri ale patrulaterului sunt congruente, iar suma lor este  $360^\circ$ , rezultă că fiecare unghi are  $90^\circ$ . Toate unghiurile patrulaterului sunt drepte, adică oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare. Patrulaterul este paralelogram cu un unghi drept, deci este dreptunghi.

**Reținem!**



- Paralelogramul cu un unghi drept se numește dreptunghi.
- Toate unghiurile unui dreptunghi sunt drepte.
- Un paralelogram este dreptunghi dacă și numai dacă are diagonalele congruente.
- Dacă un patrulater are trei unghiuri drepte atunci este dreptunghi

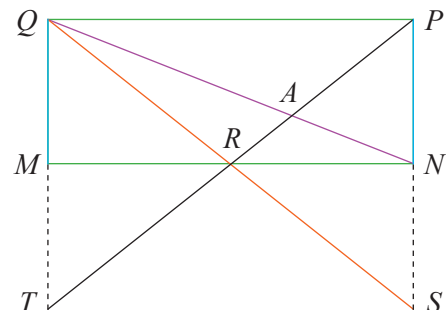




- 1 Construiți dreptunghiul  $ABCD$  pentru fiecare din situațiile:
  - a)  $AB = 6$  cm,  $BC = 5$  cm;
  - b)  $AB = 8$  cm,  $BD = 10$  cm;
  - c)  $AC = 12$  cm și  $\sphericalangle ACB = 30^\circ$ .
- 2 Demonstrați că orice patrulater cu trei unghiuri drepte este dreptunghi.
- 3 Demonstrați că orice patrulater în care măsura fiecărui unghi este media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri este un dreptunghi.
- 4 În dreptunghiul  $ABCD$  cu  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $\sphericalangle AOD = 60^\circ$  și  $AC = 24,8$  cm. Calculați perimetrul triunghiului  $BOC$ .
- 5 Diagonalele dreptunghiului  $MNPQ$  se intersectează în punctul  $O$ .
  - a) Dacă  $\sphericalangle MOQ = 72^\circ$ , calculați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle MQN$  și  $\sphericalangle MPQ$ .
  - b) Dacă  $\sphericalangle MQO = 26^\circ$ , calculați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle MOQ$  și  $\sphericalangle MPN$ .
- 6 Unghiurile  $\sphericalangle AOB$  și  $\sphericalangle BOC$  sunt adiacente suplementare, iar  $OM$ , respectiv  $ON$ , sunt bisectoarele acestora. Fie  $BD \perp OM$ ,  $D \in OM$  și  $BE \perp ON$ ,  $E \in ON$ . Demonstrați că:
  - a) patrulaterul  $BDOE$  este dreptunghi.
  - b)  $OB \equiv DE$ .
- 7 Fie  $AD$  înălțime a triunghiului  $ABC$ ,  $D \in BC$ . Punctele  $E$  și  $F$  sunt simetricele punctului  $D$  față de mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $AC$ . Demonstrați că  $BCFE$  și  $ADBE$  sunt dreptunghiuri.
- 8 Se consideră dreptunghiul  $ABCD$ , cu  $AB = 15$  cm,  $BC = 10$  cm. Punctele  $E$  și  $F$  aparțin laturii  $AB$ , astfel încât  $AE = EF = FB$ , punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $BC$ , iar  $N$  este situat pe latura  $CD$ , astfel încât  $DN = 2 CN$ . Demonstrați că:
  - a)  $BCNF$  este dreptunghi;
  - b)  $DF \perp FM$ ;
  - c) dacă  $P$  este simetricul punctului  $M$  față de  $N$ , atunci  $DFMP$  este dreptunghi.
- 9 Diagonalele dreptunghiului  $MNPQ$  se intersectează în punctul  $O$ ,  $\sphericalangle ONP = 30^\circ$  și  $MP = 20$  cm. Calculați:
  - a) măsura unghiului  $MON$ ;

b) lungimea segmentului  $MN$ .

- 10  $AB$  este înălțimea corespunzătoare bazei  $CD$  a triunghiului isoscel  $ACD$ . Dacă punctul  $E$  este simetricul punctului  $C$  față de mijlocul segmentului  $AB$ , demonstrați că  $ABDE$  este dreptunghi.
- 11 Punctele  $A, B, C, D, E$  sunt coliniare, în această ordine, cu  $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DE$ , iar punctele  $M$  și  $N$  sunt simetrice față de punctul  $C$ ,  $M \notin AB$  și  $AE = 2 MN$ . Demonstrați că:
  - a)  $AMEN$  este paralelogram.
  - b)  $BMDN$  este dreptunghi.
- 12 Punctul  $D$  este situat pe latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ . Paralela prin  $D$  la  $AB$  intersectează dreapta  $AC$  în punctul  $E$ , iar paralela prin  $D$  la  $AC$  intersectează dreapta  $AB$  în punctul  $F$ . Demonstrați că  $AEDF$  este dreptunghi dacă și numai dacă  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ .
- 13  $AB$  este diametrul cercului cu centrul  $O$  și raza  $AO = r$ . Mediatoarea segmentului  $AO$  intersectează cercul în punctele  $C$  și  $D$ , iar mediatoarea segmentului  $BO$  intersectează cercul în punctele  $E$  și  $F$ . Demonstrați că punctele  $C, D, E, F$  sunt vârfurile unui dreptunghi.
- 14 Punctul  $P$  este situat pe latura  $AB$  a dreptunghiului  $ABCD$ , astfel încât  $CP = AB$  și  $\sphericalangle APD = 5 \cdot (\sphericalangle ADP)$ . Calculați măsurile unghiurilor triunghiului  $CDP$ .
- 15  $MNPQ$  este dreptunghi,  $S$  este simetricul punctului  $P$  față de  $N$ ,  $QS \cap MN = \{R\}$  și  $PR \cap MQ = \{T\}$ .
  - a) Demonstrați că  $TS \equiv MN$ .
  - b) Dacă  $PR \cap QN = \{A\}$ , demonstrați  $AT = 2 \cdot PA$ .



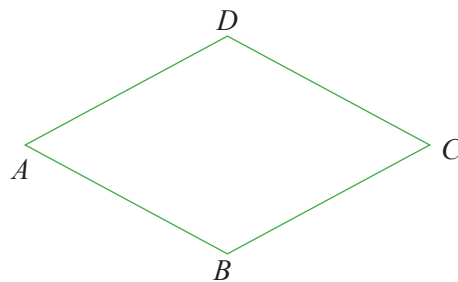


## L2 Rombul. Proprietăți

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Definiție:** Paralelogramul care are două laturi consecutive (alăturate) congruente se numește **romb**.

Rombul este un paralelogram, prin urmare, rombul are *toate proprietățile paralelogramului*. Adăugăm câteva proprietăți specifice.



**Teorema 1.** Toate laturile unui romb sunt congruente.

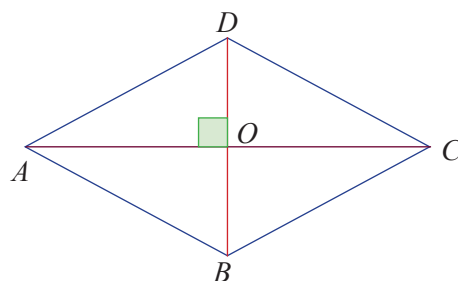
*Demonstrație:* Fie rombul  $ABCD$ . Deoarece este paralelogram, laturile opuse sunt congruente, deci  $AB \equiv CD$  și  $AD \equiv BC$ . Condiția suplimentară,  $AB \equiv BC$ , implică  $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$ .

În consecință, toate cele patru laturi ale rombului sunt *congruente*.

**Teorema 2.** Diagonalele unui romb sunt perpendiculare.

*Demonstrație:* Considerăm rombul  $ABCD$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ . Diagonalele sale se înjumătățesc, deci  $OA \equiv OC$ .

În triunghiul isoscel  $ABC$ ,  $BO$  este mediana corespunzătoare bazei  $AC$ , deci este și înălțime. Rezultă  $BO \perp AC$  sau  $BD \perp AC$ .



**Teorema 3.** Diagonalele unui romb sunt bisectoare ale unghiurilor acestuia.

*Demonstrație:* Considerăm rombul  $ABCD$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ .

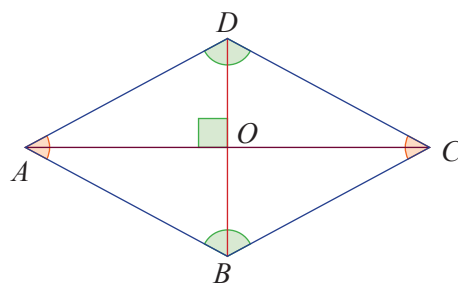
Triunghiul  $ABD$  este isoscel, iar dreapta  $AC$  include mediana  $AO$ , corespunzătoare bazei. Atunci,  $AC$  include și bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAD$ , adică  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$ .

Dar,  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$  și  $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ACB$  (sunt alterne interne).

Cele trei congruențe conduc la  $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACD$ ,

adică dreapta  $AC$  include și bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BCD$ .

La fel se demonstrează că dreapta  $BD$  include bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle ABC$  și  $\sphericalangle ADC$ .



### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

Putem deduce acum **condiții suficiente** ca un patrulater să fie romb.

$C_1$ : Dacă un patrulater are toate laturile congruente, atunci acesta este romb.

$C_2$ : Dacă diagonalele unui paralelogram sunt perpendiculare, atunci acesta este romb.

$C_3$ : Dacă una dintre diagonalele unui paralelogram este și bisectoare a unui unghi al paralelogramului, atunci acest paralelogram este romb.

Am identificat următoarele modalități de a arăta că o figură geometrică este romb:

1) Definiția: „Rombul este paralelogramul care are două laturi alăturate congruente”.

2) Condiția suficientă  $C_1$  (referitoare la lungimile laturilor).

3) Condițiile suficiente  $C_2$  sau  $C_3$  (referitoare la diagonale).

### Temă de portofoliu

După ce ați înțeles raționamentele prin care au fost demonstrate teoremele 1, 2, 3, demonstrați împreună cu un coleg/o colegă afirmațiile  $C_1$ ,  $C_2$  și  $C_3$ .



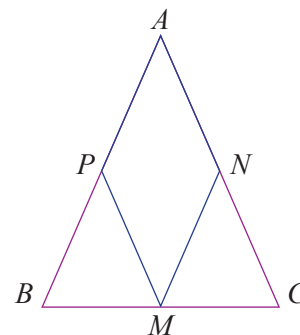
**Aplicația 1:** Fie  $M, N, P$  mijloacele laturilor triunghiului isoscel  $ABC$ , cu  $AB \equiv AC$ . Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile  $A, M, N, P$  este romb.

**Soluție:** Fie  $M$  mijlocul laturii  $BC$ ,  $N$  mijlocul laturii  $AC$ ,  $P$  mijlocul laturii  $AB$ . Atunci,  $AP = \frac{AB}{2}$  și  $AN = \frac{AC}{2}$ . Segmentele  $MN$  și  $MP$  sunt

linii mijlocii în  $\triangle ABC$ , deci  $MN = \frac{AB}{2}$  și  $MP = \frac{AC}{2}$ .

Dar  $AB \equiv AC$ , deci  $PA = MP = MN = AN$ .

Conform  $C_1$ , patrulaterul  $ANMP$  este romb.



**Aplicația 2:**  $ABCD$  este un patrulater convex, în care diagonala  $BD$  este bisectoarea unghiurilor  $\sphericalangle B$  și  $\sphericalangle D$ , iar  $AC$  este mediatoarea segmentului  $BD$ . Demonstrați că  $ABCD$  este romb.

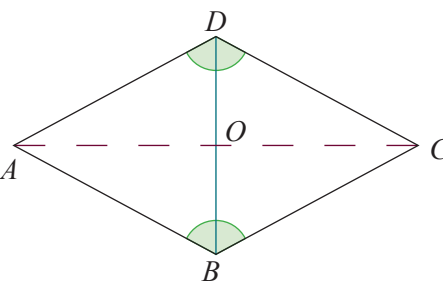
**Soluție:** Diagonala  $BD$  este bisectoarea unghiurilor  $\sphericalangle B$  și  $\sphericalangle D$ . Suntem tentați să ne gândim la condiția  $C_3$ . Dar nu știm despre  $ABCD$  că ar fi paralelogram. Căutăm elemente congruente.

Diagonala  $BD$  este bisectoarea unghiurilor  $\sphericalangle B$  și  $\sphericalangle D$ , deci  $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$  și  $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDB$ , iar  $BD$  este latură comună.

Conform cazului de congruență U.L.U.,  $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ . Rezultă  $AB \equiv BC$  și

$AD \equiv DC$ . Dar  $AC$  este mediatoarea segmentului  $BD$ , deci  $AB \equiv AD$  și  $CB \equiv CD$ .

Obținem  $AB \equiv BC \equiv CD \equiv DA$ , adică  $ABCD$  este romb.



### Reținem!



- Paralelogramul care are două laturi alăturate congruente se numește romb.
- Un patrulater este romb dacă și numai dacă are toate laturile congruente.
- Un paralelogram este romb dacă și numai dacă are diagonalele perpendiculare.
- Un paralelogram este romb dacă și numai dacă o diagonală este și bisectoare a unui unghi al său.



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- a) Construiți rombul  $ABCD$ , cu latura de 6 cm.  
b) Construiți rombul  $EFGH$ , cu  $EG = 2$  cm și  $FH = 5$  cm.
- Ana și Călin au următorul dialog despre patrulater:

Ana: Mijloacele laturilor oricărui romb sunt vârfurile unui dreptunghi.  
Călin: Mijloacele laturilor oricărui dreptunghi sunt vârfurile unui romb.  
Decideți care dintre cei doi prieteni are dreptate. Justificați răspunsul dat.
- $ABCD$  este un paralelogram cu  $\sphericalangle ADB = 56^\circ$  și  $\sphericalangle ACB = 34^\circ$ .  
Demonstrați că  $ABCD$  este un romb.
- $ABCD$  este un romb, iar paralela prin punctul  $C$  la dreapta  $BD$  intersectează dreapta  $AB$  în punctul  $M$  și dreapta  $AD$  în punctul  $N$ .  
Demonstrați că  $MN = 2 \cdot BD$ .  
Stabiliți dacă rămâne valabil rezultatul când  $ABCD$  este doar paralelogram, fără a fi romb.
- $MNPQ$  este paralelogram, iar distanțele de la punctul  $M$  la dreptele  $NP$  și  $PQ$  sunt egale.  
Arătați că  $MNPQ$  este romb.
- Fie rombul  $CDEF$  cu  $CE \cap DF = \{O\}$ ,  $CO = 2,5$  cm, iar  $EF = 5$  cm.  
a) Aflați măsurile unghiurilor rombului.  
b) Calculați măsurile unghiurilor  $CEF$  și  $CFD$ .

- 7** În paralelogramul  $ABCD$ ,  $AB = BD = 10$  cm,  $E$  este mijlocul laturii  $AD$  și  $BE \cap CD = \{F\}$ .
- Demonstrați că  $DC \equiv DF$ .
  - Calculați lungimea segmentului  $AF$ .

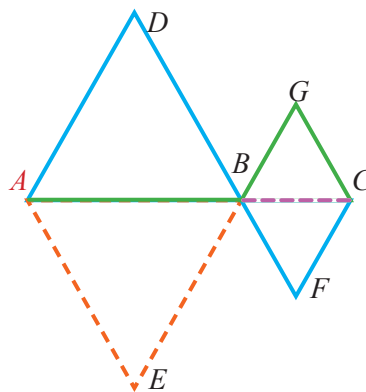
- 8** Pe latura  $LM$  a rombului  $LMNP$  se consideră punctul  $Q$ , astfel încât  $PQ \perp LM$ . Știind că  $LM = 16$  cm și  $PQ = 8$  cm, aflați măsurile unghiurilor rombului.

- 9** Punctul  $O$  este centrul dreptunghiului  $ABCD$ . Paralela prin punctul  $C$  la dreapta  $BD$  intersectează paralela prin punctul  $D$  la dreapta  $AC$  în  $E$ . Demonstrați că  $CD \perp OE$ .

- 10** Fie punctul  $M$  situat pe una dintre diagonalele rombului  $ABCD$ . Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:  
„ $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = 180^\circ$ ”.

- 11** În triunghiul  $ABC$ ,  $B = 90^\circ$ , bisectoarea unghiului  $A$  intersectează latura  $BC$  în  $D$  și perpendiculara în  $C$ , pe  $AC$ , în  $E$ . Fie  $EF \parallel BC$ ,  $F \in AB$ .
- Arătați că  $\triangle CDE$  este isoscel.
  - Demonstrați că  $CDFE$  este romb.

- 12** În configurația de mai jos este reprezentată schița centrului istoric al unui oraș. Segmentele reprezintă străzile de acces, iar punctele reprezintă obiective turistice. Marius pleacă din punctul  $A$  și vizitează obiectivele  $D, B, F, C$ , în această ordine. Bianca pleacă din același punct și vizitează obiectivele  $B, G, C$ . Punctele  $A, B, C$  sunt coliniare,  $AB = 2 \cdot BC = 1,2$  km,  $\sphericalangle DAE = \sphericalangle FCG = 120^\circ$ , iar patrulaterul  $ADBE$  și  $BFCG$  sunt rombi.



- Calculați distanța parcursă de Marius și pe cea parcursă de Bianca.
- Determinați traseul cel mai scurt prin care Marius poate vizita toate obiectivele reprezentate în schiță.

### L3 Pătratul. Proprietăți

#### Ne amintim

În lecțiile anterioare, pornind de la paralelogram, adăugând câte o condiție, am obținut următoarele forme geometrice:

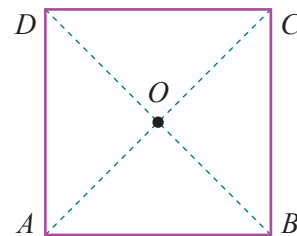
- dreptunghiul* – adăugând condiția de congruență a unghiurilor;
- rombul* – adăugând condiția de congruență a laturilor.

#### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ne întrebăm ce figură geometrică vom obține dacă vom considera, împreună, cele două restricții (condiții). Desenând un astfel de patrulater, îl recunoaștem imediat: este cel mai cunoscut dintre patrulaterul convexe, **pătratul**.

**Definiție:** Patrulaterul convex care este și dreptunghi, și romb, se numește *pătrat*.

Mulțimea tuturor punctelor situate în interiorul unui pătrat sau pe laturile sale se numește *suprafață pătratică*.



Această definiție ne sugerează că pătratul se bucură de toate proprietățile dreptunghiului și de toate proprietățile rombului.

Dorim să identificăm și proprietăți specifice. În acest scop, considerăm pătratul  $ABCD$ , cu  $AC \cap BD = \{O\}$ .

### Proprietatea

$P_1$ : Pătratul are toate laturile congruente și toate unghiurile congruente (unghiuri drepte).

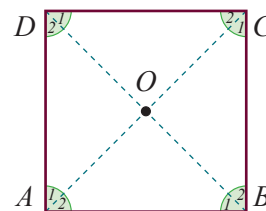
$P_2$ : Diagonalele pătratului sunt congruente și perpendiculare.

$P_3$ : Fiecare diagonală a unui pătrat este bisectoare a unghiurilor ale căror vârfuri le conține.

$P_4$ : Diagonalele pătratului se înjumătățesc determinând patru segmente congruente.

*Demonstrație:*

$P_1$ : Din  $ABCD$  pătrat, rezultă că  $ABCD$  este romb și dreptunghi. Din  $ABCD$  romb, obținem  $AB \equiv BC \equiv CD \equiv AD$  (are toate laturile congruente), iar din  $ABCD$  dreptunghi, obținem  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$  (are toate unghiurile congruente).



$P_2$ : Din  $ABCD$  pătrat, rezultă  $ABCD$  este romb și dreptunghi. Din  $ABCD$  dreptunghi rezultă că diagonalele sunt congruente,  $AC \equiv BD$ , iar din  $ABCD$  romb, obținem că diagonalele sunt perpendiculare,  $AC \perp BD$ .

$P_3$ : Din  $ABCD$  pătrat, rezultă  $ABCD$  romb, iar diagonalele sunt bisectoare ale unghiurilor sale:  $\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle A_2$  și  $\sphericalangle C_1 \equiv \sphericalangle C_2$ , apoi  $\sphericalangle B_1 \equiv \sphericalangle B_2$  și  $\sphericalangle D_1 \equiv \sphericalangle D_2$ .

**Observație:** Unghiurile formate de fiecare diagonală a unui pătrat cu fiecare latură a acestuia sunt congruente și au măsura de  $45^\circ$ .

$P_4$ : Din  $ABCD$  pătrat, rezultă  $ABCD$  paralelogram și diagonalele se înjumătățesc:  $OA = OC$  și  $OB = OD$ . Folosind  $P_2$ , rezultă  $OA = OB = OC = OD$ .

Deducem, de asemenea, condiții suficiente ca un patrulater convex să fie pătrat.

$C_1$ : Dacă un patrulater este și dreptunghi, și romb, atunci acesta este pătrat (definiția).

$C_2$ : Dacă un romb are un unghi drept, atunci acesta este pătrat.

$C_3$ : Dacă un romb are diagonalele congruente, atunci acesta este pătrat.

$C_4$ : Dacă un dreptunghi are diagonalele perpendiculare, atunci acesta este pătrat.

$C_5$ : Dacă un dreptunghi are două laturi consecutive congruente, atunci acesta este pătrat.

$C_6$ : Dacă un paralelogram are două laturi alăturate congruente și două unghiuri alăturate congruente, atunci acesta este pătrat.

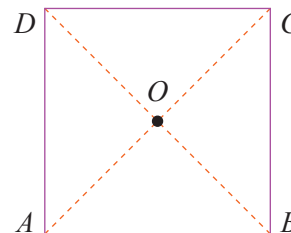
$C_7$ : Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare și congruente, atunci acesta este pătrat.

$C_8$ : Dacă o diagonală a unui dreptunghi este bisectoare a unui unghi al său, atunci acesta este pătrat.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

**Aplicația 1:** Demonstrați condiția  $C_7$ : „Dacă un paralelogram are diagonalele congruente și perpendiculare, atunci acesta este pătrat”.

*Demonstrație:* Considerăm paralelogramul  $ABCD$ . Din  $AC \equiv BD$ , rezultă  $ABCD$  este dreptunghi. Din  $AC \perp BD$ , rezultă că  $ABCD$  este romb, deci  $ABCD$  este și dreptunghi, și romb, adică pătrat.



### Temă de portofoliu

Demonstrați împreună cu un coleg/o colegă **alte două** dintre condițiile suficiente enumerate anterior.

**Aplicația 2:** În patrulaterul  $ABCD$ , notăm  $A', B', C', D'$  mijloacele laturilor  $AB, BC, CD$ , respectiv  $DA$ .

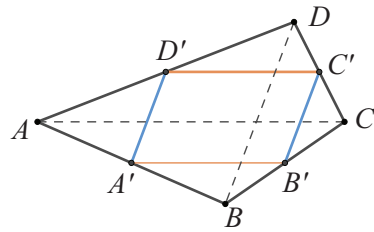
1) Demonstrați că patrulaterul  $A'B'C'D'$  este paralelogram.

2) Găsiți condițiile pe care trebuie să le îndeplinească  $ABCD$ , pentru ca  $A'B'C'D'$  să fie:

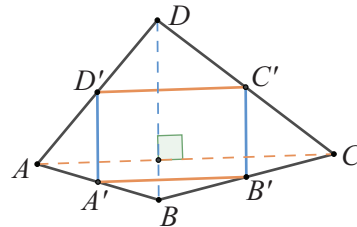
- a) dreptunghi;      b) romb;      c) pătrat.

**Demonstrație:**

1) Laturile patrulaterului  $A'B'C'D'$  unesc mijloacele segmentelor  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$ , deci ne gândim la noțiunea de linie mijlocie. Construim diagonalele  $AC$  și  $BD$ . În  $\triangle ADB$ , segmentul  $A'D'$  este linie mijlocie, deci este paralelă cu  $BD$  și are lungimea egală cu jumătate din  $BD$ . În  $\triangle CDB$ , segmentul  $B'C'$  este linie mijlocie, deci este paralelă cu  $BD$  și are lungimea egală cu jumătate din  $BD$ . Atunci, patrulaterul  $A'B'C'D'$  are două laturi opuse paralele și congruente, deci este paralelogram.

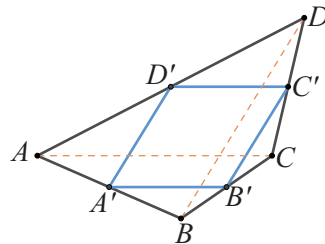


2) a) Pentru ca  $A'B'C'D'$  să fie dreptunghi, trebuie să fie paralelogram (cea ce am arătat), iar laturile alăturate să fie perpendiculare. Dar, laturile patrulaterului  $A'B'C'D'$  sunt paralele cu diagonalele patrulaterului  $ABCD$ , ceea ce înseamnă că trebuie să impunem condiția ca diagonalele acestui patrulater să fie perpendiculare. În concluzie, pentru ca  $A'B'C'D'$  să fie dreptunghi, este necesar și suficient ca patrulaterul convex  $ABCD$  să aibă diagonalele perpendiculare.

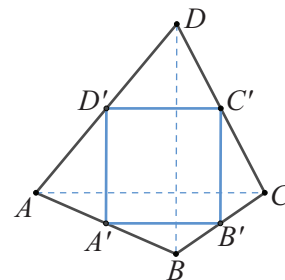


b) Pentru ca  $A'B'C'D'$  să fie romb, trebuie să fie paralelogram (este), iar laturile alăturate să fie congruente.

Cum  $A'B' = C'D' = \frac{AC}{2}$  și  $B'C' = A'D' = \frac{BD}{2}$ , rezultă că, pentru ca  $A'B'C'D'$  să fie romb, trebuie ca  $AC \equiv BD$ , adică diagonalele patrulaterului  $ABCD$  să fie congruente.



c) Pentru că pătratul este în același timp dreptunghi și romb, este necesar ca ambele condiții impuse la punctele b) și c) să fie îndeplinite. Așadar, condiția ca  $A'B'C'D'$  să fie pătrat este ca  $AC \perp BD$  și  $AC \equiv BD$ , adică diagonalele patrulaterului  $ABCD$  să fie congruente și perpendiculare.



**Știați că...?**

Un patrulater cu diagonalele perpendiculare se numește *patrulater ortodiagonal*.

**Reținem!**

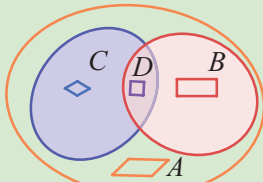
- 1) Orice pătrat este paralelogram.
- 2) Orice pătrat este dreptunghi.
- 3) Orice pătrat este romb.

Considerăm mulțimile:

- $A$  = mulțimea paralelogramelor din plan;
- $B$  = mulțimea dreptunghiurilor din plan;
- $C$  = mulțimea romburilor din plan;
- $D$  = mulțimea pătratelor din plan.

Atunci:

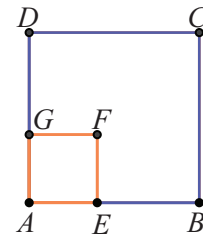
- a)  $D \subset C, D \subset B, D \subset A$ ;
- b)  $C \subset A, B \subset A$ ;
- c)  $B \cap C = D$  și  $A \cap B \cap C = D$ .



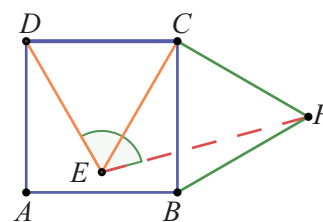


- 1 a) Construieți, folosind rigla gradată și echerul, un pătrat cu latura de 4 cm.  
b) Construieți, folosind rigla gradată și compasul, un pătrat cu latura de 0,6 dm.
- 2 a) Construieți un pătrat cu perimetrul de 48 cm.  
b) Construieți un pătrat cu diagonala de 80 mm.
- 3 Triunghiurile dreptunghice isoscele  $ABC$  și  $DBC$  au ipotenuza comună  $BC$ . Demonstrați că  $ABDC$  este pătrat.
- 4 Demonstrați că mijloacele laturilor unui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat.
- 5 Diagonalele pătratului  $ABCD$  se intersectează în punctul  $O$ . Demonstrați că mijloacele segmentelor  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  și  $DO$  sunt vârfurile unui pătrat.
- 6 Unghiurile  $A$  și  $C$  ale rombului  $ABCD$  sunt suplementare. Demonstrați că  $ABCD$  este pătrat.
- 7 Pe diagonala  $AC$  a dreptunghiului  $ABCD$  există un punct  $P$  astfel încât  $PB = PD$ ,  $P \notin BD$ . Demonstrați că  $ABCD$  este pătrat.
- 8 Demonstrați că dacă lungimea unei laturi a unui dreptunghi este media aritmetică a lungimilor celorlalte trei laturi, atunci acest dreptunghi este pătrat.
- 9 Bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle BAC$  și  $\sphericalangle CAD$  ale pătratului  $ABCD$  intersectează laturile  $BC$  și  $CD$  în punctele  $E$ , respectiv  $F$ .  
a) Calculați măsurile unghiurilor triunghiului  $AEF$ .  
b) Demonstrați că  $EF \parallel BD$ .
- 10 În exteriorul dreptunghiului  $ABCD$ , se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele  $ABE$  și  $CDF$ , cu  $AE = BE$ ,  $CF = DF$ .  
Notăm  $AE \cap DF = \{M\}$  și  $BE \cap CF = \{N\}$ .  
a) Demonstrați că  $MENF$  este pătrat.  
b) Demonstrați că dreptele  $AC$ ,  $EF$  și  $MN$  sunt concurente.
- 11 Punctul  $A$  este interior segmentului  $BC$ , iar de o parte și de alta a dreptei  $BC$ , se construiesc pătratele  $ABDE$  și  $ACFG$ .  
a) Demonstrați că  $BG \equiv CE$ ;  
b) Calculați valoarea raportului  $\frac{AB}{AC}$ , știind că  $BG \parallel CE$ .

- 12 În figura alăturată,  $ABCD$  și  $AEFG$  sunt pătrate.  
Demonstrați că:  
a) punctele  $A$ ,  $F$ ,  $C$  sunt coliniare;  
b) dreptele  $GE$  și  $BD$  sunt paralele.



- 13 Punctul  $A$  este interior segmentului  $BC$ , iar de aceeași parte a dreptei  $BC$ , se construiesc pătratele  $ABDE$  și  $ACFG$ .  
a) Demonstrați că  $BE \parallel AF$  și  $BE \perp CG$ .  
b) Calculați valoarea raportului  $\frac{AB}{AC}$ , știind că  $\sphericalangle CGD = 90^\circ$ .
- 14 Bisectoarele unghiurilor  $M$  și  $N$  ale paralelogramului  $MNPQ$  se intersectează în punctul  $A \in PQ$ . Bisectoarele unghiurilor  $P$  și  $Q$  se intersectează în punctul  $B \in MN$ . Notăm  $MA \cap BQ = \{C\}$  și  $AN \cap BP = \{D\}$ . Știind că  $ACBD$  este pătrat, calculați măsura unghiului  $M$  și raportul  $\frac{MN}{NP}$ .
- 15 În interiorul pătratului  $ABCD$ , se construiește triunghiul echilateral  $CDE$ , iar în exteriorul pătratului, se construiește triunghiul echilateral  $BCF$ .



- a) Realizați pe caiete, folosind instrumentele geometrice, configurația de mai sus.
- b) Calculați măsura unghiului  $DEF$ .
- c) Demonstrați că punctele  $A$ ,  $E$  și  $F$  sunt coliniare.
- d) Completați configurația, construind triunghiul echilateral  $ACR$ , astfel încât punctele  $F$  și  $R$  să fie de aceeași parte a dreptei  $AC$ .
- e) Demonstrați că patrulaterul  $CERF$  este pătrat.



**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p	1. În dreptunghiul $ABCD$ , unghiul $\sphericalangle DAC = 2 \cdot \sphericalangle ABD$ și $AD = 3$ cm. Lungimea diagonalei $BD$ este: A. 12 cm                      B. 6 cm                      C. 3 cm                      D. 9 cm
5p	2. $CDEF$ este un romb, $CE \cap DF = \{O\}$ , $\sphericalangle CDE = 120^\circ$ și $DO = 4$ cm. Lungimea laturii rombului este: A. 12 cm                      B. 4 cm                      C. 8 cm                      D. 6 cm
5p	3. Un pătrat are perimetrul 64 cm. Distanța de la centrul pătratului la una dintre laturi este: A. 16 cm                      B. 32 cm                      C. 12 cm                      D. 8 cm
5p	4. $MNPQ$ este un dreptunghi, $MP \cap NQ = \{O\}$ , $\sphericalangle MON = 120^\circ$ și $NQ = 20$ cm. Perimetrul $\triangle MOQ$ este: A. 50 cm                      B. 30 cm                      C. 45 cm                      D. 25 cm
5p	5. Fie $DEFG$ un romb și $DM$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle FDG$ , $M \in FG$ . Se știe că unghiului $\sphericalangle DMF = 123^\circ$ . Măsura unghiului $\sphericalangle DEF$ este: A. $108^\circ$ B. $104^\circ$ C. $100^\circ$ D. $96^\circ$
5p	6. Punctele $M$ și $N$ sunt situate pe laturile $BC$ și $CD$ ale pătratului $ABCD$ , astfel încât triunghiul $AMN$ să fie echilateral. Măsura unghiului $\sphericalangle AMC$ este: A. $105^\circ$ B. $90^\circ$ C. $75^\circ$ D. $135^\circ$
5p	7. Punctele $P$ și $Q$ sunt mijloacele laturilor $AB$ și $CD$ ale rombului $ABCD$ , iar $BPDQ$ este dreptunghi. Măsura unghiului $\sphericalangle BQP$ este: A. $60^\circ$ B. $90^\circ$ C. $45^\circ$ D. $30^\circ$
5p	8. Pe ipotenuza $BC$ a triunghiului dreptunghic isoscel $ABC$ , $AB = 10$ cm, se consideră punctul $P$ . Fie $PM \perp AB$ , $M \in AB$ și $PN \perp AC$ , $N \in AC$ . Efectuând suma $AM + AN$ se obține: A. 20 cm                      B. 15 cm                      C. 10 cm                      D. 5 cm

II. La problemele următoare se cer rezolvări complete.



5p	1. Punctele $A, B, E$ sunt coliniare, în această ordine, și $AB = 2 \cdot BE$ . De aceeași parte a dreptei $AE$ , se construiesc pătratele $ABCD$ și $BEFG$ , cu $AC \cap BD = \{O\}$ , iar $M$ este mijlocul segmentului $DF$ . Demonstrați că: a) $\sphericalangle DBF = 90^\circ$ ; b) $BD \parallel CF$ ; c) punctele $A, O$ și $M$ sunt coliniare.	
10p	2. Covorul reprezentat în schița din figură este în formă de pătrat, triunghiurile $ABE$ și $CDF$ sunt echilaterale, iar $AE \cap DF = \{M\}$ , $BE \cap CF = \{N\}$ . Arătați că $EMFN$ este romb.	
15p	3. Un ansamblu publicitar format din trei panouri dreptunghiulare, ca în figura alăturată, se montează pe peretele unei clădiri. Cel mai mic panou are dimensiunile $x$ metri și $y$ metri, cu $x, y \in \mathbb{N}$ , $x > y$ . Fiecare dintre celelalte două panouri are dimensiunile de două ori mai mari decât cele ale panoului montat deasupra lui. Conturul ansamblului publicitar are 30 m. Aflați înălțimea minimă a clădirii pe care se montează ansamblul publicitar.	



## 4.4 Trapezul: clasificare, proprietăți. Linia mijlocie în trapez

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Definiția 1.** Patrulaterul convex cu două laturi opuse paralele și două laturi neparalele se numește **trapez**.

Fie  $ABCD$  trapez. Identificăm elementele:

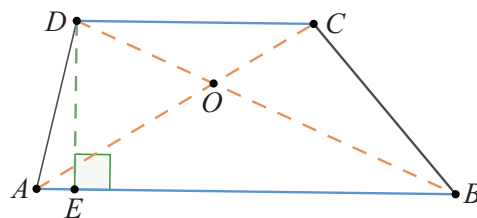
Laturile paralele  $AB$  și  $CD$  se numesc *baze*. Dacă  $AB > CD$ , atunci  $AB$  este *baza mare*, iar  $CD$  este *baza mică*.

Laturile  $AD$  și  $BC$  se numesc *laturile neparalele* ale trapezului.

Segmentele  $AC$  și  $BD$  sunt *diagonalele* trapezului.

Distanța dintre bazele trapezului se numește *înălțime* a acestuia.

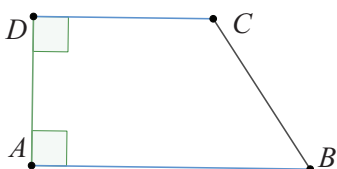
Dacă  $DE \perp AB$ ,  $E \in AB$ , atunci  $DE$  este înălțime a trapezului.



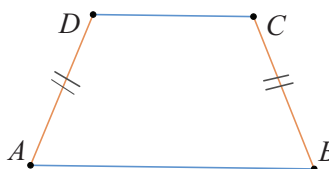
**Observație:** Vom folosi termenul „înălțime” și pentru segmentul determinat de un punct al unei baze (de regulă, vârf al trapezului) și piciorul perpendicularei din acel punct pe cealaltă bază.

Pentru laturile neparalele ale unui trapez, se disting două cazuri particulare care ne oferă un criteriu de *clasificare* a trapezelor.

- 1) Dacă una dintre laturile neparalele ale trapezului este perpendiculară pe baze, atunci acesta se numește *trapez dreptunghic*.



- 2) Dacă laturile neparalele ale unui trapez sunt congruente, atunci acesta se numește *trapez isoscel*.



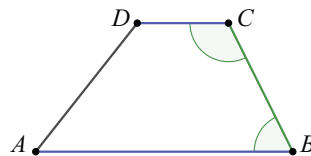
**Observație:** Folosind definiția, rezultă că pentru a arăta că un patrulater convex este trapez, trebuie să demonstrăm: 1) două laturi opuse ale sale sunt paralele și 2) celelalte două laturi nu sunt paralele.

Laturile neparalele ale trapezului și diagonalele acestuia sunt secante ale bazelor. Cum bazele sunt paralele, deducem următoarele proprietăți:

$P_1$ : Unghiurile alăturate unaia dintre laturile neparalele ale unui trapez sunt suplementare.

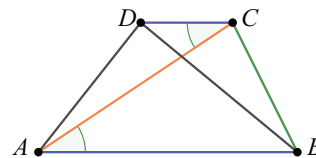
**Demonstrație:** Considerăm latura  $BC$ , secantă a dreptelor paralele  $AB$  și  $CD$ . Cum  $AB \parallel CD$ , iar  $\sphericalangle ABC$  și  $\sphericalangle DCB$  sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, rezultă că sunt suplementare, deci  $\sphericalangle ABC + \sphericalangle DCB = 180^\circ$ .

În mod similar, se demonstrează că  $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CDA = 180^\circ$ .



$P_2$ : Fiecare diagonală a unui trapez formează cu bazele trapezului perechi de unghiuri congruente.

**Demonstrație:**  $AC$  este secantă pentru bazele trapezului.  $AB \parallel CD$ , iar  $\sphericalangle DCA$  și  $\sphericalangle BAC$  sunt alterne interne, deci  $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle BAC$ . Analog, se demonstrează  $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ABD$ .





**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

Trapezul isoscel, având laturile neparalele congruente, se bucură de proprietăți specifice.

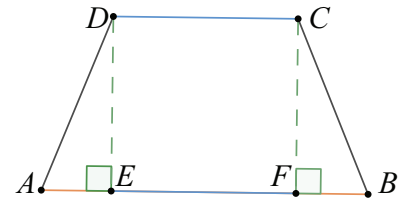
**Teorema 1.** Fiecare bază a unui trapez isoscel formează, cu laturile neparalele, unghiuri congruente.

*Demonstrație:* Vom arăta că unghiurile  $\sphericalangle A$  și  $\sphericalangle B$  ale trapezului isoscel  $ABCD$  sunt congruente. Fie  $DE \perp AB$  și  $CF \perp AB$  cu  $E, F \in AB$ . Patrulaterul  $DCFE$  are toate unghiurile drepte, deci este un dreptunghi. Laturile opuse sunt congruente, în particular  $DE \equiv CF$ .

Vom considera  $\triangle ADE$  și  $\triangle BCF$  dreptunghice, cu ipotenuzele  $AD \equiv BC$  (laturile neparalele ale trapezului isoscel) și catetele  $DE \equiv CF$  (am demonstrat mai sus).

Aplicând cazul de congruență I.C., rezultă congruența lor, apoi  $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ . Cum  $\sphericalangle ADC$  este suplementar cu  $\sphericalangle DAB$  și  $\sphericalangle BCD$  este suplementar cu  $\sphericalangle CBA$  (sunt alăturate laturii neparalele în trapez), rezultă  $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle DCB$ .

**Observație:** Raționamentul prin care am demonstrat Teorema 1 ne furnizează și următoarele informații:  $AE \equiv BF$  și  $DC \equiv EF$ . Prin urmare, într-un trapez isoscel, picioarele înălțimilor duse din capetele bazei mici determină, pe baza mare, segmentele  $AE, EF, FB$ , astfel încât  $AE \equiv BF$  și  $DC \equiv EF$ .



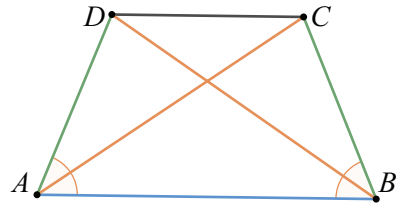
**Teorema 2.** Diagonalele unui trapez isoscel sunt congruente.

*Demonstrație:* Construim diagonalele  $AC$  și  $BD$  ale trapezului, apoi considerăm  $\triangle DAB$  și  $\triangle CBA$ , care au:  $AD \equiv CB$ ,  $AB$  latură comună, iar din Teorema 1,  $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle CBA$ . Folosind cazul de congruență L.U.L., rezultă congruența triunghiurilor, apoi  $AC \equiv BD$ .

Reciprocele teoremelor 1 și 2 sunt adevărate și ne oferă condiții suficiente ca un trapez să fie isoscel.

$C_1$ : Dacă într-un trapez unghiurile alăturate unei baze sunt congruente, atunci acesta este un trapez isoscel.

$C_2$ : Dacă într-un trapez diagonalele sunt congruente, atunci acesta este un trapez isoscel.



**Temă de portofoliu**

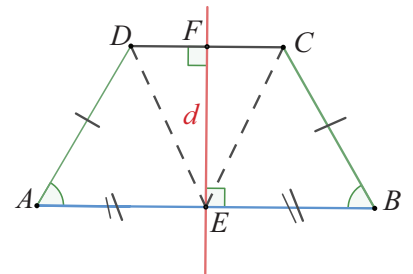
Folosind notațiile de la Teorema 1 și Teorema 2, demonstrați împreună cu un coleg/o colegă condițiile suficiente  $C_1$  și  $C_2$ .

**Aplicația 1:** Un trapez este isoscel dacă și numai dacă mediatoarele bazelor sale coincid.

*Soluție:* Considerăm trapezul  $ABCD$ , cu bazele  $AB$  și  $CD$ . Remarcăm, înainte de toate, că avem de demonstrat două implicații:

- 1) dacă trapezul  $ABCD$  este isoscel, atunci mediatoarele bazelor coincid;
- 2) dacă în trapezul  $ABCD$  mediatoarele bazelor coincid, atunci trapezul este isoscel.

1) Fie  $ABCD$  trapez isoscel. Fie  $E$  mijlocul segmentului  $AB$  și  $d$  mediatoarea bazei  $AB$ . Deoarece  $AB \parallel CD$ , rezultă că  $d \perp CD$ . Urmărim să demonstrăm că  $d$  este și mediatoarea bazei  $CD$ . Este suficient să găsim, pe dreapta  $d$ , un punct egal depărtat de  $C$  și  $D$  (capetele bazei mici). Triunghiurile  $\triangle AED$  și  $\triangle BEC$  au:  $AE \equiv EB$  ( $E$  mijloc din construcție);  $AD \equiv BC$  (trapez isoscel);  $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle CBE$  (unghiurile de la baza trapezului isoscel). Folosind cazul de congruență L.U.L., rezultă  $\triangle AED \equiv \triangle BEC$ , deci  $ED \equiv EC$ . Prin urmare,  $EF$  (unde  $\{F\} = d \cap CD$ ) este înălțimea corespunzătoare bazei în triunghiul isoscel  $CED$  isoscel, deci  $d$  este și mediatoarea segmentului  $DC$ .



2) Știm că  $ABCD$  este trapez și că mediatoarele bazelor  $AB$  și  $CD$  coincid.

Vom demonstra că trapezul este isoscel, deci că laturile neoparalele sunt congruente. Notăm cu  $E$  și  $F$  mijloacele bazelor  $AB$ , respectiv  $CD$ .

Considerăm  $\triangle AED$  și  $\triangle BEC$ , care au:  $AE \equiv BE$  ( $EF$  mediatoare pentru  $AB$ );

$DE \equiv CE$  ( $EF$  mediatoarea lui  $CD$ );  $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BEC$  ( $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle EDC$ ,

deoarece sunt unghiuri alterne interne pentru  $AB \parallel CD$  și secanta  $DE$ ;

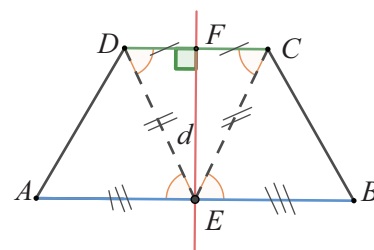
$\sphericalangle EDC \equiv \sphericalangle ECD$  pentru că sunt unghiurile de la baza triunghiului isoscel

$ECD$ ;  $\sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle BEC$ , deoarece sunt unghiuri alterne interne pentru  $AB \parallel CD$  și secanta  $CE$ ).

Aplicând cazul de congruență L.U.L., rezultă congruența triunghiurilor și a elementelor corespondente.

În particular,  $AD \equiv BC$ , adică trapezul este isoscel.

**Observație:** Am arătat, în rezolvarea de mai sus, și următorul rezultat: *un trapez este isoscel dacă și numai dacă dreapta ce unește mijloacele bazelor este chiar mediatoarea lor.*



**Definiția 2.** Segmentul determinat de mijloacele laturilor neoparalele ale unui trapez se numește *linie mijlocie a trapezului*.

Următoarea teoremă demonstrează două proprietăți importante ale liniei mijlocii.

**Teorema 3.** Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor acestora.

**Demonstrație:** La triunghi, linia mijlocie, determinată de mijloacele a două laturi, este paralelă cu a treia latură, iar lungimea ei este egală cu jumătate din lungimea acesteia.

În trapezul  $ABCD$  notăm cu  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor neoparalele  $AD$ , respectiv  $BC$ .

Notăm cu  $G$  mijlocul diagonalei  $AC$ . Atunci,  $EG$  este linie mijlocie în  $\triangle ADC$ , iar  $GF$  este linie mijlocie în  $\triangle ABC$ .

Avem  $EG \parallel DC$  și  $GF \parallel AB$ , dar  $AB \parallel CD$  (sunt baze ale trapezului), deci  $GE \parallel AB \parallel GF$ . Cum prin punctul  $G$ , exterior dreptei  $AB$ , putem duce o singură paralelă la  $AB$  (axioma paralelelor), rezultă că punctele  $E, G, F$  sunt coliniare, iar  $EF \parallel AB \parallel DC$ .

Din rezultatul referitor la lungimea liniei mijlocii în triunghi, avem:  $EG = \frac{CD}{2}$  și  $GF = \frac{AB}{2}$ , iar prin adunare,  $EF = EG + GF = \frac{AB + CD}{2}$ .

**Observație:** Lungimea liniei mijlocii a unui trapez este egală cu media aritmetică a lungimilor bazelor sale.

### Aplicația 2:

1) Mijloacele diagonalelor unui trapez sunt situate pe linia mijlocie a trapezului și determină un segment cu lungimea egală cu jumătate din modulul diferenței bazelor.

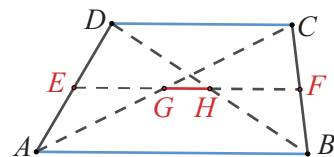
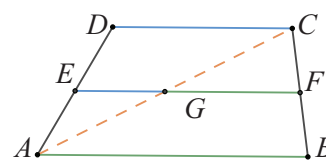
2) Dacă mijlocul unei diagonale se găsește pe segmentul care unește mijloacele a două laturi opuse ale unui patrulater convex, atunci acest patrulater este trapez.

**Soluție:**

1) Considerăm trapezul  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$  și  $AB > CD$ ), unde am notat cu  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor  $AD$ , respectiv  $BC$ , iar cu  $G$  și  $H$  mijloacele diagonalelor  $AC$ , respectiv  $BD$ . Aplicând paralelismul liniilor mijlocii în  $\triangle ADC$  și în  $\triangle ABC$ , rezultă  $GE \parallel CD \parallel AB \parallel GF$ . Axioma paralelelor ne spune că prin  $G$  trece o singură paralelă la  $AB$ , deci dreptele  $GE$  și  $GF$  coincid sau  $G \in EF$ .

Analog, arătăm că mijlocul lui  $BD$ , adică  $H$ , aparține lui  $EF$ . Deoarece  $EF$  este linie mijlocie în trapez, ea este paralelă cu bazele, deci și  $GH \parallel AB \parallel DC$ . Pentru liniile mijlocii ale  $\triangle ADC$  și  $\triangle BDC$ , avem:  $EG = \frac{DC}{2} = HF$ .

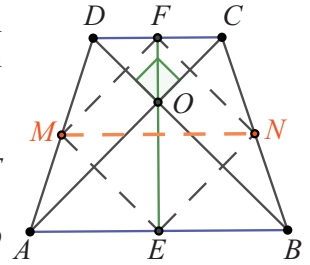
Calculăm lungimea segmentului  $GH$  astfel:  $GH = EF - EG - HF = \frac{AB + CD}{2} - \frac{CD}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{AB - CD}{2}$ .



- 2) Considerăm patrulaterul convex  $ABCD$  și notăm cu  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor  $AD$ , respectiv  $BC$ , iar cu  $G$  mijlocul diagonalei  $AC$ . Știm că punctul  $G$  aparține segmentului  $EF$ . Atunci,  $EG$  este linie mijlocie în  $\triangle ADC$ , iar  $GF$  este linie mijlocie în triunghiul  $\triangle ABC$ . Rezultă  $GE \parallel CD$  și  $GF \parallel AB$ , dar  $G, E, F$  sunt coliniare, deci  $AB \parallel CD$  (două drepte distincte, paralele cu o a treia dreaptă, sunt paralele între ele).

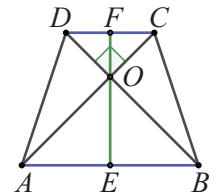
**Aplicația 3:** Dacă un trapez isoscel are diagonalele perpendiculare, atunci înălțimea sa este egală cu lungimea liniei mijlocii a trapezului.

**Soluția I:** Fie  $ABCD$  patrulater convex și  $M, E, N, F$  mijloacele laturilor sale, ca în figura alăturată. Știm că mijloacele laturilor unui patrulater convex determină un paralelogram. În cazul de față,  $MENF$  este paralelogram și  $ME = \frac{BD}{2}$ ,  $EN = \frac{AC}{2}$ ,  $BD = AC$ , deci  $MENF$  este romb.  $ME \parallel BD$ ,  $EN \parallel AC$  și  $BD \perp AC$ , deci  $ME \perp EN$  și  $MENF$  este pătrat, iar diagonalele sale sunt congruente,  $EF = MN$ .



Cum trapezul este isoscel, rezultă că  $EF$  este înălțime (triunghiurile  $OAB, OCD$  sunt isoscele, iar medianele  $OE$  și  $OF$  sunt și înălțimi și au aceeași dreaptă suport). În concluzie,  $EF$  este înălțimea trapezului,  $MN$  este linia sa mijlocie și  $EF = MN$ .

**Soluția a II-a:** Fie  $ABCD$  trapez isoscel, cu  $AB \parallel CD$  și  $AD \equiv BC$  și fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor. Conform cazului L.L.L., triunghiurile  $ABD$  și  $BAC$  sunt congruente ( $AB \equiv BA, BD \equiv AC, AD \equiv BC$ ), deci  $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OAB$ . Din  $AC \perp BD$ , rezultă  $AO \perp BO$  și triunghiul  $AOB$  este dreptunghic isoscel. Construim  $OE \perp AB, E \in AB$  și  $OE \cap CD = \{F\}$ .



Segmentul  $OE$  este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul  $AOB$ , deci  $OE = \frac{AB}{2}$ .

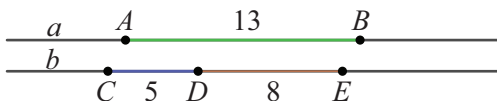
Analog, triunghiul  $COD$  este dreptunghic isoscel și  $OF = \frac{CD}{2}$ . Cum  $EF$  este înălțimea trapezului, obținem  $EF = OE + OF = \frac{AB + CD}{2}$ , care reprezintă lungimea liniei mijlocii a trapezului.



**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

- 1** Desenați, folosind instrumentele geometrice, patrulaterul convex  $MNPQ$  în care:  
 $\sphericalangle MNP = 105^\circ$ ,  $\sphericalangle NPQ = 75^\circ$  și  $\sphericalangle PQM = 135^\circ$ .  
 Completați spațiile libere, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:  
 $p_1$ : Patrulaterul convex  $MNPQ$  este ...  
 $p_2$ : Segmentele  $MN$  și  $PQ$  se numesc ...  
 $p_3$ : Segmentele  $NP$  și  $MQ$  se numesc ...  
 $p_4$ : Segmentele  $MP$  și  $NQ$  se numesc ...

- 2** În figura de mai jos, dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele. Scrieți pe caiete enunțurile, apoi completați spațiile libere, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.



- $p_1$ : Patrulaterul convex  $ABEC$  este ...  
 $p_2$ : Patrulaterul convex  $ACDB$  este ...

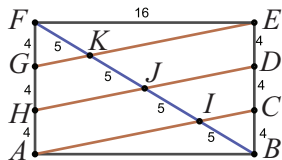
- 3** a) Construiți, folosind instrumentele geometrice, trapezul  $EFGH$ , cu  $EF \parallel GH$ ,  $\sphericalangle E = 70^\circ$ ,  $\sphericalangle F = 50^\circ$ .  
 b) Scrieți pe caiete enunțurile de mai jos, apoi completați spațiile libere, astfel încât să obțineți propoziții adevărate:  
 $p_1$ : Baza mare a trapezului este ...  
 $p_2$ : Baza mică a trapezului este ...  
 $p_3$ : Măsura unghiului  $G$  este ...  
 $p_4$ : Măsura unghiului  $H$  este ...

- 4** Construiți trapezul dreptunghic  $IJKL$  cu  $\sphericalangle I = \sphericalangle L = 90^\circ$ ,  $IJ = 8$  cm,  $\sphericalangle J = 60^\circ$ ,  $JK = 5$  cm.

- a) Descrieți fiecare etapă a construcției.  
 b) Numiți bazele trapezului, apoi numiți laturile neparalele ale trapezului.

- 5 Construiți trapezul isoscel  $ABCD$ , cu  $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 60^\circ$ ,  $AB = 10$  cm,  $BC = 5$  cm.  
 a) Descrieți fiecare etapă a construcției.  
 b) Numiți bazele trapezului, apoi numiți laturile neoparalele ale trapezului.

- 6 În figura de mai jos,  $ABEF$  este dreptunghi. Numiți două trapeze și liniile mijlocii ale acestora.



- 7 a) Calculați măsurile unghiurilor trapezului  $MNPQ$ , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:  $\sphericalangle M + \sphericalangle N + \sphericalangle P = 320^\circ$ ,  
 $\sphericalangle Q + \sphericalangle P = 180^\circ$ ,  $\sphericalangle P = 2 \cdot \sphericalangle M$ .  
 b) Realizați, folosind instrumentele geometrice, un desen care să corespundă datelor problemei.

- 8 Calculați măsurile unghiurilor trapezului isoscel  $ABCD$ , în următoarele situații:

- a)  $\sphericalangle A = 55^\circ$  și  $AB \parallel CD$ ;  
 b)  $\sphericalangle A = \sphericalangle B$  și  $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 260^\circ$ .  
 9 Se consideră trapezul isoscel  $ABCD$ , în care  $\sphericalangle A = 3 \cdot \sphericalangle C$  și  $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$ .

- a) Stabiliți care sunt bazele trapezului.  
 b) Calculați măsurile unghiurilor trapezului.  
 c) Demonstrați că  $AD$  și  $BC$  sunt perpendiculare.  
 10 În patrulaterul  $MNPQ$ ,  $MN \parallel PQ$ ,  $MQ \nparallel NP$ ,  $MQ \equiv NP$  și  $MP \cap NQ = \{O\}$ .  
 Stabiliți valoarea de adevăr a fiecărei propoziții, justificând răspunsul dat:

- a)  $MN \equiv PQ$ ;  
 b)  $MP \equiv NQ$ ;  
 c)  $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle MNP$ ;  
 d)  $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle NPQ$ ;  
 e)  $\sphericalangle MNP + \sphericalangle MQP = 180^\circ$ ;  
 f)  $MO \equiv OP$ ;  
 g)  $OP \equiv OQ$ ;  
 h)  $\triangle MON$  este isoscel.

- 11 Se consideră trapezul  $CDEF$  cu  $CD \parallel EF$ , punctul  $M$ , mijlocul laturii  $CD$  și  $ME = MF$ .  
 Arătați că trapezul este isoscel.

- 12 În trapezul  $ABCD$  cu bazele  $AB$  și  $CD$ ,  $AC$  este bisectoarea unghiului  $BAD$ , iar  $BD$  este bisectoarea unghiului  $ABC$ . Demonstrați că  $AC \equiv BD$ .

- 13 În patrulaterul convex  $MNPQ$ , măsura unghiului  $M$  este  $68^\circ$  și măsura unghiului  $N$  este  $112^\circ$ . Demonstrați că  $MNPQ$  este trapez sau paralelogram.

- 14 Trapezul  $ABCD$  este isoscel,  $AB \parallel CD$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ . Demonstrați că:  
 a) Triunghiurile  $AOB$  și  $COD$  sunt isoscele.  
 b) Triunghiurile  $AOD$  și  $BOC$  sunt congruente.

- 15 Unul dintre unghiurile unui trapez dreptunghic are măsura de  $72^\circ$ . Determinați măsurile celorlalte unghiuri ale trapezului.

- 16 Fie  $ABCD$  un trapez dreptunghic în care  $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ ,  $AB < CD$ , iar triunghiul  $BCD$  este dreptunghic isoscel. Calculați măsurile unghiurilor  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDB$ .

- 17  $MNPQ$  este un trapez dreptunghic,  $MN \parallel PQ$ ,  $\sphericalangle M = 90^\circ$ ,  $MN = 14$  cm,  $MQ = QP = 6$  cm. Calculați lungimea laturii  $PN$ .

- 18 În trapezul  $TRAP$ ,  $TR \parallel AP$ ,  $TR > AP$ ,  $\sphericalangle PTR = 90^\circ$ , iar triunghiurile  $TPA$  și  $TAR$  sunt isoscele. Calculați măsurile unghiurilor trapezului, analizând toate cazurile posibile.

- 19 Se consideră patrulaterul convex  $ABCD$  cu  $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ ,  $AB > CD$ . Punctul  $P$  se află pe latura  $BC$ , astfel încât  $BP = AB$  și  $CP = CD$ . Calculați măsura unghiului  $\sphericalangle APD$ .

- 20 Trapezul dreptunghic  $MNPQ$  are bazele  $MN$  și  $PQ$ , cu  $MN = 2 \cdot PQ$  și  $\sphericalangle M = 90^\circ$ . Se consideră  $PE \perp MN$ ,  $E \in MN$  și  $PE \cap NQ = \{R\}$ .

Demonstrați că:

- a)  $PR \equiv RE$ ;  
 b) Dacă  $MR \cap QE = \{G\}$ , atunci  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $MNQ$ .

- 21 Se consideră trapezul  $ABCD$  cu baza mare  $AB$ . Notăm cu  $M$  mijlocul laturii  $AD$  și cu  $N$  mijlocul laturii  $BC$ .

- a) Calculați lungimea segmentului  $MN$ , știind că  $AB = 13$  cm,  $CD = 9$  cm.

- b) Calculați lungimea segmentului  $CD$ , știind că  $AB = 16$  cm,  $MN = 10$  cm.

- 22 În trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ , punctele  $E$  și  $F$  sunt mijloacele laturilor  $AD$ , respectiv  $BC$ . Știind că  $\sphericalangle AEF = 127^\circ$  și  $\sphericalangle CFE = 54^\circ$ , calculați măsurile unghiurilor trapezului.

- 23 În trapezul  $MNPQ$  cu  $MN \parallel PQ$ , punctul  $A$  este mijlocul laturii  $MQ$ , punctul  $B$  este mijlocul segmentului  $AM$ , iar  $C \in PN$ , astfel încât  $CP = CN$  și  $D \in CN$ , astfel încât  $CD = ND$ .

- a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

- b) Dacă  $MN = 8$  cm și  $PQ = 2$  cm, calculați lungimea segmentului  $BD$ .

- 24 Segmentul  $EF$  este linia mijlocie a trapezului  $ABCD$ ,  $E \in AD$  și  $F \in BC$ . Punctul  $P$  este simetricul punctului  $E$  față de  $F$ . Demonstrați că:

- a)  $CP \equiv BE$  și  $CE \parallel BP$ ;  
 b)  $EP = AB + CD$ .



**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

**I.** La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p	1. Un trapez dreptunghic are un unghi cu măsura de $45^\circ$ și bazele de lungimi 28 cm și 20 cm. Înălțimea trapezului este: A. 8 cm                      B. 10 cm                      C. 12 cm                      D. 16 cm
5p	2. În trapezul isoscel $ABCD$ , $AB \parallel CD$ , $AB < CD$ , $AB = 4$ cm și $\sphericalangle ABC = 135^\circ$ . Dacă $BE \perp CD$ și $BE = 6$ cm, atunci lungimea laturii $CD$ este egală cu: A. 20 cm                      B. 14 cm                      C. 16 cm                      D. 15 cm
5p	3. Un trapez isoscel are unghiurile opuse: A. complementare          B. suplementare              C. congruente                  D. cu măsura de $60^\circ$
5p	4. Fie $ADEJ$ un dreptunghi. Latura $AD$ se împarte în trei segmente congruente, $AB \equiv BC \equiv CD$ , iar latura $EJ$ se împarte în cinci segmente congruente, $EF \equiv FG \equiv GH \equiv HI \equiv IJ$ . Numărul trapezelor isoscele care au vârfuri oricare patru dintre punctele $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ este: A. 3                              B. 4                              C. 5                              D. 2

**II.** Asociați fiecărei cifre corespunzătoare enunțurilor din coloana A, litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana B.

În trapezul isoscel  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AD = DC = CB = \frac{AB}{2}$  și  $E$  este mijlocul bazei  $AB$ .

	A	B
5p	1. $\sphericalangle A =$	a. $30^\circ$
5p	2. $\sphericalangle ADC =$	b. $60^\circ$
5p	3. $\sphericalangle ABD =$	c. $120^\circ$
5p	4. $\sphericalangle(BD, CE) =$	d. $90^\circ$
		e. $45^\circ$

**III.** La problemele următoare se cer rezolvări complete.

	1. Se consideră trapezul $ABCD$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^\circ$ , $AD < BC$ . Punctul $E$ este situat pe latura $AB$ , astfel încât $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC$ . Paralela prin $B$ la $DE$ intersectează $EC$ în punctul $F$ , iar $\sphericalangle BCE = 30^\circ$ . Arătați că:
10p	a) triunghiul $BEF$ este echilateral;
10p	b) punctul $F$ este mijlocul segmentului $CE$ .
	2. Triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $A$ , $M$ este mijlocul laturii $AC$ , $N$ este mijlocul laturii $BC$ , iar $P$ este simetricul punctului $M$ față de $N$ . Fie $AP \cap BM = \{D\}$ . Demonstrați că:
10p	a) $ABPM$ este dreptunghi;
10p	b) $AMND$ este trapez dreptunghic;
10p	c) $MB \parallel CP$ .





## 4.5 Perimetre și arii

Din cele mai vechi timpuri, oamenii și-au pus problema caracterizării obiectelor comparându-le. Dimensiunile lor au fost comparate cu dimensiuni standard, nevoia de precizie determinând utilizarea subdimensiunilor.

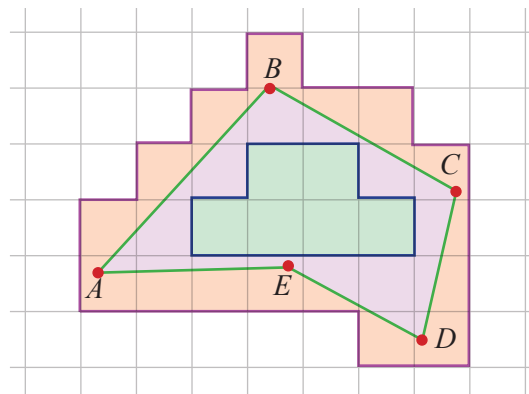
De exemplu, pentru lungimi, unitatea de măsură în sistemul internațional este metrul, cu multiplii și submultiplii acestuia. În unele țări sau în unele domenii, se folosește o unitate de măsură secundară, numită *țol* sau *inch* (se citește inci).  $1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$ .



Pentru arii, unitatea standard este metrul pătrat (suprafața unui pătrat cu latura de 1 metru), cu multiplii și submultiplii săi.

Se poate estima aria unei figuri geometrice încadrând suprafața acesteia între o suprafață formată din rețeaua unităților folosite care o acoperă și o suprafață care este acoperită de ea.

**Exemplu:** Aria figuri plane  $ABCDE$ , din imaginea alăturată, este mai mare decât 6 unități de arie și mai mică decât 27 de unități de arie. Evident, dacă trasăm rețeaua unităților de arie cu latura din ce în ce mai mică, vom aproxima din ce în ce mai exact aria dorită.



### Ne amintim

- 1) a. Perimetrul triunghiului  $ABC$  este numărul  $\mathcal{P} = AB + BC + AC$ .  
 b. Perimetrul dreptunghiului  $ABCD$  este numărul  $\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA = 2 \cdot (AB + BC)$ .  
 c. Perimetrul pătratului  $ABCD$  este numărul  $\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA = 4 \cdot AB$ .
- 2) Interiorul unui triunghi este intersecția interioarelor unghiurilor sale.
- 3) Se numește *suprafață triunghiulară* mulțimea tuturor punctelor situate în interiorul unui triunghi sau pe laturile acestuia. În mod analog s-au definit: *suprafața pătratică*, *suprafața dreptunghiulară*.
- 4) a. Aria triunghiului este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acesteia.  
 b. Aria dreptunghiului este egală cu produsul lungimilor a două laturi alăturate.  
 c. Aria pătratului este egală cu pătratul lungimii laturii sale.

Noțiunile de **perimetru** și de **arie a unei suprafețe** pot fi extinse ușor la figuri geometrice mai generale.

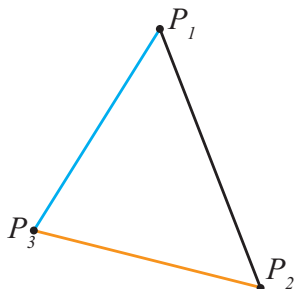
### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Dorim să analizăm noile figuri studiate.

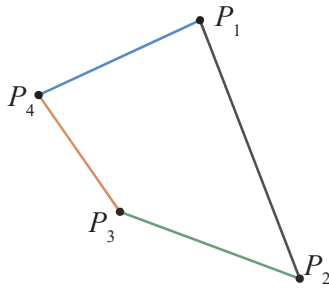
Pentru aceasta, să ne familiarizăm cu noțiunea de *poligon*. Triunghiul, patrulaterul, hexagonul sunt poligoane cu 3, 4, respectiv 6 laturi.

Vom numi *poligon cu n laturi* o figură geometrică plană, închisă, formată cu punctele  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , numite *vârfuri*, care determină segmentele  $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$ , numite *laturi*, cu proprietatea că oricare două dintre ele pot avea în comun cel mult un vârf.

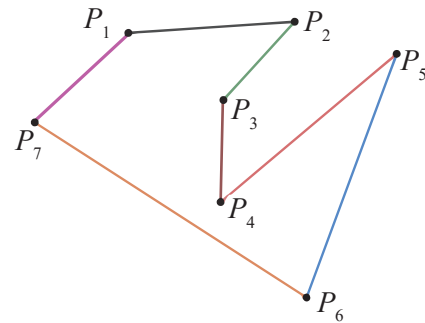
**Definiția 1:** Perimetrul unui poligon este suma lungimilor laturilor sale.



$$\mathcal{P} = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$$



$$\mathcal{P} = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_1$$



$$\mathcal{P} = P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_6P_7 + P_7P_1$$

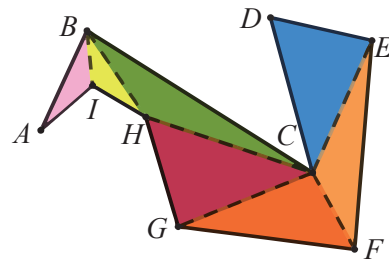
Prin urmare, perimetrul patrulaterului convex  $ABCD$  (paralelogram, dreptunghi, pătrat, trapez, ...) este:

$$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA.$$

Prin observare directă, intuim că:

1) Orice suprafață poligonală se poate descompune într-o reuniune de suprafețe triunghiulare.

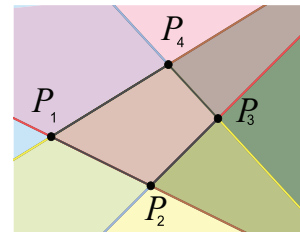
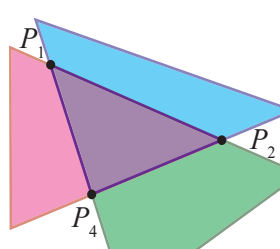
**Exemplu:** Suprafața mărginită de poligonul  $ABCDEFGHI$  din imaginea alăturată este reuniunea suprafețelor triunghiulare:  $ABI$ ,  $BIH$ ,  $BHC$ ,  $CDE$ ,  $ECF$ ,  $FCG$  și  $GHC$ .



2) Interiorul unei suprafețe poligonale este intersecția interioarelor unghiurilor sale.

**Exemple:** La fel ca la triunghi, pentru patrulaterul convex putem defini interiorul său ca fiind intersecția interioarelor unghiurilor sale.

**Observație:** Interiorul patrulaterului convex poate fi obținut mai simplu, prin intersecția interioarelor a două unghiuri opuse.



### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

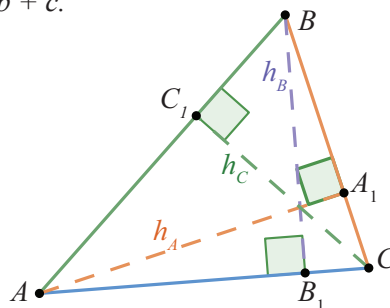
#### A. Perimetrul și aria triunghiului

Dacă notăm  $BC = a$ ,  $AC = b$  și  $AB = c$ , lungimile laturilor triunghiului  $ABC$ , și cu  $\mathcal{P}$  perimetrul său, atunci:

$$\mathcal{P} = a + b + c.$$

Revenim la aria triunghiului. Acceptăm următorul rezultat: produsul dintre lungimea unei laturi a unui triunghi și înălțimea corespunzătoare este constant. Cu notațiile din figură,  $h_A = AA_1$ ,  $h_B = BB_1$ ,  $h_C = CC_1$ , afirmația de mai sus se scrie:  $a \cdot h_A = b \cdot h_B = c \cdot h_C$ . Valoarea comună a produsului este dublul ariei triunghiului. Notând cu  $\mathcal{A}_{ABC}$  aria triunghiului  $ABC$ ,

$$\text{avem: } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{a \cdot h_A}{2} = \frac{b \cdot h_B}{2} = \frac{c \cdot h_C}{2}.$$

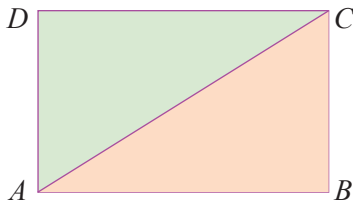


Să remarcăm faptul că putem alege latura și înălțimea corespunzătoare, în mod avantajos (pe cele pe care le cunoaștem sau pe care le putem calcula ușor). În particular, în triunghiul dreptunghic, aria va fi egală cu *semiprodusul lungimilor catetelor*.



**Aplicația 1:** Să regăsim aria dreptunghiului și aria pătratului folosind descompunerea în triunghiuri a acestor figuri și aria triunghiului dreptunghic.

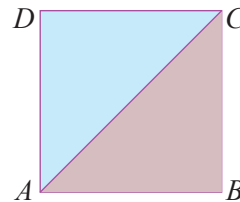
$ABCD$  este dreptunghi, deci  $AB = CD$  și  $AD = BC$ , iar triunghiurile  $ABC$  și  $ADC$  sunt dreptunghice.



$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} = \frac{AB \cdot BC}{2} + \frac{DC \cdot AD}{2} = AB \cdot BC$$

Aria dreptunghiului este egală cu produsul lungimilor a două laturi alăturate.

$ABCD$  este pătrat, deci  $AB = CD = AD = BC$ , iar triunghiurile  $ABC$  și  $ADC$  sunt dreptunghice.

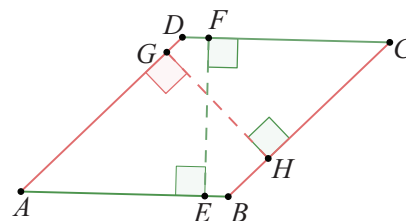


$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} = AB \cdot BC = AB^2$$

Aria pătratului este egală cu pătratul lungimii laturii sale.

### B. Perimetrul și aria paralelogramului

Pentru paralelogramul  $ABCD$ , vom numi înălțime corespunzătoare laturii  $AB$  (sau  $CD$ ) distanța dintre dreptele paralele  $AB$  și  $CD$ , adică lungimea segmentului  $EF$ , unde  $E \in AB$ ,  $F \in CD$ ,  $AB \perp EF$  și  $EF \perp CD$ . Analog, distanța dintre dreptele paralele  $AD$  și  $BC$ , adică lungimea segmentului  $GH$ , unde  $G \in AD$ ,  $H \in BC$ ,  $AD \perp GH$  și  $GH \perp BC$  se numește înălțimea paralelogramului, corespunzătoare laturii  $AD$  (sau  $BC$ ).



Perimetrul paralelogramului este suma lungimilor laturilor sale. Cum laturile opuse sunt congruente, obținem:

$$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA = 2(AB + BC).$$

Pentru a afla aria paralelogramului  $ABCD$ , descompunem suprafața paralelogramului în două suprafețe triunghiulare, despre care arătăm că sunt congruente.

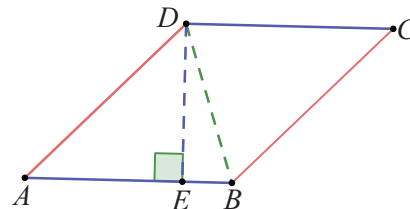
Triunghiurile  $ABD$  și  $BDC$  au toate laturile respectiv congruente; deci, aplicând cazul L.L.L., obținem congruența lor.

Două figuri geometrice congruente au perimetre și arii egale.

Obținem:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{BDC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABD} = 2 \cdot \frac{DE \cdot AB}{2} = DE \cdot AB.$$

Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare.



### C. Perimetrul și aria rombului

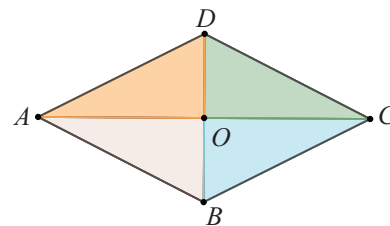
Toate laturile rombului sunt congruente, deci perimetrul este:  $\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA = 4 \cdot AB$ .

Vom descompune suprafața rombului în patru triunghiuri determinate de laturi și diagonale. Se poate arăta ușor, pe baza proprietăților rombului (diagonalele se înjumătățesc și sunt perpendiculare) că cele patru triunghiuri dreptunghice sunt congruente (aplicăm cazul C.C.), deci ariile lor sunt egale.

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = 4 \cdot \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

Dacă notăm cu  $d_1$  și  $d_2$  lungimile diagonalelor  $AC$ , respectiv  $BD$ , obținem:  $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ .

Aria rombului este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor sale.



## Perimetrul și aria trapezului

Trapezul este un patrulater. Prin urmare, perimetrul său este:  $\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA$ .

Pentru a afla aria trapezului, vom face aceeași împărțire a suprafeței sale în

două suprafețe triunghiulare:  $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABD} + \mathcal{A}_{BDC}$ .

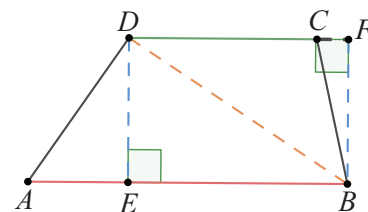
Notăm cu  $E$  și  $F$  picioarele perpendiculelor duse din  $D$  pe  $AB$ , respectiv din  $B$  pe  $DC$ . Cum  $AB \parallel DC$ , rezultă  $DE = BF$ . Aplicând formula ariei în cele

două triunghiuri, avem:  $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AB \cdot DE}{2} + \frac{DC \cdot BF}{2} = \frac{(AB + DC) \cdot DE}{2}$ .

Dacă într-un trapez, notăm baza mare cu  $B$ , baza mică cu  $b$  și distanța dintre baze, numită înălțimea trapezului,

cu  $h$ , atunci:  $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$ .

*Aria trapezului este egală cu semiproductul dintre suma lungimii bazelor și distanța dintre baze.*



### Aplicația 2:

a) Pe latura  $AB$ , de lungime  $L$ , a pătratului  $ABCD$ , se consideră punctele  $E$  și  $F$  care o împart în trei părți egale.

În exteriorul pătratului  $ABCD$  se construiește pătratul  $EHGF$ .

Calculați perimetrul și aria poligonului  $AEHGFBCD$ .

b) Aflați perimetrul și aria poligonului obținut dacă facem aceeași construcție pe fiecare dintre laturile pătratului  $ABCD$ .

c) Aflați perimetrul și aria poligonului obținut dacă pe fiecare segment din figura de la b) construim, pe treimea din mijloc, pătratul în exterior.

a)

$$\mathcal{P} = \frac{14 \cdot L}{3}$$

$$\mathcal{A} = \frac{10 \cdot L^2}{9}$$

b)

$$\mathcal{P} = \frac{20 \cdot L}{3}$$

$$\mathcal{A} = \frac{13 \cdot L^2}{9}$$

c)

$$\mathcal{P} = \frac{100 \cdot L}{9}$$

$$\mathcal{A} = L^2 + 4 \frac{L^2}{9} + 20 \frac{L^2}{81}$$

**Indicație:** Observând figurile, în fiecare dintre cele trei cazuri, argumentați rezultatele scrise mai sus.




### Reținem!

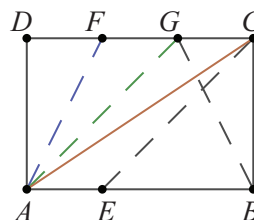
- **Perimetrul** unui poligon este suma lungimilor laturilor sale.
- **Aria triunghiului** este egală cu semiproductul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acesteia.
- **Aria dreptunghiului** este egală cu produsul lungimilor a două laturi alăturate.
- **Aria pătratului** este egală cu pătratul lungimii laturii sale.
- **Aria unui paralelogram** este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare.
- **Aria rombului** este egală cu semiproductul lungimilor diagonalelor sale.
- **Aria trapezului** este egală cu semiproductului dintre suma lungimii bazelor și distanța dintre baze.



- 1 Calculați perimetrul patrulaterului convex  $ABCD$  știind că:
  - a)  $AB + BC = 18$  dm,  $BC + CD = 22$  dm,  
 $CD + DA = 24$  dm,  $DA + AB = 20$  dm.
  - b)  $AD = 7$  cm,  $CD = 9$  cm,  $\mathcal{P}_{ADC} = 28$  cm și  
triunghiul  $ABC$  este echilateral.
- 2 Fie paralelogramul  $ABCD$  cu  $AC \cap BD = \{O\}$ .  
Știind că  $\mathcal{P}_{AOB} = 26$  cm,  $\mathcal{P}_{BOC} = 24$  cm și  
 $AC + BD = 28$  cm, calculați perimetrul  
paralelogramului.
- 3  $ABCD$  este dreptunghi,  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  
 $BC = 9$  cm, iar  $\mathcal{P}_{AOD} = 24$  cm.
  - a) Calculați lungimile segmentelor  $AC$  și  $AB$ .
  - b) Calculați perimetrul și aria dreptunghiului.
- 4 Un triunghi dreptunghic are catetele de 5 cm și  
12 cm.
  - a) Calculați aria triunghiului.
  - b) Calculați lungimea ipotenuzei și lungimea  
înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.
- 5 Ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel este  
de 10 cm. Calculați înălțimea corespunzătoare  
ipotenuzei, apoi aria triunghiului.
- 6 Calculați aria triunghiului  $ABC$ , în care  
 $AB = 8$  cm,  $BC = 1$  dm și  $\sphericalangle ABC = 150^\circ$ .
- 7  $ABCD$  este un paralelogram cu  $AB = 8$  cm,  
 $AD = 6$  cm și  $\sphericalangle BAD = 30^\circ$ . Calculați:
  - a)  $d(D, AB)$  și  $d(C, AD)$ ;
  - b) perimetrul și aria paralelogramului.
- 8 Un romb are perimetrul de 40 cm și un unghi  
de  $150^\circ$ . Calculați aria rombului, apoi produsul  
lungimilor diagonalelor acestuia.
- 9 Fie  $M$  mijlocul laturii  $BC$  a triunghiului  $ABC$ .  
Arătați că  $\triangle ABM$  și  $\triangle ACM$  au aceeași arie.
- 10 Punctul  $N$  aparține laturii  $BC$  a triunghiului  
 $ABC$  și  $BN = 3 \cdot CN$ .
  - a) Calculați raportul ariilor triunghiurilor  $ABN$   
și  $CAN$ , apoi calculați raportul segmentelor  
 $BN$  și  $CN$ .
  - b) Găsiți o relație între rapoartele aflate.
- 11  $ABCD$  este un paralelogram și  $O$  este punctul în  
care se intersectează diagonalele sale.
  - a) Demonstrați că triunghiurile  $AOB$  și  $BOC$  au  
aceeași arie.
  - b) Dacă  $\mathcal{A}_{AOD} = 8$  dm<sup>2</sup>, calculați aria paralelo-  
gramului.

- 12 Un teren în formă de pătrat este împărțit în trei  
suprafețe dreptunghiulare prin  
două drepte paralele cu una  
dintre laturile pătratului. Știind  
că fiecare dreptunghi are  
perimetrul de 80 dam, calculați:
 
  - a) lungimea laturii pătratului;
  - b) aria fiecărei suprafețe dreptunghiulare și aria  
terenului, exprimând rezultatele în hectare.

- 13 În desenul de mai jos  $ABCD$  este dreptunghi,  
 $AB = 18$  cm,  $BC = 12$  cm,  $BE = 2 \cdot AE$  și  
 $CG = GF = DF$ .



- Calculați:
- a) aria dreptunghiului  $ABCD$ ;
  - b) aria fiecăruia dintre triunghiurile:  $ADF$ ,  $AGB$ ,  
 $ACE$ ;
  - c) aria fiecăruia dintre patrulaterale:  $ADFE$ ,  
 $AFGE$ ,  $BCFA$ ,  $ABCG$ ,  $BEDF$ .

- 14 Trapezul dreptunghic  $ABCD$  are bazele  
 $AB = 12$  cm,  $CD = 8$  cm și  $\sphericalangle A = 45^\circ$ .
  - a) Determinați înălțimea trapezului.
  - b) Calculați aria trapezului și aria triunghiului  
 $ADC$ .
- 15 Aria unui trapez este 400 dm<sup>2</sup>, raportul bazelor  
sale este  $\frac{1}{3}$ , iar înălțimea sa este media  
aritmetică a bazelor. Calculați lungimile bazelor  
și înălțimea trapezului dat.
- 16 În trapezul  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ , punctul  $O$  este  
intersecția diagonalelor. Demonstrați că  
triunghiurile  $AOD$  și  $BOC$  au aceeași arie.
- 17 Dreapta  $PQ$ , cu  $P \in AB$ ,  $Q \in CD$ , împarte  
paralelogramul  $ABCD$ , în două suprafețe  
echivalente (cu arii egale). Demonstrați că  
patrulateralele  $ADQP$  și  $BCQP$  au același perimetru.
- 18 Punctul  $M$  este situat în interiorul  
dreptunghiului  $ABCD$ . Demonstrați că:
 
$$\mathcal{A}_{MAB} + \mathcal{A}_{MDC} = \mathcal{A}_{MAD} + \mathcal{A}_{MBC} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABCD}.$$



**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

**I.** La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p	1. În triunghiul $ABC$ , $AD$ și $BE$ sunt înălțimi. Dacă $BC = 25$ cm, $AC = 15$ cm, $AD = 12$ cm, atunci $BE =$ : A. 12 cm                      B. 18 cm                      C. 20 cm                      D. 16 cm
5p	2. Aria triunghiului dreptunghic isoscel cu ipotenuza de 24 cm este: A. $128 \text{ cm}^2$ B. $132 \text{ cm}^2$ C. $136 \text{ cm}^2$ D. $144 \text{ cm}^2$
5p	3. Punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele laturilor $AB$ și $AD$ ale pătratului $ABCD$ , $CD = 20$ cm. Calculând aria patrulaterului $BCNM$ , se obține: A. $200 \text{ cm}^2$ B. $220 \text{ cm}^2$ C. $240 \text{ cm}^2$ D. $250 \text{ cm}^2$
5p	4. Dreptunghiul $ABCD$ are aria $100 \text{ cm}^2$ și $AB = 2 \cdot BC$ . Perimetrul dreptunghiului este: A. $20\sqrt{2}$ cm                      B. $30\sqrt{2}$ cm                      C. $25\sqrt{2}$ cm                      D. $15\sqrt{2}$ cm
5p	5. Despre patrulaterul $DEFG$ se știe că $DE \parallel FG$ , $DG \parallel EF$ , $DE = 14$ cm, $EF = 6$ cm, $\sphericalangle DEF = 150^\circ$ . Patrulaterul are aria: A. $21 \text{ cm}^2$ B. $28 \text{ cm}^2$ C. $42 \text{ cm}^2$ D. $84 \text{ cm}^2$
5p	6. Lungimile bazelor unui trapez dreptunghic sunt 5 cm, respectiv 9 cm, iar unul dintre unghiuri are măsura de $45^\circ$ . Calculând aria trapezului, se obține: A. $38 \text{ cm}^2$ B. $28 \text{ cm}^2$ C. $42 \text{ cm}^2$ D. $84 \text{ cm}^2$
5p	7. $ABCD$ este un dreptunghi cu aria $320 \text{ cm}^2$ , iar punctul $P$ este situat pe dreapta $AB$ . Aria triunghiului $PCD$ este: A. $160 \text{ cm}^2$ B. $180 \text{ cm}^2$ C. $144 \text{ cm}^2$ D. $140 \text{ cm}^2$
5p	8. Un romb are aria $6 \text{ cm}^2$ și diagonalele exprimate în centimetri, prin numere naturale consecutive. Perimetrul rombului este: A. 20 cm                      B. 15 cm                      C. 10 cm                      D. 12 cm

**II.** La problemele următoare se cer rezolvări complete.

10p 10p	1. Perimetrul dreptunghiului $MATE$ este 144 cm. Dragoș a colorat suprafața acestuia ca în figura alăturată, în trei culori: albastru, galben și roșu. Se știe că punctele $B$ și $C$ sunt mijloacele laturilor $MA$ , respectiv $ET$ și că $AB = ME$ . Calculați: a) aria suprafeței colorate cu galben; b) cât la sută din suprafața dreptunghiului reprezintă suprafața care nu este colorată cu albastru.	
15p	2. Se consideră paralelogramul $CDEF$ cu $CE \cap DF = \{O\}$ . Dreapta $d$ trece prin punctul $O$ și intersectează laturile $CD$ și $EF$ în punctele $P$ , respectiv $Q$ . Demonstrați că $\mathcal{P}_{CPOF} = \mathcal{P}_{EQOD}$ .	
10p 5p	3. Trapezul $ABCD$ , $AB \parallel CD$ are $AB = 12$ cm, $CD = 8$ cm și înălțimea de 4 cm. Se consideră $M, N, P$ mijloacele laturilor $AB, BC$ , respectiv $AD$ . Calculați: a) aria patrulaterelor $ABNP$ și $CDPN$ ; b) aria triunghiului $CMP$ .	

# 5

# Cercul

5.1 Unghi înscris în cerc. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

5.2 Poligoane regulate înscrise într-un cerc

5.3 Lungimea cercului și aria discului



**Competențe specifice:**

1.5 2.5 3.5 4.5 5.5 6.5

## 5.1 Unghi înscris în cerc. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

### L1 Coarde și arce în cerc, proprietăți

Cine și-ar mai putea imagina existența cotidiană fără obiecte care au formă de cerc?

Dacă mergem la Londra, nu putem rata o vizită, la „London Eye”, o atracție oarecum recentă, dar extrem de populară. Roata are diametrul de 120 metri, are 80 de spițe, pe ea fiind dispuse 32 de capsule, numerotate de la 1 la 33, numărul 13 fiind omis.

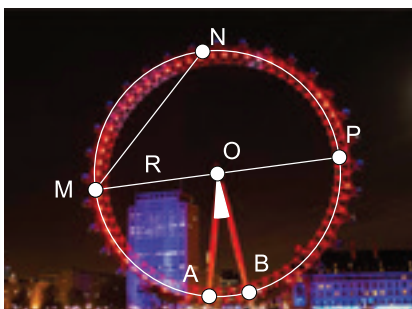


Fig. 1



Fig. 2

### Ne amintim

- 1) **Cercul** este mulțimea punctelor din plan egal depărtate de un punct fix, numit centrul cercului. Centrul cercului se notează, de regulă, cu  $O$ .
- 2) Distanța de la centrul cercului la un punct oarecare al acestuia este constantă, se numește **rază** și se notează cu  $R$  sau  $r$ .
- 3) Segmentul care unește două puncte de pe cerc se numește **coardă** a cercului. O coardă care conține centrul cercului se numește **diametru**.
- 4) Mulțimea punctelor de pe cerc, situate de aceeași parte a unei coarde, la care adăugăm capetele coardei, se numește **arc de cerc**. Oricare două puncte distincte ale cercului determină două arce de cerc. Pentru a diferenția arcul despre care vorbim, se poate folosi o notație cu trei puncte.
- 5) Un arc de cerc determinat de un diametru se numește **semicerc**.
- 6) Unghiul cu vârful în centrul cercului se numește **unghi la centru**.
- 7) Pentru oricare două puncte situate pe cerc, **măsura arcului** mic  $\widehat{AB}$  este egală cu măsura unghiului la centru corespunzător acestuia.

### Exemplu:

În figura 1, punctele situate la distanța  $R$  de punctul fix  $O$  formează cercul cu centrul  $O$  și de rază  $R$ . Îl vom nota  $\mathcal{C}(O, R)$  sau  $\mathcal{C}(O, r)$ . Pe acest cerc, remarcăm punctele  $A, B, M, N, P$ . Atunci,  $AO = BO = MO = NO = PO = r$ .

**Exemplu:** În figura 1,  $MN$  și  $MP$  sunt coarde.  $MP$  este coardă și  $O \in MP$ , deci  $MP$  este diametru.

$$MP = d = MO + ON = 2 \cdot r.$$

**Exemplu:** Pentru punctele  $M$  și  $N$  există arcul mare  $\widehat{MN}$  și arcul mic  $\widehat{MN}$ , ambele notate cu  $\widehat{MN}$ . Deseori, dacă nu se precizează altfel, prin arcul  $\widehat{MN}$  vom înțelege arcul mic.

Arcul mare  $\widehat{MN}$  conține punctele  $A, B, P$  și se poate nota și  $\widehat{MPN}$  sau  $\widehat{MAN}$  sau  $\widehat{MBN}$ .

Diametrul  $MP$  delimitează cele două semicercuri  $\widehat{MNP}$  și  $\widehat{MAP}$ .

**Exemplu:**  $\sphericalangle AOB$  este un unghi la centru.

**Exemplu:**  $\widehat{AB} = \sphericalangle AOB$ .

$\widehat{MP} = 180^\circ$ , pentru că  $MP$  este diametru al cercului.





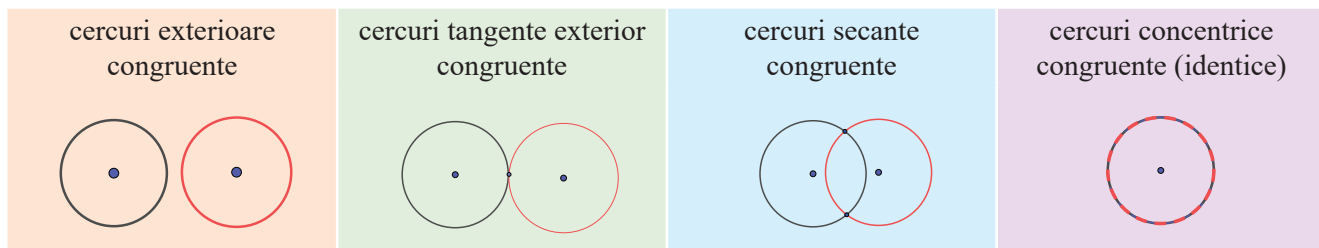
**Descoperim, înțelegem, exemplificăm**

Sonia și Natalia privesc „London Eye” și poartă următorul dialog:

- Natalia, știind că la  $M$  este capsula 8, iar la  $N$  este capsula 17, ce măsură crezi că are arcul mic  $\widehat{MN}$  ?
  - Am înțeles, Sonia, vrei să vezi dacă știi că, pe roată, nu există capsula cu numărul 13, adică între 8 și 17 sunt 7 capsule în loc de 8.
  - Bravo, înseamnă că împreună cu capsulele din capăt, care au numerele 8 și 17, avem 9 capsule, care formează 8 unghiuri congruente cu a 32-a parte dintr-un cerc întreg.
  - Corect, draga mea prietenă, să facem calculul.  $360 : 32 = 11,25$ , deci măsura unghiului format de spițele a două capsule consecutive este  $11^\circ 15'$ . Măsura arcului mic  $\widehat{MN}$  va fi de  $8 \cdot 11^\circ 15' = 90^\circ$ .
  - Crezi, Natalia, că-i putem întreba pe colegii noștri ce număr are capsula din punctul  $P$  ?
- Observați poziția punctului  $P$  pe cercul din imagine, efectuați calculele necesare și răspundeți la întrebarea celor două prietene.

**Definiția 1.** Două cercuri cu raze egale se numesc **cercuri congruente**.

Două cercuri congruente pot avea următoarele poziții relative:

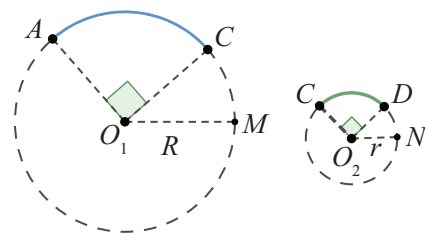


**Definiția 2.** Într-un cerc, sau în cercuri congruente, vom spune că **două arce sunt congruente** dacă au aceeași măsură. Pentru arcele congruente  $\widehat{AB}$  și  $\widehat{CD}$  scriem  $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ .

**Observație:**

Nu este suficient ca arcele să aibă aceeași măsură pentru a putea spune că acestea sunt congruente. Este esențial ca acestea să fie arce ale aceluiași cerc sau ale unor cercuri congruente.

În figura alăturată, avem  $\widehat{AB} = 90^\circ$  și  $\widehat{CD} = 90^\circ$  și se observă imediat că arcele nu sunt congruente.



**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

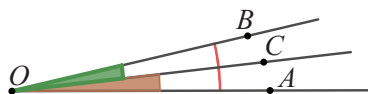
**Teorema 1.** Dacă punctele  $A, B, C$  aparțin cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $C \in \widehat{AB}$ , atunci  $\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$ .

$C \in AB$



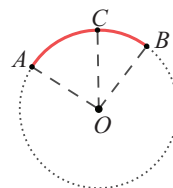
$AB = AC + CB$

$OC \in \text{Int}(\angle AOB)$



$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

$C \in \widehat{AB}$



$\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$

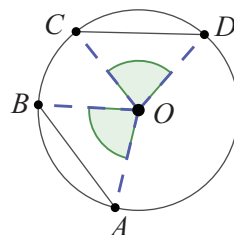


**Teorema 2.**

- 1) În același cerc sau în cercuri congruente, la coarde congruente corespund arce congruente.
- 2) În același cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente.

*Demonstrație:*

- 1) Se consideră pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  punctele  $A, B, C$  și  $D$  astfel încât  $AB \equiv CD$ .  
În triunghiurile  $OAB$  și  $OCD$ , laturile  $OA, OB, OC$  și  $OD$  sunt raze ale cercului, deci sunt congruente, iar din ipoteză, avem  $AB \equiv CD$ . Cazul L.L.L. conduce la  $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$ , iar de aici rezultă  $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ , sau  $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ .
- 2) Fie  $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$  cu  $\widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$ , fapt ce implică  $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD$ .  
În triunghiurile  $\triangle OAB$  și  $\triangle OCD$ ,  $AO \equiv CO, BO \equiv DO$ , iar prin aplicarea cazului L.U.L., rezultă  $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$ , adică  $AB \equiv CD$ .



**Teorema 3.**

- 1) Dacă un diametru al unui cerc este perpendicular pe o coardă a sa, atunci acesta împarte coarda și arcele corespunzătoare în câte două părți congruente.
- 2) Dacă un diametru al unui cerc împarte o coardă sau unul dintre arcele determinate de aceasta în părți congruente, atunci acest diametru este perpendicular pe coardă.

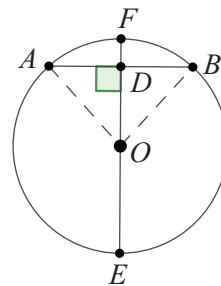
*Demonstrație:* Fie  $A, B, E, F \in \mathcal{C}(O, r)$ ,  $O \in EF$  și  $EF \cap AB = \{D\}$ .

- 1) Dacă  $EF \perp AB$ , atunci triunghiurile  $ADO$  și  $BDO$  sunt dreptunghice și congruente (cazul I.C.):  $OD \equiv OD$  (latură comună) și  $AO \equiv BO$  (raze ale cercului).

Rezultă  $AD \equiv DB$  și  $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOD$ , ultima relație conducând la  $\widehat{AF} \equiv \widehat{FB}$ .

Arcele  $\widehat{EAF}$  și  $\widehat{EBF}$  sunt semicercuri și atunci:  $\widehat{AE} = 180^\circ - \widehat{AF} = 180^\circ - \widehat{BF} = \widehat{BE}$ .

- 2) Știm că un diametru conține mijlocul unei coarde sau al unuia dintre arcele determinate de această coardă. În triunghiul isoscel  $AOB$ , diametrul include mediana corespunzătoare bazei sau bisectoarea unghiului format de laturile congruente. Atunci, diametrul include și înălțimea corespunzătoare bazei. Rezultă  $EF \perp AB$ , adică diametrul este perpendicular pe acea coardă.



**Teorema 4.** Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.

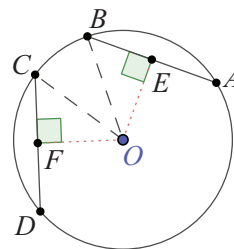
*Demonstrație:* Fie  $A, B, C, D \in \mathcal{C}(O, r)$ ,  $OE \perp AB$ ,  $E \in AB$  și  $OF \perp CD$ ,  $F \in CD$ .

Dreptele  $OE$  și  $OF$  conțin diametre perpendiculare pe coarde, deci  $E$  și  $F$  sunt mijloacele cordelor  $AB$  și  $CD$ , adică  $AB = 2 \cdot BE$  și  $CD = 2 \cdot CF$ .

Dacă  $AB \equiv CD$ , atunci  $BE \equiv CF$ , iar triunghiurile  $BEO$  și  $CFO$  sunt congruente (I.C.); rezultă  $OE \equiv OF$ , adică  $d(O, AB) = d(O, CD)$ .

Reciproc, dacă  $d(O, AB) = d(O, CD)$ , adică  $OE \equiv OF$ , atunci  $\triangle BEO \equiv \triangle CFO$  (I.C.).

Rezultă congruența  $BE \equiv CF$ , echivalentă cu  $AB \equiv CD$ .



**Teorema 5.** Două coarde ale aceluiași cerc, cuprinse între drepte paralele, sunt congruente.

*Demonstrație:* Considerăm punctele  $A, B, C, D$  pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  cu  $AB \parallel CD$ .

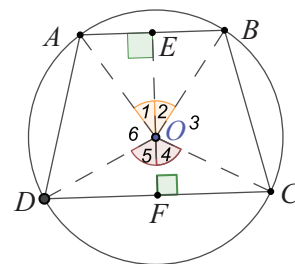
Construim  $OE \perp AB$  și fie  $OE \cap AB = \{F\}$ . Atunci, din  $AB \parallel CD$

obținem și  $OF \perp DC$ . Triunghiurile  $ABO$  și  $CDO$  sunt isoscele

( $OA = OB = OC = OD = r$ ), iar  $OE$ , respectiv  $OF$ , sunt înălțimi corespunzătoare bazelor, deci sunt și biseatoare. Deducem că:  $\sphericalangle O_1 \equiv \sphericalangle O_2$  și  $\sphericalangle O_4 \equiv \sphericalangle O_5$ .

Deoarece semidreptele  $OE$  și  $OF$  sunt opuse, rezultă  $\sphericalangle O_3 = 180^\circ - \sphericalangle O_2 - \sphericalangle O_4 = 180^\circ - \sphericalangle O_1 - \sphericalangle O_5 = \sphericalangle O_6$ .

Din cazul L.U.L., obținem  $\triangle OBC \equiv \triangle OAD$ , apoi  $BC \equiv AD$  și  $\widehat{BC} \equiv \widehat{AD}$ .



**Aplicația 1:** Punctele  $A, B, C$  sunt situate pe  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar  $AD \perp BC, D \in BC$ . Bisectoarea unghiului  $\sphericalangle DAO$  intersectează cercul în punctul  $E$ .

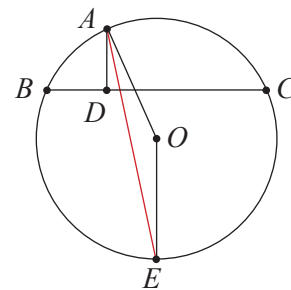
Demonstrați că  $\widehat{BE} \equiv \widehat{CE}$ .

*Soluție:* În triunghiul isoscel  $AOE$  ( $AO = OE = r$ ) avem  $\sphericalangle EAO \equiv \sphericalangle AEO$ .

Dar  $AE$  este bisectoarea  $\sphericalangle DAO$  și  $\sphericalangle EAO \equiv \sphericalangle EAD$ .

Rezultă  $\sphericalangle AEO \equiv \sphericalangle EAD$  ceea ce înseamnă că  $EO \parallel AD$ .

Deoarece  $AD \perp BC$ , se obține  $EO \perp BC$ . Dreapta  $EO$  conține un diametru al cercului, deci împarte arcul  $\widehat{BC}$  în două arce congruente. Rezultă  $\widehat{BE} \equiv \widehat{CE}$ .



**Aplicația 2:** Pe un cerc de centru  $O$  și diametru  $AB$ , se consideră punctele  $C, D$  de o parte a diametrului și punctele  $E, F$  de cealaltă parte a diametrului, astfel încât  $AC \equiv AE$  și  $BD \equiv BF$ . Arătați că  $\widehat{CD} \equiv \widehat{EF}$  și  $d(O, CD) = d(O, EF)$ .

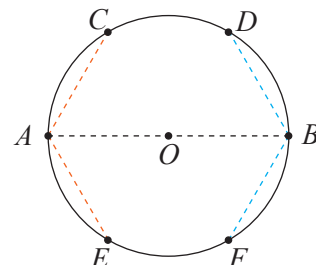
*Soluție:* Într-un cerc, la coarde congruente corespund arce congruente.

Din  $AC \equiv AE$  obținem  $\widehat{AC} \equiv \widehat{AE}$ , iar din  $BD \equiv BF$  obținem  $\widehat{BD} \equiv \widehat{BF}$ .

Deoarece diametrul împarte cercul în două semicercuri rezultă

$$\widehat{CD} = 180^\circ - \widehat{AC} - \widehat{BD} = 180^\circ - \widehat{AE} - \widehat{BF} = \widehat{EF}, \text{ deci } \widehat{CD} = \widehat{EF}.$$

Arcele  $\widehat{CD}$  și  $\widehat{EF}$  sunt situate pe același cerc și sunt congruente. Deducem, din teorema 2, că  $CD \equiv EF$ , apoi din teorema 4, coardele  $CD$  și  $EF$  sunt situate la aceeași distanță față de punctul  $O$ , centrul cercului.



### Reținem!



- 1) În același cerc sau în cercuri congruente, la coarde congruente corespund arce congruente.
- 2) În același cerc sau în cercuri congruente, la arce congruente corespund coarde congruente.
- 3) Dacă un diametru al unui cerc este perpendicular pe o coardă a sa, atunci acesta împarte coarda și arcele corespunzătoare în câte două părți congruente.
- 4) Dacă un diametru al unui cerc împarte o coardă sau unul dintre arcele determinate de aceasta în părți congruente, atunci acest diametru este perpendicular pe coardă.
- 5) Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.
- 6) Două coarde ale aceluiași cerc, cuprinse între drepte paralele, sunt congruente.



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1) Desenați un cerc cu centrul  $O$  și reprezentați trei puncte distincte  $A, B, C$  pe acest cerc.
  - a) Numiți arcele și coardele determinate de cele trei puncte.
  - b) Numiți unghiul la centru care conține punctele  $B$  și  $C$ .
- 2) Desenați un cerc și fixați pe el punctele  $A, B, C$ , astfel încât  $\widehat{AB} = 60^\circ$ ,  $\widehat{BC} = 90^\circ$ . Calculați măsura arcului mic  $\widehat{AC}$ . Analizați toate cazurile posibile.
- 3) Desenați un cerc cu centrul  $O$ , apoi fixați pe acest cerc punctele  $A, B, C$  astfel încât măsurile arcelor  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  și  $\widehat{CA}$  să fie  $50^\circ$ ,  $150^\circ$  respectiv  $160^\circ$ . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
  - a)  $O \in AC$ .
  - b) Arcul mare  $\widehat{AC}$  are măsura de  $200^\circ$ .
  - c)  $\sphericalangle AOC = 80^\circ$ .
  - d) Triunghiul  $AOB$  este isoscel.

- 4** Construieți, prin punctul  $A$ , interior cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , o coardă  $BC$ , astfel încât  $A$  să fie mijlocul ei.
- Descrieți fiecare etapă a construcției.
  - Dacă  $BC = r$ , calculați măsura unghiului  $\widehat{OBC}$  și măsura arcului mic  $\widehat{BC}$ .
- 5**  $AB$  este un diametru al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar  $AC$  și  $AD$  sunt coarde congruente ale acestui cerc. Demonstrați că:
- $\widehat{BC} \equiv \widehat{BD}$ ;      b)  $AB \perp CD$ .
- 6** În cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , coardele  $AB = 6$  cm și  $CD = 12$  cm nu au puncte comune și sunt situate la distanța de 6 cm, respectiv 3 cm, de centrul cercului. Demonstrați că  $\sphericalangle ABO + \sphericalangle BAO = \sphericalangle COD$ .
- 7** Coardele  $AB$  și  $CD$  ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  sunt perpendiculare și se intersectează în punctul  $P$ . Fie  $E$  și  $F$  mijloacele celor două coarde. Demonstrați că  $EF = OP$ .
- 8** Cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  conține vârfurile  $A, B, C$  ale paralelogramului  $ABCD$  și intersectează latura  $CD$  în punctul  $E$ . Demonstrați că triunghiul  $ADE$  este isoscel.
- 9** Pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , cu  $r = 12$  cm, sunt situate punctele  $A, B, C, D$ , astfel încât  $AB$  este diametru,  $\widehat{CAD} = 120^\circ$  și  $CD \perp AB$ .
- Demonstrați că triunghiurile  $OCD$  și  $ACD$  sunt isoscele.
  - Calculați măsurile arcelor  $\widehat{AC}$  și  $\widehat{BD}$ ;
  - Calculați distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $CD$ .
- 10** Punctele  $A, B, C, D, E$  sunt situate pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  astfel încât, oricum am considera două dintre arcele de cerc  $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DE}, \widehat{EA}$ , acestea nu au puncte comune. Se știe că  $\widehat{ABC} = \widehat{CDE} = \widehat{AE} = 120^\circ$  și  $\widehat{AB} = \widehat{CD} = 2 \cdot \widehat{BC}$ .
- Calculați măsurile celor cinci arce.
  - Demonstrați că triunghiul  $\triangle ACE$  este echilateral.

## L2 Unghi înscris în cerc

Anterior aprofundării cercului, studiul geometriei s-a bazat, în general, pe rezultate referitoare la triunghi. Definiția cercului și proprietățile lui oferă posibilitatea completării acestor rezultate și mijloace noi de demonstrare a unora dintre ele.

### Ne amintim

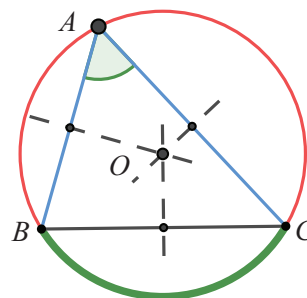
- Orice punct situat pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele acestuia.
- Mediatoarele unui triunghi sunt concurente într-un punct, notat de regulă cu  $O$ .

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

În figura alăturată, sunt construite mediatoarele laturilor triunghiului  $ABC$ . Este reprezentat, de asemenea, cercul care conține cele trei vârfuri ale triunghiului.

Să identificăm elementele cunoscute despre triunghi și despre cerc și eventuale legături între acestea:

- Cercul reprezentat are centrul  $O$  și avem  $OA = OB = OC = r$ .
- Laturile triunghiului  $ABC$  sunt coarde ale cercului.
- Fiecărei laturi îi corespunde un arc mic și un arc mare.
- Unghiurile triunghiului au vârful pe cerc.
- În interiorul fiecărui unghi al triunghiului, se află doar unul dintre arcele corespunzătoare laturii opuse.



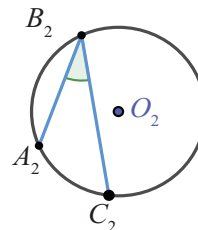
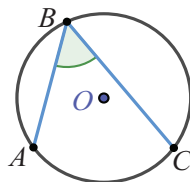
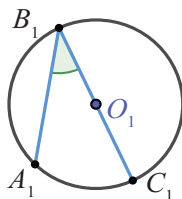
**Definiție:** Se numește **unghi înscris în cerc** un unghi care are vârful pe cerc, iar laturile sale sunt coarde ale cercului.

Sunt posibile următoarele trei situații:

1) centrul cercului se află pe o latură a unghiului;

2) centrul cercului se află în interiorul unghiului;

3) centrul cercului se află în exteriorul unghiului.



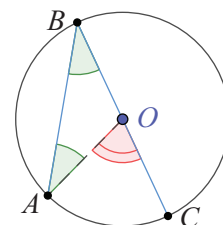
**Teoremă.** Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc subîntins de laturile sale (determinat de laturile unghiului și situat în interiorul acestuia).

*Demonstrație:* Despre unghiul înscris în cerc nu cunoaștem decât definiția. Știm, însă, că măsura unui unghi la centru este egală cu măsura arcului de cerc cuprins între laturile sale. Vom folosi acest rezultat. Fie unghiul  $ABC$ , înscris în cercul de centru  $O$  și rază  $r$ .

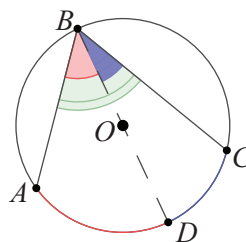
1) Considerăm, pentru început, cazul când una dintre laturile unghiului este diametrul cercului. Fie această latură  $BC$ . Din  $OA = OB = r$ , rezultă că  $\triangle AOB$  este isoscel, de unde  $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle ABO$ . Unghiul  $\sphericalangle AOC$  este exterior triunghiului  $AOB$ , deci  $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO = 2 \cdot \sphericalangle ABO = 2 \cdot \sphericalangle ABC$ .

Dar  $\sphericalangle AOC$  este unghi la centru și are măsura egală cu a arcului mic  $\widehat{AC}$ .

$$\text{Rezultă } \sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \widehat{AC}.$$

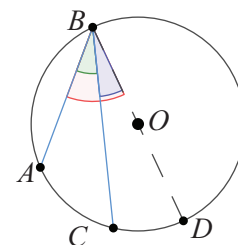


2) Fie  $O$  în interiorul unghiului  $\sphericalangle ABC$ . Notăm cu  $D$  punctul diametral opus punctului  $B$ . Condiția impusă pentru  $O$  implică descompunerea unghiului înscris în cerc în două unghiuri adiacente și descompunerea arcului corespunzător în două arce alăturate. Aplicând, pentru fiecare, rezultatul anterior, obținem:  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = \frac{1}{2} \widehat{AD} + \frac{1}{2} \widehat{DC} = \frac{1}{2} \widehat{AC}$ .



3) Fie  $O$  în exteriorul unghiului  $ABC$  și  $D$  punctul diametral opus punctului  $B$ . Aplicând rezultatul obținut la 1), obținem:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD - \sphericalangle DBC = \frac{1}{2} \widehat{AD} - \frac{1}{2} \widehat{CD} = \frac{1}{2} \widehat{AC}.$$



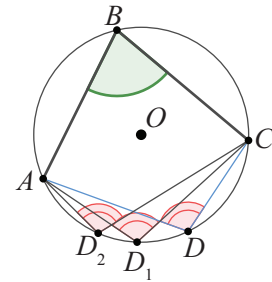
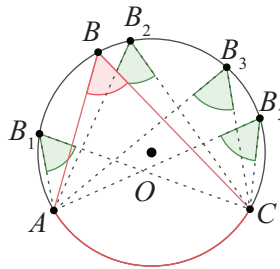
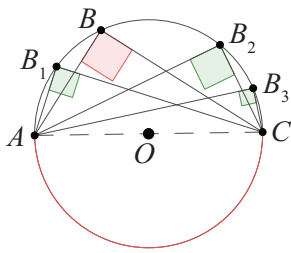
Teorema de mai sus ne permite să formulăm câteva **consecințe**, foarte utile în aplicații.



$C_1$ : Măsura oricărui unghi înscris într-un semicerc este de  $90^\circ$ .

$C_2$ : Dacă  $A$  și  $C$  sunt două puncte fixe pe un cerc, atunci oricare ar fi  $B_n$ , un punct situat pe arcul  $\widehat{ABC}$ , are loc relația:  
 $\sphericalangle AB_nC \equiv \sphericalangle ABC$

$C_3$ : Dacă  $A$  și  $C$  sunt două puncte fixe pe un cerc, atunci oricare ar fi  $D$ , un punct al cercului, care nu aparține arcului  $\widehat{ABC}$ , are loc relația:  
 $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$ .



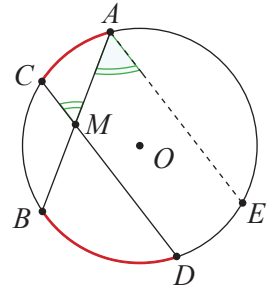
Argumentați, folosind figurile de mai sus, validitatea acestor rezultate.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

**Aplicația 1:** Fie  $AB$  și  $CD$  două coarde ale unui cerc și  $M$  punctul lor de intersecție, situat în interiorul cercului. Demonstrați că  $\sphericalangle AMC = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$ .

**Soluție:** Prin punctul  $A$ , construim paralela  $AE$  la  $CD$ ,  $E$  punct al cercului. Atunci, arcele  $\widehat{AC}$  și  $\widehat{DE}$  sunt congruente, fiind cuprinse între coarde paralele. Dreptele paralele  $AE$  și  $CD$  formează, cu secanta  $AB$ , unghiuri alterne interne congruente, deci  $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BAE$ , iar  $\sphericalangle BAE$  este unghi înscris în cerc. Obținem:

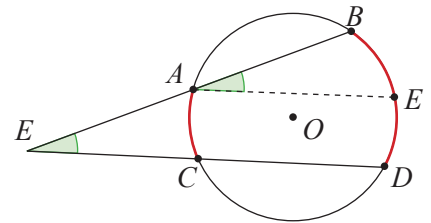
$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle BAE = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BDE} = \frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{AC}) = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD}).$$



**Aplicația 2:** Fie  $AB$  și  $CD$  două coarde ale unui cerc. Dreptele suport ale cordelor se intersectează în punctul  $N$ , situat în exteriorul cercului. Arătați că  $\sphericalangle ANC = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC})$ .

**Soluție:** Construim, prin  $A$ , coarda  $AE \parallel CD$ . Obținem arcele situate între ele, congruente:  $\widehat{AC} \equiv \widehat{ED}$ . Paralelele  $AE$  și  $CD$  formează, cu secanta  $AN$ , unghiuri corespondente congruente, deci  $\sphericalangle ANC \equiv \sphericalangle BAE$ , iar  $\sphericalangle BAE$  este un unghi cu vârful pe cerc. Obținem:

$$\sphericalangle ANC = \sphericalangle BAE = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BE} = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC}).$$



### Reținem!

Se numește *unghi înscris în cerc* un unghi care are vârful pe cerc, iar laturile sale sunt coarde ale cercului.

Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc subîntins de laturile sale (determinat de laturile unghiului și situat în interiorul acestuia).



- 1 Desenați un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$  și alegeți trei puncte  $A, B, C$  ale acestuia.
  - a) Numiți unghiurile înscrise în cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ .
  - b) Dacă  $\widehat{AB} = 40^\circ$ ,  $\widehat{BC} = 100^\circ$ , calculați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle BCA$ ,  $\sphericalangle CAB$ .
- 2 Punctele  $A, B, C$  aparțin cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $O \in AB$ , iar  $\widehat{AC} = 52^\circ$ . Determinați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle BCA$ ,  $\sphericalangle CAB$ .
- 3 Se consideră punctele  $A, B, C, D$  pe cercul de centru  $O$ , astfel încât  $C$  și  $D$  sunt situate de aceeași parte a dreptei  $AB$ , ca și punctul  $O$ .
  - a) Demonstrați că  $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = \sphericalangle AOB$ .
  - b) Pentru  $\widehat{AB} = 70^\circ$ , calculați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle ACB$  și  $\sphericalangle AOB$ .
- 4 Punctele  $E, F, G, H$  aparțin cercului de centru  $O$ , astfel încât  $G$  și  $H$  sunt situate de o parte și de alta a dreptei  $EF$ .
  - a) Calculați  $\sphericalangle EGF + \sphericalangle EHF$ .
  - b) Pentru  $\widehat{EF} = 80^\circ$ , determinați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle EHF$ ,  $\sphericalangle EOF$ ,  $\sphericalangle EGF$ , analizând cazurile posibile (când  $G$  aparține arcului mic  $EF$ , respectiv arcului mare  $EF$ ).
- 5 Fie  $A$  un punct al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , cu  $r = 6$  cm. Mediatoarea segmentului  $OA$  intersectează cercul în punctele  $B$ , respectiv  $C$ .
  - a) Calculați perimetrul patrulaterului  $ABOC$ .
  - b) Calculați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle BAC$ ,  $\sphericalangle ABC$ ,  $\sphericalangle ACO$ .
- 6 Triunghiul  $DEF$  are vârfurile pe un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar bisectoarea unghiului  $EDF$  intersectează cercul, a doua oară, în punctul  $M$ .
  - a) Demonstrați că  $\sphericalangle EFM \equiv \sphericalangle FEM$ .
  - b) Pentru  $\widehat{DE} = 90^\circ$ ,  $\widehat{DF} = 150^\circ$ , calculați măsurile unghiurilor triunghiului  $DFM$ .
- 7 Coardele  $AB$  și  $AC$  ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  sunt perpendiculare și  $\sphericalangle ABO = 80^\circ$ . Determinați măsurile unghiurilor triunghiului  $ABC$ .
- 8 Patrulaterul  $MNPQ$  are vârfurile pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $\widehat{MN} \equiv \widehat{NP}$ ,  $\widehat{MQ} \equiv \widehat{PQ}$ .
  - a) Demonstrați că  $O \in NQ$ .
  - b) Știind că  $\widehat{MN} = \widehat{MQ} - 40^\circ$ , aflați măsurile unghiurilor patrulaterului  $MNPQ$ .
- 9 Punctele  $A, B, C$  sunt situate pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar  $AB$  este diametru. Bisectoarea unghiului  $ACB$  intersectează cercul în punctul  $D$ . Calculați:
  - a) măsura arcului mic  $\widehat{BD}$ ;
  - b) măsura unghiului  $AOD$ .
- 10 Triunghiul  $ABC$  este isoscel,  $AB = AC$ , iar cercul de centru  $A$ , având raza  $r < AB$ , intersectează laturile  $AB$  și  $AC$  în punctele  $D$ , respectiv  $E$ .
  - a) Demonstrați că  $DE \parallel BC$ .
  - b) Calculați măsura arcului mare  $\widehat{DE}$ , știind că  $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ECB = 115^\circ$ .
- 11 Fie  $AB$  diametru al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , punctul  $C$  aparține cercului și  $M$  este mijlocul arcului mic  $\widehat{BC}$ .
  - a) Demonstrați că  $OM \parallel AC$ .
  - b) Fie  $BD \parallel OM$ ,  $D$  fiind situat pe cerc. Demonstrați că punctele  $C, D, O$  sunt coliniare.
- 12 Pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , cu  $r = 10$  cm, se consideră punctele  $A, B, C$ , astfel încât  $AO \perp OB$ , iar  $C$  este situat pe arcul mic  $\widehat{AB}$ . Dreapta  $CM \perp OA$ ,  $M \in OA$ , intersectează cercul în  $P$ , iar dreapta  $CN \perp OB$ ,  $N \in OB$ , intersectează cercul în  $Q$ .
  - a) Calculați lungimea segmentului  $MN$ .
  - b) Arătați că punctele  $P, O, Q$  sunt coliniare.
  - c) Dacă  $CMON$  este pătrat, aflați măsura unghiului  $ACM$ .
- 13 Punctele  $M$  și  $N$  sunt diametral opuse pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar punctul  $P$  este mijlocul unui arc de cerc cu capetele  $M$  și  $N$ . Mediatoarea segmentului  $PM$  intersectează arcul mare  $\widehat{PM}$  în punctul  $Q$ , iar mediatoarea segmentului  $PN$  intersectează arcul mare  $\widehat{PN}$  în punctul  $R$ . Calculați măsurile unghiurilor triunghiului  $PQR$ .



### L3 Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

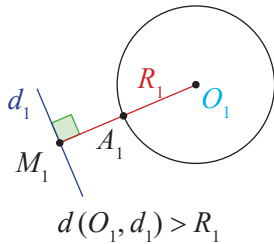
#### Ne amintim

- 1) Fiind dat un punct  $A$ , există o infinitate de cercuri care îl conțin.
- 2) Fiind date două puncte distincte  $A$  și  $B$ , există o infinitate de cercuri care conțin aceste puncte. Centrele acestor cercuri se află pe mediatoarea segmentului  $AB$ .
- 3) Oricare trei puncte distincte ale unui cerc sunt necoliniare.
- 4) Trei puncte necoliniare determină un cerc și numai unul. Cercul care conține punctele necoliniare  $A, B, C$  se numește **cercul circumscris** triunghiului  $ABC$ , centrul său fiind punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor triunghiului.
- 5) O dreaptă și un cerc pot avea cel mult două puncte comune.

Sunt posibile următoarele poziții relative ale unei drepte față de un cerc:

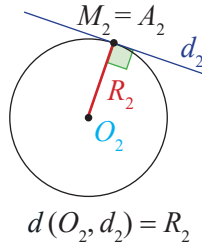
**dreaptă exterioară** cercului

$$\mathcal{C}(O_1, R_1) \cap d_1 = \emptyset$$



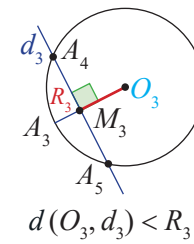
**dreaptă tangentă** la cerc

$$\mathcal{C}(O_2, R_2) \cap d_2 = \{A_2\}$$



**dreaptă secantă** cercului

$$\mathcal{C}(O_3, R_3) \cap d_3 = \{A_4, A_5\}$$



#### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

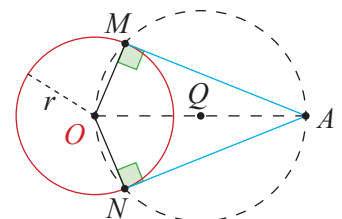
**Teorema 1.** O dreaptă  $d$  este tangentă la cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , în punctul  $A$ , dacă și numai dacă  $d \perp OA$ .

*Demonstrație:* Considerăm dreapta  $d$ , tangentă la cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , în punctul  $A$ . Vom demonstra că  $d \perp OA$ . Presupunem, prin reducere la absurd, că dreapta  $d$  nu este perpendiculară pe  $OA$ . Fie atunci  $OB \perp d, B \in d$ . În triunghiul  $OAB$ , cu  $\sphericalangle OBA = 90^\circ$ , avem  $\sphericalangle OBA > \sphericalangle OAB$ , deci  $OA > OB$ . Deoarece  $A$  este pe cerc, rezultă că punctul  $B$  este în interiorul cercului și atunci dreapta  $d$  ar mai avea un punct, diferit de  $A$ , comun cu cercul. Se ajunge la o contradicție. Presupunerea este falsă, prin urmare  $d \perp OA$ .

Pe de altă parte, știm că într-un punct  $A$ , al unei drepte  $OA$ , se poate construi o singură perpendiculară  $d$ , ceea ce ne spune că singura dreaptă perpendiculară pe  $OA$ , în punctul  $A$  este tangenta la cerc, în acest punct. Într-un punct al unui cerc, se poate construi o singură tangentă la cerc. Ne întrebăm dacă există drepte distincte, care au un punct comun și sunt tangente la un cerc. Vom considera un cerc de centru  $O$  și rază  $r$ .

**Teorema 2.** Prin orice punct  $A$ , exterior unui cerc  $\mathcal{C}(O, r)$ , se pot construi două tangente  $AM$  și  $AN$ , la cerc. Segmentele determinate de punctul  $A$  și punctele de tangență sunt congruente.

*Demonstrație:* Considerăm punctul  $A$  care aparține exteriorului cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , deci  $OA > r$ . A găsi punctul de contact al unei tangente din  $A$  la cerc înseamnă a construi un triunghi dreptunghic cu ipotenuza  $AO$  și cu vârful unghiului drept pe cercul dat. Știm că un unghi drept este înscris într-un semicerc, deci vom construi cercul de diametru  $AO$ .





Notăm centrul său cu  $Q$ ; raza va fi  $R = \frac{OA}{2}$ . Notăm cu  $M$ , respectiv  $N$ , punctele de intersecție a celor două cercuri, iar unghiurile  $\sphericalangle OMA$  și  $\sphericalangle ONA$  sunt unghiuri drepte. Dreptele  $AM$  și  $AN$  sunt tangente la cerc. Considerăm triunghiurile  $OAM$  și  $OAN$ , dreptunghice și congruente ( $OA$  latură comună și  $OM \equiv ON$ , ca raze ale cercului); deci catetele corespunzătoare,  $MA$  și  $NA$  sunt congruente.

Congruența triunghiurilor  $OAM$  și  $OAN$  ne oferă încă un rezultat remarcabil, foarte util în rezolvarea problemelor: *Semidreapta determinată de un punct exterior unui cerc și centrul cercului este bisectoarea unghiului format de tangentele la cerc din acel punct.* În desen (Teorema 2), semidreapta  $AO$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle MAN$ .

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

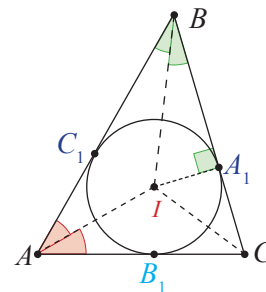
**Aplicația 1:** În triunghiul  $ABC$  notăm  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ . Bisectoarele unghiurilor triunghiului se intersectează în punctul  $I$ . Cum fiecare punct al bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului, rezultă că punctul  $I$  este situat la aceeași distanță față de cele trei laturi ale triunghiului. Notăm această distanță cu  $r$ , deci  $d(I, AB) = d(I, BC) = d(I, AC) = r$ . Construim cercul de centru  $I$  și cu raza egală cu  $r$ . Acest cerc se numește **cercul înscris în triunghiul  $ABC$**  și intersectează laturile triunghiului în punctele  $A_1 \in BC$ ,  $B_1 \in AC$ , respectiv  $C_1 \in AB$  (punctele de tangență ale laturilor cu cercul înscris). Calculați lungimile segmentelor:  $AB_1$ ,  $AC_1$ ,  $BA_1$ ,  $BC_1$ ,  $CA_1$ ,  $CB_1$  în funcție de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  și de semiperimetrul triunghiului.

**Soluție:** Laturile triunghiului sunt tangente cercului înscris și aplicând teorema 2. obținem congruențele:  $AB_1 \equiv AC_1$ ,  $BC_1 \equiv BA_1$ , și  $CA_1 \equiv CB_1$ . Notăm lungimile segmentelor:  $AB_1 = x$ ,  $BC_1 = y$  și  $CA_1 = z$ .

Atunci, lungimile laturilor triunghiului sunt:  $a = y + z$ ,  $b = x + z$ ,  $c = x + y$  (1),

iar perimetrul triunghiului  $ABC$  este  $P = 2x + 2y + 2z$ . Notăm  $p = x + y + z$  (2),

semiperimetrul triunghiului  $ABC$ . Scăzând pe rând din egalitatea (2) câte una din egalitățile (1), rezultă  $AB_1 = AC_1 = p - a$ ,  $BC_1 = BA_1 = p - b$  și  $CA_1 = CB_1 = p - c$ .

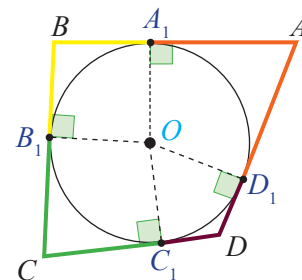


**Aplicația 2:** Din punctul  $A$ , exterior cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , construim tangentele  $AA_1$  și  $AD_1$ . În interiorul unghiului  $\sphericalangle A_1AD_1$  și în exteriorul cercului, considerăm punctul  $C$ , din care construim tangentele la cerc:  $CB_1$  și  $CC_1$ . Astfel patrulaterul  $A_1B_1C_1D_1$  este patrulater convex.

Notăm  $\{B\} = AA_1 \cap CB_1$  și  $\{D\} = AD_1 \cap CC_1$ .

- Realizați, cu ajutorul instrumentelor geometrice, desenul alăturat, respectând datele problemei.
- Demonstrați că patrulaterul convex  $ABCD$  are proprietatea  $AB + CD = BC + AD$ .

**Soluție:** Segmente reprezentate cu aceeași culoare sunt tangente dintr-un punct exterior, la cercul dat, deci sunt congruente. Se obține  $AB + CD = BC + AD$ .



### Puțină istorie

Rezultatul prezentat de Aplicația 2 a fost descoperit de inginerul francez Henri Pitot, în anul 1725.

Henri Pitot a trăit între anii 1695–1771.

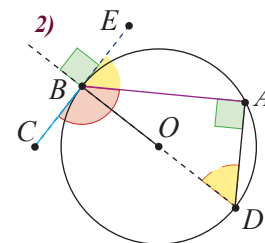
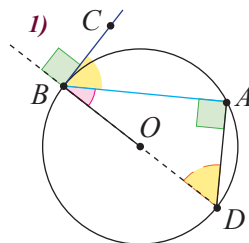


Henri Pitot

**Aplicația 3:** Fie  $\sphericalangle ABC$ , cu vârful pe cercul de centru  $O$ , astfel încât o latură este tangentă la un cerc, iar cealaltă latură este coardă a cercului. Măsura unghiului  $\sphericalangle ABC$  este egală cu jumătate din măsura arcului de cerc, situat în interiorul unghiului.

*Demonstrație:* Fie unghiul  $ABC$ , cu latura  $BC$  tangentă în punctul  $B$  la cerc, iar latura  $BA$  coardă a aceluiași cerc. Sunt posibile următoarele trei cazuri:

1) Unghiul  $\sphericalangle ABC$  este ascuțit. Știind că  $\sphericalangle OBC = 90^\circ$ , rezultă  $O \notin \text{Int}(\sphericalangle ABC)$ . Notăm cu  $D$  punctul diametral opus lui  $B$  și se obține  $\sphericalangle BAD = 90^\circ$  (înscris în semicerc). Unghiurile  $\sphericalangle ABC$  și  $\sphericalangle ADB$  au același complement (unghiul  $\sphericalangle ABD$ ), deci sunt congruente. Deoarece unghiul  $\sphericalangle ADB$  este înscris în cerc, se obține  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \widehat{AB}$ .



2) Unghiul  $\sphericalangle ABC$  este obtuz. Atunci, arcul din interiorul unghiului este arcul mare  $\widehat{ADB}$ .

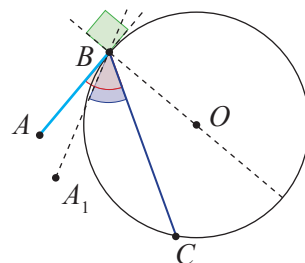
Fie  $BE$  semidreapta opusă semidreptei  $BC$ . Unghiul  $ABE$  este ascuțit, cu o latură tangentă și cealaltă coardă a cercului. Aplicând cazul 1), obținem  $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle ABE = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{AB}) = \frac{1}{2} \widehat{ADB}$ .

3) Unghiul  $\sphericalangle ABC$  este unghi drept. Atunci,  $AB$  este diametru, unghiul  $\sphericalangle ABC$  are în interior semicercul  $\widehat{AB}$  cu măsura  $180^\circ$ , deci  $\frac{1}{2} \widehat{AB} = 90^\circ = \sphericalangle ABC$ .

**Aplicația 4:** Unghiul  $\sphericalangle ABC$  are vârful  $B$  pe cerc, iar  $BC$ , este coardă a cercului.

Dacă  $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \widehat{BC}$ , atunci  $AB$  este tangenta în  $B$  la cerc.

*Demonstrație:* Presupunem, prin reducere la absurd, că  $AB$  nu este tangenta în  $B$  la cerc. Atunci, există o dreaptă  $BA_1$  tangentă în  $B$  la cerc. Aplicăm rezultatul obținut la Aplicația 3, cazul 1) și avem:  $\sphericalangle A_1BC = \frac{1}{2} \widehat{BC} = \sphericalangle ABC$ . Rezultă că dreptele  $BA$  și  $BA_1$  coincid, deci  $AB$  este tangenta în  $B$ , la cerc.



Rezultatul prezentat în Aplicația 4 ne oferă o modalitate de a arăta că o dreaptă este tangentă la un cerc: *dacă măsura unui unghi cu vârful pe cerc este jumătate din măsura arcului din interiorul unghiului, iar o latură este coardă a cercului, atunci cealaltă latură a unghiului este tangentă la cerc.*



**Reținem!**

- Trei puncte necoliniare determină un cerc și numai unul.
- O dreaptă și un cerc pot avea cel mult două puncte comune.
- O dreaptă este tangentă la un cerc dacă și numai dacă este perpendiculară pe raza cercului, în punctul de intersecție al dreptei cu cercul.
- Prin orice punct  $A$ , exterior unui cerc  $\mathcal{C}(O, r)$ , se pot construi două tangente la acest cerc. Segmentele determinate de punctul  $A$  și punctele de tangență sunt congruente.





## Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1 Realizați câte un desen care să corespundă datelor de mai jos, apoi scrieți, folosind simboluri matematice, relația dintre raza cercului și distanța de la centrul cercului la dreaptă, pentru fiecare dintre cazurile:
  - a) cercul cu centrul  $A$  are raza  $r_1$  și dreapta  $a$  este exterioară cercului.
  - b) cercul cu centrul  $B$  are raza  $r_2$  și dreapta  $b$  este tangentă cercului.
  - c) cercul cu centrul  $C$  are raza  $r_3$  și dreapta  $c$  este secantă cercului.
- 2 Desenați prin punctul  $A$ , exterior cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , o dreaptă exterioară, o dreaptă tangentă și o dreaptă secantă cercului. Notați punctele cercului prin care trec dreptele desenate, apoi, pentru fiecare dintre cele trei drepte, scrieți mulțimea punctelor de intersecție dintre dreaptă și cerc.
- 3 Desenați cercul cu centrul  $O$  și de rază  $r = 3$  cm. Fixați punctul  $A$  pe cerc și construiți tangenta  $TA$  la acest cerc. Completați pe caiet spațiile libere astfel încât să obțineți propoziții adevărate:
  - a)  $\sphericalangle TAO = \dots^\circ$ ;
  - b)  $d(O, TA) = \dots = \dots$  cm.
- 4 Se consideră cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $r = 0,4$  dm și o dreaptă  $d$ . Distanța de la punctul  $O$ , centrul cercului, la dreapta  $d$ , este exprimată, în centimetri, prin numărul  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x < 10$ . Alegeți numărul  $x$  astfel încât dreapta  $d$  să fie:
  - a) exterioară cercului;
  - b) tangentă cercului;
  - c) secantă cercului.
- 5 Fie  $M$  un punct al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , cu raza  $r = 3$  cm și punctul  $T$ , exterior cercului, astfel încât  $TM = 4$  cm și  $TO = 5$  cm. Stabiliți poziția dreptei  $TM$  față de cercul dat.
- 6 Punctul  $A$  este exterior cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $AB$  este tangentă la cerc, punctul  $B$  este situat pe cerc,  $OA = 18$  cm și  $\sphericalangle OAB = 30^\circ$ . Calculați raza cercului.
- 7 Prin punctul  $B$ , exterior cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , se construiesc dreptele  $BC$  și  $BD$ , tangente la cerc,  $C, D \in \mathcal{C}(O, r)$ . Știind că  $OB = 16$  cm și că triunghiul  $COD$  este echilateral, calculați:
  - a)  $BC$  și  $BD$ ;
  - b) distanța de la punctul  $B$  la dreapta  $CD$ .
- 8 Punctele  $A, B, C$  sunt situate pe un cerc astfel încât  $\widehat{AB} \equiv \widehat{AC}$ . Demonstrați că tangenta la cerc, în punctul  $A$ , este paralelă cu dreapta  $BC$ .
- 9 Într-un cerc, se consideră arcul  $\widehat{AB} = 72^\circ$ . Tangenta la cerc în punctul  $A$  intersectează mediatoarea segmentului  $AB$  în punctul  $C$ .
  - a) Demonstrați că  $CB$  este tangentă la cerc;
  - b) Calculați măsura unghiului  $ACB$ .
- 10 Pe un cerc de centru  $O$  și rază 8 cm, se iau punctele  $A$  și  $B$ , astfel încât  $\widehat{AB} = 120^\circ$ . Tangentele în  $A$  și  $B$  la cerc se intersectează în punctul  $T$ .
  - a) Determinați lungimea segmentului  $TO$ .
  - b) Dacă  $AB \cap OT = \{D\}$ , arătați că  $TD = 3 \cdot DO$ .
- 11 Tangentele  $AB$  și  $AC$  la cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  sunt perpendiculare, punctele  $B$  și  $C$  fiind pe cerc. Dreapta  $AO$  intersectează cercul în punctele  $D$  și  $E$ .
  - a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului  $BDCE$ .
  - b) Demonstrați că tangentele în  $D$ , respectiv în  $E$ , la acest cerc, sunt paralele cu dreapta  $BC$ .



Nevoia de frumos a omenirii s-a manifestat din cele mai vechi timpuri. În natură, întâlnim forme de o regularitate și frumusețe aparte. Să privim câteva imagini ilustrative:



Stilizat, remarcăm forma perfectă de cerc, împărțit în părți egale, în fiecare parte fiind adăugate detalii specifice, perfect simetrice.

### Puțină istorie

Problema diviziunii cercului în părți egale (folosind rigla și compasul) era cunoscută din Antichitate. Pentru  $n = 2^a$  ( $a$  fiind număr natural nenul),  $n = 3$ ,  $n = 5$  sau produs de două sau trei numere de această formă, erau cunoscute modalitățile de construcție.

Gauss, în lucrarea sa *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), extinde posibilitatea împărțirii cercului în părți egale și în cazul unor numere de altă formă.

Karl Friedrich Gauß (Gauss) este cel care a construit, folosind numai rigla și compasul, un *poligon regulat* cu 17 laturi, o revelație a vremii.



Karl Friedrich Gauß

### Ne amintim

Triunghiul echilateral are *toate laturile* și *toate unghiurile* congruente.

Pătratul are *toate laturile* și *toate unghiurile* congruente.

Ne întrebăm:

- 1) Există și alte poligoane, astfel încât să aibă toate laturile și toate unghiurile congruente?
- 2) Ce proprietăți comune au acestea?
- 3) Ce proprietăți specifice (proprietăți care le diferențiază) au acestea?

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

#### Definiția 1.

Poligonul convex care are *toate laturile congruente* și *toate unghiurile*, formate de două laturi alăturate, *congruente* se numește **poligon regulat**.

#### Exemple:

Poligonul regulat cu trei laturi este *triunghiul echilateral*.

Poligonul regulat cu patru laturi este *pătratul*.

Poligonul regulat cu cinci laturi se numește *pentagon regulat*.

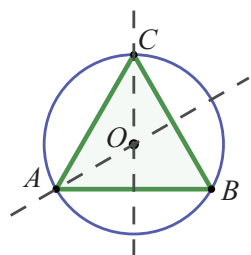
Poligonul regulat cu șase laturi se numește *hexagon regulat*.

**Definiția 2.** Cercul care conține toate vârfurile unui poligon se numește **cercul circumscris** acestuia.

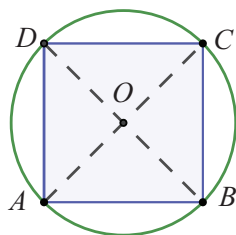
**Definiția 3.** Poligonul care are toate vârfurile pe un cerc se numește **poligon înscris** în acel cerc.

Să remarcăm, fără demonstrație, pentru moment, că orice poligon regulat poate fi înscris într-un cerc.

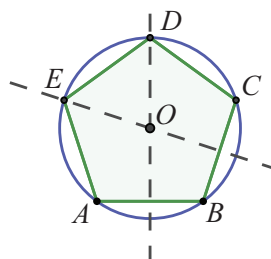
**Exemple:** Triunghiul echilateral, pătratul, pentagonul regulat, hexagonul regulat.



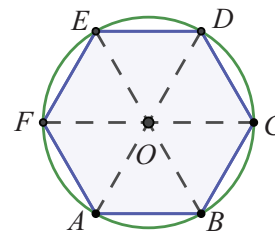
Triunghiul  $ABC$  este înscris în cerc.



Pătratul  $ABCD$  este înscris în cerc.



Pentagonul  $ABCDE$  este înscris în cerc.



Hexagonul  $ABCDEF$  este înscris în cerc.

Observând imaginile de mai sus, putem deduce:

- 1) Centrul cercului circumscris unui poligon regulat este intersecția mediatoarelor laturilor acestuia.
- 2) Centrul cercului circumscris unui poligon regulat este intersecția bisectoarelor unghiurilor acestuia.
- 3) Laturile unui poligon regulat sunt coarde ale cercului circumscris.
- 4) Vârfurile unui poligon regulat cu  $n$  laturi determină  $n$  arce congruente.
- 5) Fiecare unghi al unui poligon regulat cu  $n$  laturi este unghi înscris în cerc și subîntinde un arc format din  $n - 2$  arce congruente.
- 6) Razele  $OA, OB, \dots$  care conțin un vârf al unui poligon regulat, sunt bisectoare ale unghiurilor corespunzătoare acestora.

### Temă de portofoliu

a) Observați poligoanele regulate din desenele de mai sus, copiați pe caiete tabelul următor și completați-l.

Poligonul	Triunghiul $ABC$	Pătratul $ABCD$	Pentagonul regulat $ABCDE$	Hexagonul regulat $ABCDEF$
laturile	$AB, BC, AC$		$AB, BC, CD, DE, EA$	
diagonalele	Nu are			$AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF, DF$
unghiurile		$ABC, BCD, CDA, DAC$		

b) Demonstrați că diagonalele și laturile unui poligon regulat cu  $n$  laturi, corespunzătoare aceluiași vârf, determină  $n - 2$  unghiuri congruente, pentru  $n = 4, n = 5$  și  $n = 6$ .



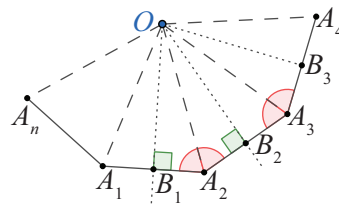
**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

**Teorema 1.** Există un cerc care trece prin toate vârfurile unui poligon regulat cu  $n$  laturi.

*Demonstrație:*

Considerăm poligonul regulat  $A_1A_2A_3A_4 \dots A_n$ . Notăm mijloacele laturilor  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$  și  $A_3A_4$  cu  $B_1$ ,  $B_2$ , respectiv  $B_3$ .

Deoarece punctele  $A_1, A_2, A_3$  sunt necoliniare, rezultă că există un punct  $O$ , centrul cercului circumscris triunghiului  $A_1A_2A_3$ , și anume intersecția mediatoarelor laturilor sale. Atunci,  $OB_1$  este mediatoarea laturii  $A_1A_2$ , iar  $OB_2$  este mediatoarea laturii  $A_2A_3$ .



Să arătăm că și mediatoarea laturii  $A_3A_4$  trece prin punctul  $O$ . Triunghiurile  $OB_1A_2$  și  $OB_2A_2$  sunt dreptunghice, au latura comună  $OA_2$ , iar  $B_1A_2 \equiv A_2B_2$  (jumătăți ale unor segmente congruente).

Folosind cazul I.C., rezultă  $\triangle OB_1A_2 \equiv \triangle OB_2A_2$ , de unde  $\sphericalangle OA_2B_1 = \sphericalangle OA_2B_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle A_1A_2A_3$ . Din congruența unghiurilor de la baza triunghiului isoscel  $OA_2A_3$  obținem

$$\sphericalangle OA_3B_2 = \sphericalangle OA_2B_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle A_1A_2A_3 = \frac{1}{2} \sphericalangle A_2A_3A_4, \text{ deci, semidreapta } A_3O \text{ este bisectoarea } \sphericalangle A_2A_3A_4.$$

Triunghiurile  $OA_3B_2$  și  $OA_3B_3$  au latura comună  $OA_3$ ,  $A_3B_2 \equiv A_3B_3$  (jumătăți de laturi congruente), iar  $\sphericalangle OA_3B_2 = \sphericalangle OA_3B_3$  deoarece  $A_3O$  este bisectoare. Din cazul L.U.L. rezultă  $\triangle OA_3B_2 \equiv \triangle OA_3B_3$ . Prin urmare  $\sphericalangle OB_3A_3 = \sphericalangle OB_2A_3 = 90^\circ$  și  $A_3B_2 = A_3B_3$  sunt jumătate din latura poligonului.

Am arătat că  $OB_3$  este mediatoarea laturii  $A_3A_4$ , deci cercul cu centru în  $O$ , care trece prin  $A_1, A_2, A_3$ , va conține și punctul  $A_4$ .

Continuând raționamentul pentru mediatoarele celorlalte laturi ale poligonului, arătăm că toate vârfurile poligonului regulat se găsesc pe cercul de centru  $O$  și rază  $R = OA_1$ .

**Observație:** Demonstrația teoremei de mai sus este laborioasă, dar parcurgerea ei este un bun exercițiu de raționament logic.

**Reținem!**

- Poligonul convex care are toate laturile congruente și toate unghiurile formate de două laturi alăturate, congruente se numește poligon regulat.
- Fiecare semidreaptă cu originea într-un vârf al unui poligon regulat și care conține centrul  $O$  al cercului este bisectoarea unghiului poligonului, corespunzător aceluși vârf.
- Suma măsurilor unghiurilor poligonului regulat cu  $n$  laturi este  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .
- Mediatoarele laturilor unui poligon regulat sunt concurente în centrul cercului circumscris acestuia.
- Unghiul format de două laturi alăturate ale unui poligon regulat cu  $n$  laturi are măsura de  $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ .







## Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1** Desenați un cerc de centru  $O$  și rază  $r$ . Fixați un punct  $A$  pe cerc. Luați în deschiderea compasului lungimea razei și marcați pe cerc, în această ordine, punctele  $A, B, C, D, E, F$  astfel încât  $AB = BC = CD = DE = EF = r$ . Demonstrați că:
- $AF = r$ ;
  - $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$ ;
  - triunghiul  $ACE$  și hexagonul  $ABCDEF$  sunt poligoane regulate.

- 2** Desenați un cerc cu centrul în  $O$ , iar prin punctul  $O$ , desenați drepte perpendiculare  $a$  și  $b$ . Dreapta  $a$  intersectează cercul în punctele  $A$  și  $C$ , iar dreapta  $b$  intersectează cercul în punctele  $B$  și  $D$ . Demonstrați că  $A, B, C, D$  sunt vârfurile unui poligon regulat.

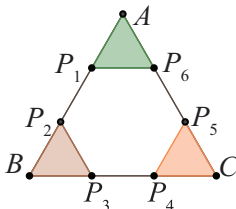
- 3** Un triunghi echilateral are înălțimea de 9 cm. Calculați raza cercului circumscris triunghiului.

- 4** Vârfurile unui pătrat cu aria  $144 \text{ cm}^2$  se află pe un cerc. Calculați lungimea diametrului cercului.

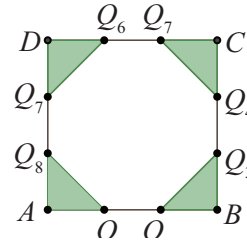
- 5** Vârfurile unui hexagon regulat, cu perimetrul 108 cm, se află pe un cerc. Calculați raza cercului.

- 6** Desenați un dreptunghi  $ABCD$  în care  $AB = 4 \text{ cm}$  și  $\sphericalangle ABD = 60^\circ$ .
- Demonstrați că există un cerc pe care se află vârfurile dreptunghiului. Determinați centrul și raza acestui cerc, apoi desenați-l.
  - Mediatoarea laturii  $AD$  intersectează cercul, desenat la subpunctul a), în punctele  $E$ , respectiv  $F$ . Demonstrați că  $A, B, C, D, E, F$  sunt vârfurile unui hexagon regulat.

- 7** Fie  $ABC$  triunghi echilateral. Fiecare latură a triunghiului este împărțită în trei părți congruente, ca în figura de mai jos. Decideți dacă poligonul obținut prin îndepărtarea colțurilor colorate este un poligon regulat.



- 8** Fiecare latură a pătratului  $DEFG$  este împărțită în trei părți congruente, ca în figura de mai jos. Decideți dacă poligonul obținut prin îndepărtarea colțurilor colorate este un poligon regulat. Justificați răspunsul dat.



- 9** Se consideră triunghiurile echilaterale  $ABC, ACD, ADE, AEF, AFG$ , având interioarele disjuncte, două câte două.
- Stabiliți dacă  $BCDEFG$  este hexagon regulat. Justificați răspunsul dat.
  - Stabiliți natura patrulaterelor  $ABCD$  și  $EFGH$ .

- 10**  $MNPQRS$  este un hexagon regulat și  $MP = 8\sqrt{3} \text{ cm}$ . Calculați raza cercului circumscris hexagonului.

- 11** Pe laturile dreptunghiului  $ABCD$  cu  $AB = a \text{ cm}$ ,  $BC = b \text{ cm}$ , se construiesc în exterior pătrate.
- Demonstrați că centrele acestor pătrate sunt vârfurile unui poligon regulat.
  - Calculați raza cercului circumscris acestui poligon.

- 12** În cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  este înscris un poligon regulat cu  $n$  laturi,  $n \geq 3$ ,  $A_1A_2$  fiind una dintre laturile poligonului. Calculați măsura arcului  $\widehat{A_1A_2}$ , pentru  $n \in \{3, 4, 5, 6\}$ .

- 13** În hexagonul regulat  $MNPQRS$ , punctele  $A, B, C$  și  $D$  sunt mijloacele laturilor  $MN, PQ, QR$  respectiv  $SM$ .
- Calculați măsura unghiului format de dreptele  $AC$  și  $BD$ .
  - Stabiliți natura patrulaterului  $ABCD$ .

- 14**  $ABCDEF$  este un hexagon regulat, înscris în cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ . Tangentele la cerc, în punctele  $A$  și  $C$ , se intersectează în punctul  $T$ . Demonstrați că:

- $TAC$  este un poligon regulat;
- $OB = BT$ .



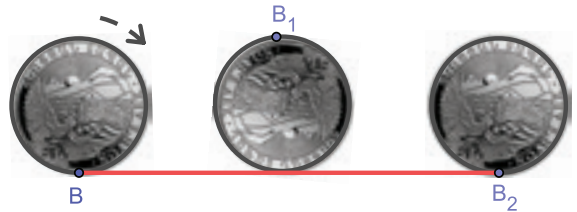


## 5.3 Lungimea cercului și aria discului

Pe un cerc de centru  $O$  și rază  $R$ , punem în evidență două puncte  $A$  și  $B$ . Ne întrebăm care este lungimea întregului cerc, adică a arcului  $\widehat{ABA}$ . Pe baza noțiunilor matematice parcurse până acum, nu vom putea demonstra formula, dar un mic experiment ne poate lămuri.

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Pe marginea unei monede, marcăm un punct  $B$ . Rostogolim moneda, în linie dreaptă, pe o foaie de hârtie, apoi măsurăm segmentul cuprins între două atingeri consecutive ale punctului marcat, cu hârtia ( $B$  și  $B_2$ ). Calculând raportul dintre lungimea obținută prin măsurare și lungimea diametrului monezii, se observă că acesta este cuprins între 3,1 și 3,2.



Repetând experimentul cu cercuri de diferite diametre, vom constata că acest raport are aceeași valoare, indiferent de raza cercului.

Această constantă se notează cu litera grecească  $\pi$ , citim „pi” și este prima literă a cuvântului grecesc „perimetros” care înseamnă perimetru. Este un număr irațional (are o infinitate de zecimale) cu valoarea aproximativă:  $\pi = 3,1415926535\dots$ . În aplicații, de obicei folosim primele două zecimale, adică  $\pi \approx 3,14$ .

În concluzie, am obținut formula de calcul pentru lungimea cercului de rază  $R$ :  $L_{\text{cerc}} = 2 \cdot \pi \cdot R$

Ea corespunde lungimii cercului întreg, deci a unui arc de cerc cu măsura de  $360^\circ$ .

Pentru un arc oarecare  $\widehat{AB}$  al cercului  $\mathcal{C}(O, R)$ , lungimea este direct proporțională cu măsura arcului, adică:

$$\frac{\widehat{AB}}{L_{\widehat{AB}}} = \frac{360^\circ}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

Dacă sunt date două puncte  $A$  și  $B$  pe un cerc și dorim să calculăm lungimile arcelor determinate de acestea, atunci:

– lungimea arcului mic  $\widehat{AB}$  al cercului  $\mathcal{C}(O, R)$  este  $L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi \cdot R \cdot \widehat{AB}}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot R \cdot \sphericalangle AOB}{180^\circ}$ ;

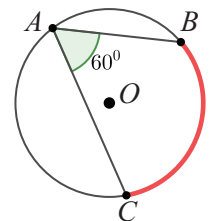
– lungimea arcului mare  $\widehat{AB}$  al cercului  $\mathcal{C}(O, R)$  este

$$L_{\widehat{AB}} = 2 \cdot \pi \cdot R - \frac{\pi \cdot R \cdot \widehat{AB}}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot R \cdot (360^\circ - \widehat{AB})}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot R \cdot (360^\circ - \sphericalangle AOB)}{180^\circ}$$

**Exemplu:** Să calculăm lungimea arcului de cerc din  $\mathcal{C}(O, R)$  cuprins în interiorul unui unghi

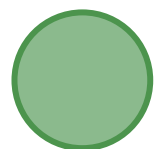
înscris în cerc, cu măsura de  $60^\circ$ . Unghiul  $BAC$  este înscris în cerc și  $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \widehat{BC}$ , deci

$$\widehat{BC} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ. \text{ Din } \frac{\widehat{BC}}{L_{\widehat{BC}}} = \frac{120^\circ}{L_{\widehat{BC}}} = \frac{360^\circ}{2 \cdot \pi \cdot R} \text{ se obține } L_{\widehat{BC}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{3}.$$

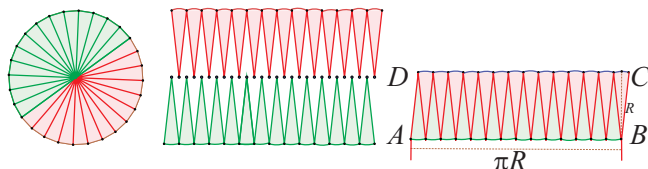


**Observație:** Calculul lungimii unui arc de cerc se poate face și utilizând regula de trei simplă pentru cele două mărimi direct proporționale: măsura arcului de cerc și lungimea arcului aceluiași cerc.

**Definiția 1.** Se numește **disc** de centru  $O$  și rază  $R$  mulțimea tuturor punctelor situate în interiorul cercului  $\mathcal{C}(O, R)$  sau pe acest cerc.



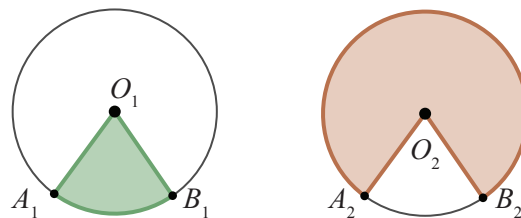
Aria discului mărginit de cerc se calculează cu o formulă a cărei demonstrație depășește cunoștințele învățate în clasele elementare. Vom face o estimare a ariei discului, prin împărțirea cercului în  $2n$  sectoare (părți, felii) egale, prin unghiuri la centru congruente. Alegem o valoare rezonabilă,  $2n = 28$ , unghiurile la centru având aceeași măsură. Colorăm diferit cele două semicercuri delimitate de un diametru și le desfășurăm de-a lungul unei drepte, „bazele” sectoarelor fiind orientate diferit (vezi figura de mai jos). Apoi, cele două figuri se întrepătrund, obținând „aproape” un paralelogram (când  $n$  este foarte mare figura se apropie foarte mult de un dreptunghi) cu o latură egală cu jumătate din lungimea cercului, adică  $\pi \cdot R$ , iar înălțimea se apropie de valoarea  $R$ . Atunci, aria paralelogramului este *aproximativ egală* cu valoarea  $\pi \cdot R^2$ .



Am găsit formula de calcul pentru aria discului:  
 $\mathcal{A} = \pi \cdot R^2$ .

**Definiția 2.** Figura geometrică delimitată de două raze  $OA$  și  $OB$  ale aceluiași cerc  $\mathcal{C}(O, R)$ , împreună cu arcul de cerc cu capetele  $A$  și  $B$  se numește **sector de cerc**.

În primul cerc, este reprezentat un sector de cerc delimitat de razele  $O_1A_1$  și  $O_1B_1$  cu arcul mic  $\widehat{A_1B_1}$ , iar în al doilea cerc este reprezentat sectorul de cerc determinat de razele și  $O_2A_2$  și  $O_2B_2$  cu arcul mare  $\widehat{A_2B_2}$ . Aria sectorului de cerc este direct proporțională cu măsura arcului de cerc corespunzător.



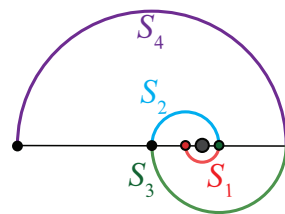
Pentru sectorul mărginit de arcul mic  $\widehat{A_1B_1}$ , din  $\frac{\widehat{A_1B_1}}{\mathcal{A}_{A_1O_1B_1}} = \frac{360^\circ}{\pi \cdot R^2}$  se obține  $\mathcal{A}_{A_1O_1B_1} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \widehat{A_1B_1}}{360^\circ}$ .

Pentru sectorul mărginit de arcul mare  $\widehat{A_2B_2}$  avem  $\mathcal{A}_{A_2O_2B_2} = \pi \cdot R^2 - \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \widehat{A_2B_2}}{360^\circ}$ , în formulă fiind vorba de arcul mic  $\widehat{A_2B_2}$ .

**Observație:** Calculul ariei unui sector de cerc se poate face și utilizând regula de trei simplă pentru cele două mărimi direct proporționale: măsura arcului de cerc și aria sectorului de cerc corespunzător acelui arc.

**Aplicația 1:** Formăm o spirală din patru semicercuri cu razele  $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ , ca în figura alăturată. Calculați lungimea acestei spirale.

**Soluție:** Am format spirala din semicercul roșu de rază 1, semicercul albastru de rază 2, semicercul verde de rază 4 și semicercul violet de rază 8. Lungimea spiralei este  $L = \pi + 2 \cdot \pi + 4 \cdot \pi + 8 \cdot \pi = 15 \cdot \pi$ .

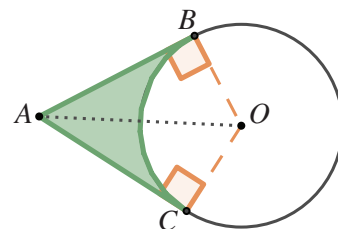


**Aplicația 2:** Fie cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ , și  $A$  un punct exterior acestuia. Tangentele din punctul  $A$  la cerc formează un unghi cu măsura de  $60^\circ$ . Calculați aria suprafeței mărginite de tangente și arcul mic de cerc  $\widehat{BC}$ , unde  $B$  și  $C$  sunt punctele de tangență.

**Soluție:** Vom afla aria cerută scăzând din aria patrulaterului  $ABOC$ , aria sectorului de cerc mărginit de arcul mic  $\widehat{BC}$ . Deoarece  $AB \equiv AC$ ,  $BO \equiv CO$ , triunghiurile dreptunghice  $\triangle AOB$  și  $\triangle AOC$  sunt congruente. Rezultă că  $AO$  este bisectoarea  $\sphericalangle BAC$  și  $\mathcal{A}_{ABOC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABO}$ .

În triunghiul  $AOB$ , cateta  $OB$  se opune unghiului de  $30^\circ$ , adică  $AO = 2 \cdot OB = 2 \cdot R$ , iar  $AB = R\sqrt{3}$ .

$$\mathcal{A}_{ABOC} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABO} = 2 \cdot \frac{AB \cdot BO}{2} = R^2 \sqrt{3}.$$



În patrulaterul  $ABOC$ , măsura unghiului  $BOC$  este  $\sphericalangle BOC = 360^\circ - \sphericalangle ABO - \sphericalangle ACO - \sphericalangle BAC = 120^\circ$ .

Dar unghiul  $BOC$  este unghi la centru, deci arc mic  $\widehat{BC}$  are măsura  $120^\circ$ . Aria sectorului de cerc, mărginit de arc mic  $\widehat{BC}$  este  $\mathcal{A}_s = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot R^2}{3}$ , apoi aria suprafeței cerute este  $\mathcal{A} = R^2 \sqrt{3} - \frac{\pi \cdot R^2}{3} = R^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right)$ .



### Reținem!

- Pentru a calcula lungimea unui cerc de rază  $R$ , folosim formula:  $L_{\text{cerc}} = 2 \cdot \pi \cdot R$ .
- Într-un cerc  $\mathcal{C}(O, R)$ , lungimea unui arc de cerc este direct proporțională cu măsura celui arc.
- Pentru a calcula aria unui disc de rază  $R$ , folosim formula:  $\mathcal{A}_{\text{disc}} = \pi \cdot R^2$ .
- Într-un cerc  $\mathcal{C}(O, R)$ , aria unui sector de cerc este direct proporțională cu măsura arcului de cerc corespunzător.



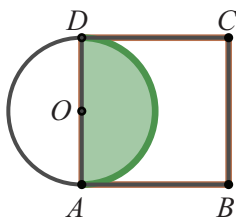
### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1 Pregătiți: un compas, o riglă gradată, o sfoară sau un șnur (care nu este elastic), cu lungimea mai mare de 35 cm și o foarfecă. Desenați un cerc cu raza  $r = 5$  cm. Marcați un punct  $A$  pe cerc. Fixați un capăt al șnurului în punctul  $A$ , apoi suprapuneți șnurul, perfect întins, peste cerc, până ajungeți din nou în punctul  $A$ . Tăiați din șnur partea rămasă. Măsurați lungimea șnurului obținut prin suprapunere și comparați rezultatul cu numărul  $10\pi$ , folosind aproximarea  $\pi \approx 3,14$ .
- 2 Calculați, folosind formula, lungimea cercului care are raza:
  - a) 5 cm;
  - b) 7,5 cm;
  - c)  $\frac{10}{\pi}$  cm.
- 3 Aflați lungimea diametrului unui cerc, știind că lungimea cercului este:
  - a)  $14\pi$  cm;
  - b) 5 dm.
- 4 Aflați aria unui disc știind că are raza de:
  - a) 6 cm;
  - b)  $\frac{9}{2}$  cm;
  - c)  $\pi$  cm.
- 5 Aria unui disc este  $4,84 \pi \text{ cm}^2$ . Aflați diametrul discului.
- 6 Lungimea unui cerc este  $36 \pi$  cm. Calculați aria discului mărginit de acest cerc.
- 7 Numerele reale  $A$  și  $l$  reprezintă aria unui disc, exprimată în  $\text{cm}^2$ , respectiv lungimea cercului care determină discul, exprimată în centimetri. Știind că  $\frac{A}{l} = \frac{5}{2}$ , aflați numerele  $A$  și  $l$ .
- 8 Se consideră cercurile  $\mathcal{C}_1(O, r_1)$  și  $\mathcal{C}_2(O, r_2)$  cu  $r_1 = 17$  cm și  $r_2 = 21$  cm.
  - a) Aflați cu cât este mai mare lungimea cercului  $\mathcal{C}_2$  decât lungimea cercului  $\mathcal{C}_1$ .
  - b) Calculați aria suprafeței cuprinse între cele două cercuri.
- 9 Punctele  $A, B, C$  sunt situate pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ , astfel încât  $\widehat{AB} = 120^\circ$ , iar  $C$  este mijlocul arcului mare  $\widehat{AB}$ . Dacă  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$  și  $AD = 18$  cm, calculați lungimea cercului dat.
- 10 Pătratul  $EFGH$  are vârfurile pe un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar distanța de la centrul cercului la una dintre laturi este  $4\sqrt{2}$  cm. Calculați raza și lungimea cercului în care este înscris pătratul  $EFGH$ , apoi calculați aria discului mărginit de acest cerc.
- 11 Dreptunghiul  $ABCD$  este înscris într-un cerc de centru  $O$  și  $AC = 2 \cdot BC$ .
  - a) Demonstrați că  $O$  este punctul în care se intersectează diagonalele dreptunghiului;
  - b) Știind că aria triunghiului  $AOD$  este  $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ , calculați lungimea cercului și aria discului delimitat de acest cerc.
- 12 Fie  $A, B, C$  puncte ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , astfel încât  $\widehat{AC}$  este un semicerc, iar  $\widehat{AB} = 120^\circ$ . Știind că  $BC = 16$  cm, calculați aria discului de centru  $O$  și rază  $r$ .

**13** Segmentele  $AB$  și  $BC$  sunt coarde perpendiculare ale cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar  $AB = BC = \sqrt{2}$  m. Calculați lungimea cercului.

**14** Se consideră punctele coliniare  $A, B, C, D$ , în această ordine, astfel încât  $AB = BC - 1 = CD - 2 = 3$ , lungimile fiind exprimate în centimetri. Fie  $l_1, l_2, l_3$  lungimile cercurilor de diametre  $AB, BC$  respectiv  $CD$ . Calculați numărul  $a = \frac{l_1}{l_2 + l_3} + \frac{l_2}{l_3 + l_1} + \frac{l_3}{l_1 + l_2}$ .

**15** În figura alăturată, este reprezentată o suprafață formată cu ajutorul pătratului  $ABCD$  și al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ . Suprafața colorată are aria  $8\pi$  cm<sup>2</sup>.  
 a) Calculați lungimea cercului și aria pătratului;  
 b) Determinați aria suprafeței formate din punctele situate în interiorul pătratului dar care nu aparțin suprafeței colorate



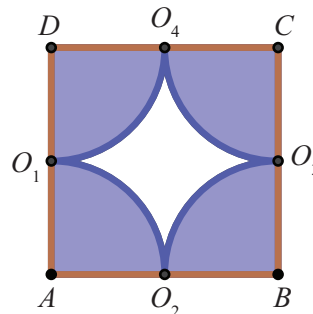
**16** În triunghiul  $ABC$ , se știe că  $\sphericalangle A = 60^\circ$ ,  $AB = x$ ,  $AC = 2x$ .

- Exprimați, în funcție de  $x$ , raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ ;
- Folosind rezultatul obținut la subpunctul a), calculați lungimea cercului circumscris triunghiului  $ABC$  și aria discului determinat de acesta.

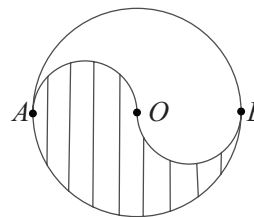
**17** Suprafața pătratică maximă care se poate decupa dintr-un disc are aria de  $32$  cm<sup>2</sup>. Determinați aria discului.

**18** O brățară are forma unui cerc de rază  $4$  cm. Pentru a o micșora, bijutierul scoate arcul de cerc  $AB$  cu măsura de  $90^\circ$ , unind apoi capetele  $A$  și  $B$  astfel încât să obțină un nou cerc. Determinați lungimea acestui cerc și aria discului cu aceeași rază.

**19** Figura de mai jos reprezintă schița unui rondou ornamental. Pe suprafața hașurată se vor planta flori, iar în rest se va pune gazon. Știind că  $ABCD$  este pătrat iar arcele  $\widehat{O_1O_2}, \widehat{O_2O_3}, \widehat{O_3O_4}, \widehat{O_4O_1}$  provin din cercurile de centre  $A, B, C$  respectiv  $D$  și au raze de aceeași lungime, stabiliți dacă este mai mare suprafața pe care se plantează flori decât cea cu gazon.

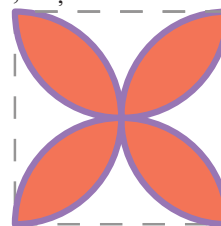


**20** De o parte și de alta a diametrului  $AB$  din cercul de centru  $O$  și rază  $R = 6$  cm se construiesc semicercurile de diametre  $OA$  respectiv  $OB$ .

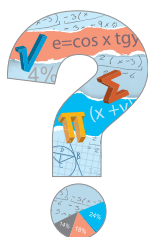


Determinați aria și suma lungimilor arcelor care mărginesc porțiunea hașurată.

**21** În interiorul pătratului de latură  $8$  cm, cu centrul în mijlocul fiecărei laturi, se construiesc semicercuri, obținându-se o floare.



Găsiți lungimea totală a arcelor ce formează floarea și aria florii.



Evaluare sumativă

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p	1. Lungimea unui cerc este $\pi$ cm. Diametrul cercului are lungimea: A. 2 cm                      B. 0,5 cm                      C. 1 cm                      D. 1,5 cm
5p	2. Cercul cu raza $\sqrt{2}$ dm are aria: A. $2\pi$ dm <sup>2</sup> B. $\sqrt{2}\pi$ dm <sup>2</sup> C. $\pi$ dm <sup>2</sup> D. $2\sqrt{2}\pi$ dm <sup>2</sup>
5p	3. Triunghiul echilateral $ABC$ are vârfurile pe un cerc cu raza 15 cm. Lungimea arcului $\widehat{AB}$ este: A. $5\pi$ cm                      B. $10\pi$ cm                      C. $15\pi$ cm                      D. $20\pi$ cm
5p	4. Un sector de cerc are aria o optime din aria discului din care provine. Măsura unghiului la centru este: A. $90^\circ$ B. $60^\circ$ C. $35^\circ$ D. $45^\circ$
5p	5. Pătratul $ABCD$ este înscris într-un cerc cu raza 20 cm, iar punctul $P$ este mijlocul arcului mic $\widehat{AB}$ . Lungimea arcului $\widehat{PC}$ este: A. $10\pi$ cm                      B. $15\pi$ cm                      C. $20\pi$ cm                      D. $40\pi$ cm
5p	6. Poligonul regulat $A_1A_2 \dots A_n$ este înscris într-un cerc, $n \geq 3$ . a) Pentru $n = 3$ , măsura arcului $\widehat{A_1A_2A_3}$ este: A. $60^\circ$ B. $90^\circ$ C. $120^\circ$ D. $240^\circ$
5p	b) Pentru $n = 4$ , măsura arcului $\widehat{A_2A_3A_4}$ este: A. $90^\circ$ B. $120^\circ$ C. $180^\circ$ D. $240^\circ$
5p	c) Pentru $n = 6$ , măsura arcului $\widehat{A_3A_4A_5}$ este: A. $240^\circ$ B. $120^\circ$ C. $180^\circ$ D. $90^\circ$

II. La problemele următoare se cer rezolvări complete.

5p	1. Punctele $A, B, C, D$ sunt coliniare, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 8$ cm iar $\widehat{BC}$ , $\widehat{AC}$ , $\widehat{AD}$ sunt semicercuri (ca în figură).	
5p	a) Realizați pe caiete cu ajutorul instrumentelor de geometrie, un desen care să corespundă datelor problemei.	
5p	b) Calculați aria suprafeței colorate.	
10p	c) Calculați aria suprafeței colorate cu albastru.	
10p	d) Calculați lungimea spiralei $BCAD$ .	
10p	2. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale $MAB, NBC, PCD, QDA$ . Demonstrați că $MNPQ$ este poligon regulat.	
5p	3. În exteriorul triunghiului echilateral $MNP$ se construiesc pătratele $MNBA, NPDC, PMFE$ .	
10p	a) Calculați măsurile unghiurilor poligonului $ABCDEF$ .	
	b) Stabiliți dacă $ABCDEF$ este poligon regulat. Justificați răspunsul dat.	

# 6

# Asemănarea triunghiurilor

6.1 Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

6.2 Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales

6.3 Triunghiuri asemenea



**Competențe specifice:**

1.6 2.6 3.6 4.6 5.6 6.6



6.1

# Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

## L1 Segmente proporționale

### Ne amintim

- 1) Numerele reale  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt *direct proporționale* (sau simplu, *proporționale*) cu numerele reale  $b_1, b_2, \dots, b_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , dacă  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$ .  
Valoarea  $k$  a rapoartelor egale se numește *factor de proporționalitate* sau *raport de proporționalitate*.
- 2) Centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană, la două treimi de vârf și o treime de latura opusă aceluși vârf.

### Rezolvăm și observăm

**Problemă.** Tudor dorește să construiască o căsuță pentru păsări, având scheletul din șipci de lemn, ca în figura alăturată, toate șipcile având lungimi egale. El vrea să aflu cea mai mare lungime  $l$ , exprimată printr-un număr întreg de centimetri, a fiecăreia dintre cele 16 șipci necesare, știind că are la dispoziție o șipcă de lemn lungă de 3 m.

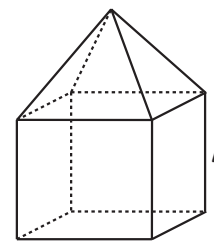
**Soluție:** El știe că numărul 16 al șipcilor se poate obține împărțind lungimea totală  $L$  a materialului folosit, la lungimea maximă  $l$ , a unei șipci, adică  $16 = \frac{L}{l}$ . Tudor procedează

astfel: exprimă lungimea materialului pe care-l are la dispoziție  $3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$ .

Avem  $300 = 16 \cdot l + 12$ , deci câtul împărțirii este 18. Așadar, fiecare șipcă trebuie să aibă 18 cm.

**Comentariu:** Din cei 300 cm de material, Tudor va folosi 288 cm.

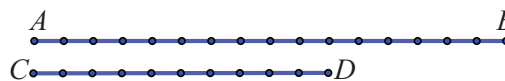
Numărul șipcilor pe care le va folosi Tudor reprezintă **raportul a două lungimi de segmente**, exprimate în **aceeași unitate de măsură**, și anume lungimea totală a materialului folosit și lungimea unei șipci.



**Definiția 1:** Raportul a două segmente este raportul lungimilor acestora, exprimate în aceeași unitate de măsură.

**Aplicația 1:** Calculați raportul dintre segmentele  $AB$  și  $CD$ , știind că măsurând  $AB$  și  $CD$  cu aceeași unitate de măsură,  $AB$  are 16 unități, iar  $CD$  are 10 unități.

Raportul segmentelor  $AB$  și  $CD$  este  $\frac{AB}{CD} = \frac{16}{10} = 1,6$ .



**Aplicația 2:** Calculați raportul, cu o zecimală exactă, dintre dimensiunile unui card bancar, știind că lungimea dreptunghiului care delimitează cardul este aproximativ 8,6 cm, iar lățimea acestuia este 5,4 cm.

**Soluție:**  $\frac{AB}{CD} = \frac{8,6}{5,4} = 1,6\dots$ . Acest număr se apropie, de fapt, de numărul

irațional  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180\dots$ , celebrul „raport de aur”, care dă echilibru și armonie imaginilor, regăsindu-se în natură, în pictură, în sculptură, pe întregul glob terestru.





**Descoperim, înțelegem, exemplificăm**

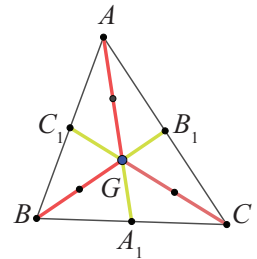
**Definiția 2:** Spunem că segmentele  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots, A_nB_n$  sunt proporționale cu segmentele  $C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, \dots, C_nD_n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , cu raportul de proporționalitate  $k$ , dacă lungimile lor sunt proporționale, cu factorul de proporționalitate  $k$ . Scriem:  $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \dots = \frac{A_nB_n}{C_nD_n} = k$ .

**Exemplu:** Segmentele determinate de vârfurile unui triunghi  $ABC$  cu centrul de greutate  $G$  sunt proporționale cu segmentele determinate de centrul de greutate și mijloacele laturilor,  $A_1, B_1$  respectiv  $C_1$ . Să aflăm raportul de proporționalitate.

**Soluție:** Segmentele  $AA_1, BB_1, CC_1$  sunt mediane și  $G$  este centrul de greutate.

Atunci,  $G \in AA_1$  și  $AG = \frac{2}{3} AA_1, GA_1 = \frac{1}{3} AA_1$ . Analog, pentru celelalte două mediane.

Obținem  $\frac{AG}{GA_1} = \frac{\frac{2}{3} AA_1}{\frac{1}{3} AA_1} = 2$  și analoge, deci  $\frac{AG}{GA_1} = \frac{BG}{GB_1} = \frac{CG}{GC_1} = 2$ . Raportul de proporționalitate este  $k = 2$ .



**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

Pentru oricare două segmente se poate determina raportul lor (raportul lungimilor acestora, exprimate în aceeași unitate de măsură), care este un număr real, pozitiv. Apare, în mod firesc, întrebarea: Pentru un număr real pozitiv  $k$  și un segment  $AB$ , putem găsi un punct  $C$  coliniar cu  $A$  și cu  $B$  astfel încât raportul segmentelor  $AC$  și  $BC$  să fie  $k$ ?

**Propoziția 1.** Pentru orice număr real pozitiv  $k$  există un unic punct  $C$ , pe segmentul  $AB$ , astfel încât  $\frac{AC}{BC} = k$ . Vom spune că **punctul  $C$  împarte segmentul  $AB$  în raportul  $k$** .

**Demonstrație:** Din  $\frac{AC}{BC} = k$  deducem  $\frac{AC}{AC + BC} = \frac{k}{k + 1}$  sau  $AC = \frac{k}{k + 1} \cdot AB$



Cum  $\frac{k}{k + 1} < 1$  pentru orice  $k$  număr real pozitiv, obținem că  $C$  aparține segmentului  $AB$ . În plus, există un singur punct  $C$  pe segmentul  $AB$ , situat la distanța  $\frac{k}{k + 1} \cdot AB$  de punctul  $A$ . În particular, pentru  $k = 1$ , punctul  $C$  este mijlocul segmentului  $AB$ .

**Propoziția 2.** Pentru orice număr real pozitiv  $k \neq 1$  există un unic punct  $C$ , exterior segmentului  $AB$ , astfel încât  $\frac{AC}{BC} = k$ .

**Demonstrație:** Sunt posibile următoarele cazuri:

1) Pentru  $k > 1, AC > BC$  și  $C$  este exterior segmentului  $AB$ , ceea ce este posibil doar dacă punctele sunt dispuse în ordinea  $A - B - C$ .



Relația  $\frac{AC}{BC} = k$  este echivalentă cu  $\frac{AC - BC}{BC} = \frac{k - 1}{1}$  sau  $BC = \frac{1}{k - 1} \cdot AB$ .

Punctul  $C$  este situat pe semidreapta opusă semidreptei  $BA$ , la distanța  $\frac{1}{k - 1} \cdot AB$  de punctul  $B$ .

2) Pentru  $0 < k < 1$ , avem  $AC < BC$  și  $C$  este exterior segmentului  $AB$ , ceea ce este posibil doar dacă punctele sunt dispuse în ordinea  $C - A - B$ .

În ambele propoziții, unicitatea punctului  $C$  rezultă din construcția acestuia.

**Concluzie:** Pentru orice  $k$ , număr real pozitiv  $k \neq 1$ , există două puncte  $C_1$  și  $C_2$ , coliniare cu  $A$  și  $B$ , unul în interiorul segmentului  $AB$ , celălalt în exteriorul său, care împart segmentul  $AB$  în raportul  $k$ . Pentru  $k = 1$ , există un singur punct  $C$ , mijlocul segmentului  $AB$ .

$k < 1$	$k = 1$	$k > 1$



**Aplicația 3:** Între două localități  $A$  și  $B$ , legate de un drum în linie dreaptă cu lungimea de 24,5 km, se află un punct de lucru  $P$ , raportul distanțelor  $PA$  și  $PB$  fiind 0,75. Determinați distanțele de la punctul de lucru la cele două localități.

**Soluție:** Din ipoteză, avem două relații și anume  $PA + PB = 24,5$  și  $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{4}$ .

Cu ajutorul proporțiilor derivate deducem  $\frac{PA}{PA+PB} = \frac{3}{3+4}$  sau  $\frac{PA}{24,5} = \frac{3}{7}$ , de unde  $PA = 10,5$  și  $PB = 14$ .

Distanțele de la punctul de lucru la cele două localități sunt 10,5 km, respectiv 14 km.

### Reținem!



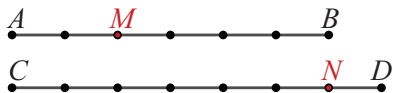
- Raportul a două segmente este raportul lungimilor acestora, exprimate în aceeași unitate de măsură.
- Pentru orice  $k$ , număr real pozitiv ( $k \neq 1$ ), există două puncte  $C_1$  și  $C_2$ , coliniare cu  $A$  și  $B$ , unul în interiorul segmentului  $AB$ , celălalt în exteriorul său, care împart segmentul  $AB$  în raportul  $k$ .
- Singurul punct care împarte un segment în raportul  $k = 1$  este mijlocul segmentului.



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1** Observați desenele de mai jos, apoi determinați valoarea fiecăruia dintre rapoartele:

$$\frac{AM}{AB}, \frac{MB}{AM}, \frac{CN}{CD}, \frac{NC}{ND}.$$



- 2** Determinați valoarea raportului segmentelor  $AB$  și  $CD$ , în următoarele cazuri:

- a)  $AB = 25$  mm,  $CD = 15$  mm;  
b)  $AB = 0,17$  m,  $CD = 510$  mm.

- 3** Punctele  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ , în această ordine, împart segmentul  $PQ$  în 11 segmente congruente.

Calculați valoarea fiecăruia dintre rapoartele:

$$\frac{PA_1}{PQ}, \frac{PQ}{A_5A_6}, \frac{A_3A_7}{A_2A_9}.$$

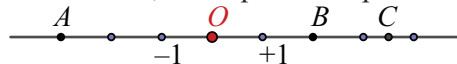
- 4** Desenați segmentul  $CD$  cu lungimea de 6 cm. Punctul  $E$  este situat pe dreapta  $CD$ .

Determinați lungimile segmentelor  $EC$  și  $ED$ ,

apoi rapoartele  $\frac{EC}{CD}$  și  $\frac{ED}{CD}$  pentru fiecare dintre situațiile:

- a)  $E$  este interior segmentului  $CD$  și  $EC = 2ED$ ;  
b)  $E$  nu aparține segmentului  $CD$  și  $CE = 9$  cm.

- 5** Pe axa numerelor cu originea  $O$  și cu unitatea de măsură 1 cm, sunt reprezentate punctele  $A, B$  și  $C$ .



- a) Calculați lungimile segmentelor  $AO, BO, BC$ .

- b) Calculați rapoartele:  $\frac{AO}{BO}, \frac{AO}{CO}, \frac{BO}{AC}, \frac{AB}{BC}$ .

- 6** Punctele  $D$  și  $E$  sunt mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $AC$  ale triunghiului  $ABC$ . Calculați rapoartele:  $\frac{AD}{DB}, \frac{EC}{AC}, \frac{P_{ADE}}{P_{ABC}}$ .

- 7** În interiorul segmentului  $MN$  cu lungimea de 14 cm, se consideră punctul  $C$ , astfel încât  $\frac{CM}{CN} = \frac{2}{5}$ . Calculați lungimile segmentelor  $CM$  și  $CN$ .

- 8** În interiorul segmentului  $AB$  cu lungimea de 84 mm, se consideră punctul  $C$ , astfel încât  $7 \cdot AC = 4 \cdot AB$ . Aflați lungimea segmentului  $BC$ , apoi calculați valoarea raportului  $\frac{BC}{AC}$ .

- 9** Pe dreapta  $d$ , se consideră punctele  $A, B, C$  astfel încât  $AB = 15$  cm și  $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$ .

- a) Calculați lungimile segmentelor  $AC$  și  $BC$ .  
b) Stabiliți ordinea de reprezentare a punctelor pe dreapta  $d$ .

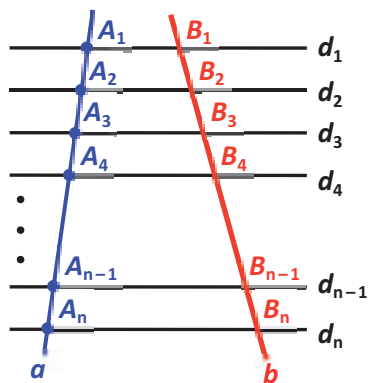
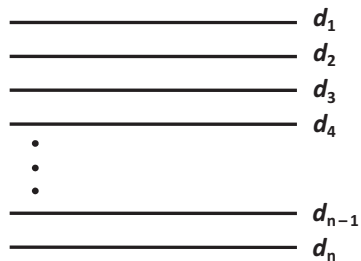
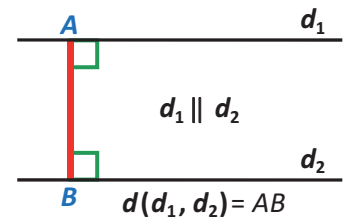
## L2 Teorema paralelelor echidistante

**Definiția 1.** Se numește distanța dintre două drepte paralele  $d_1$  și  $d_2$  lungimea segmentului  $AB$ , unde  $A \in d_1$  și  $B \in d_2$ , iar  $AB \perp d_1$ .  
Notăm distanța dintre dreptele paralele  $d_1$  și  $d_2$  cu  $d(d_1, d_2)$

**Observație:** Distanța dintre două drepte paralele este egală cu distanța de la un punct oarecare al uneia dintre ele la cealaltă dreaptă.  
Folosind notațiile din desen,  $d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = d(B, d_1) = AB$ .

**Definiția 2.** Șirul de drepte diferite, paralele între ele,  $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \dots \parallel d_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , se numesc **paralele echidistante** dacă  $d(d_1, d_2) = d(d_2, d_3) = \dots = d(d_{n-1}, d_n)$ .

**Exemplu:** O scară pe care o folosesc pompierii în intervenții are treptele situate pe drepte paralele, între oricare două trepte consecutive fiind aceeași distanță.



### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

#### Teorema paralelelor echidistante

Mai multe drepte paralele și echidistante determină, pe orice secantă, segmente congruente.

Detaliind, înțelegem că dacă dreptele paralele  $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \dots \parallel d_n$  determină pe o secantă segmente congruente, atunci aceste drepte vor determina pe orice secantă segmente congruente.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

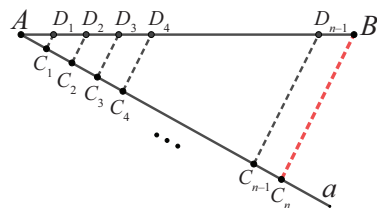
O aplicație practică folosită frecvent a teoremei paralelelor echidistante este împărțirea **unui segment în  $n$  părți cu aceeași lungime** ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ).

**Aplicație:** Determinați, folosind doar rigla și compasul, punctele  $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , situate pe segmentul  $AB$ , astfel încât  $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \dots = D_{n-2}D_{n-1} = D_{n-1}B$ .

**Soluție:** Vom urma pașii:

- 1) Pe o semidreaptă  $a$ , cu originea  $A$ , construim, folosind compasul,  $n$  segmente congruente  $AC_1 \equiv C_1C_2 \equiv C_2C_3 \equiv \dots \equiv C_{n-1}C_n$ .
- 2) Trasăm dreapta  $C_nB$
- 3) Prin fiecare dintre punctele  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ , trasăm câte o paralelă la  $C_nB$ , care taie segmentul  $AB$  în  $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$ . Punctele obținute împart segmentul  $AB$  în  $n$  segmente (părți) cu aceeași lungime,

$AD_1 \equiv D_1D_2 \equiv D_2D_3 \equiv \dots \equiv D_{n-2}D_{n-1} \equiv D_{n-1}B = \frac{AB}{n}$ , deoarece, pe secanta  $a$  paralelele formează segmente congruente.



### Reținem!

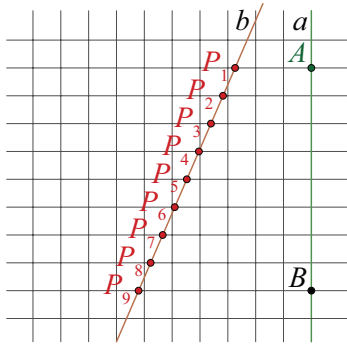
Mai multe drepte paralele și echidistante determină, pe orice secantă, segmente congruente.





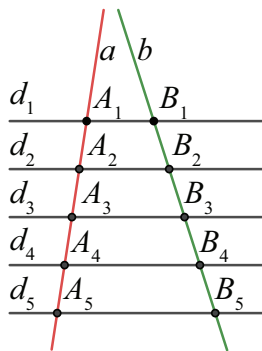
**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

- 1** Pe o foaie de matematică, desenăm o dreaptă  $b$ . Liniile horizontale ale foii de matematică intersectează dreapta  $b$  în punctele  $P_1, P_2, \dots, P_9$  (vezi figura de mai jos).



- Demonstrați că  $P_1P_2 \equiv P_2P_3 \equiv \dots \equiv P_8P_9$ .
- Stabiliți dacă  $P_5$  este mijlocul segmentului  $P_1P_9$ .
- Știind că  $P_2P_8 = 5,4$  cm, calculați lungimea segmentului  $P_3P_7$ , apoi calculați raportul  $\frac{P_1P_3}{P_3P_5}$ .

- 2** Dreptele  $a$  și  $b$  intersectează dreptele paralele  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$  în punctele  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  respectiv  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  (vezi figura de mai jos).



Se știe că  $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$  și  $B_1B_3 = 5,6$  cm.

Calculați lungimile segmentelor  $B_1B_2, B_1B_5, B_2B_5$ .

- 3** Pe o semidreaptă cu originea  $O$ , se reprezintă punctele  $A, B, C$  astfel încât  $OA = 1$  cm,  $OB = 2$  cm,  $OC = 3$  cm. Patru drepte paralele construite prin punctele  $O, A, B, C$  intersectează o dreaptă oarecare  $d$  în punctele  $M, N, P$ , respectiv  $Q$ .

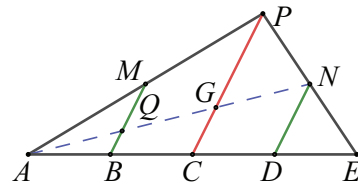
- Calculați lungimile segmentelor  $AB$  și  $BC$ .
- Arătați că punctul  $P$  este mijlocul segmentului  $NQ$ .
- Pentru  $NP = 2,8$  cm, calculați  $4 \cdot MQ$ .

- 4** Pe segmentul  $CD$  cu lungimea de 7 cm, reprezentați punctele  $P_1, P_2, P_3, P_4$  astfel încât segmentele  $CP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4D$  să fie congruente.

- 5** Desenați un paralelogram  $ABCD$  și punctele  $E, F$  pe latura  $AB$  astfel încât  $AE = EF = FB$ . Dreptele paralele prin  $E$ , respectiv  $F$ , la dreapta  $AC$  intersectează dreapta  $BC$  în punctele  $M$ , respectiv  $N$ . Demonstrați că  $MN = \frac{1}{3} \cdot AD$ .

- 6** În trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$ , linia mijlocie  $MN$  ( $M \in AD$  și  $N \in BC$ ) intersectează diagonala  $BD$  în punctul  $P$ , iar  $PQ \parallel BM$ ,  $Q \in AD$ . Demonstrați că  $AM = 2 \cdot DQ$ .

- 7** Punctele  $A, B, C, D, E$  sunt coliniare, în această ordine, și  $AB = BC = CD = DE$ , iar  $P$  este un punct exterior dreptei  $AB$ . Paralela prin punctul  $B$  la dreapta  $PC$  intersectează dreapta  $AP$  în  $M$ , iar paralela prin punctul  $D$  la dreapta  $PC$  intersectează dreapta  $PE$  în  $N$ .



- Demonstrați că  $AN$  este mediană a triunghiului  $AEP$ .
- Dacă  $BM \cap AN = \{Q\}$  și  $PC \cap AN = \{G\}$  demonstrați că  $AQ = QG = GN$ .
- Demonstrați că dreptele  $AN, EM$  și  $PC$  sunt concurente.



6.2

# Teorema lui Thales. Reciproca teoremei lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere date

## L1 Teorema lui Thales

### Ne amintim

- 1) Distanța dintre două drepte paralele este distanța de la un punct oarecare al uneia dintre ele la cealaltă dreaptă.
- 2) Mai multe drepte paralele sunt echidistante dacă distanța între oricare două drepte „vecine” este aceeași.

**Exemplu:** Rețeaua de pătrate a unei pagini din caietul de matematică ne permite să considerăm liniile horizontale ca fiind drepte paralele echidistante.

Desenăm un triunghi  $ABC$  astfel încât  $A$  să aparțină unei drepte orizontale, iar  $B$  și  $C$  să aparțină, ambele, altei drepte orizontale.

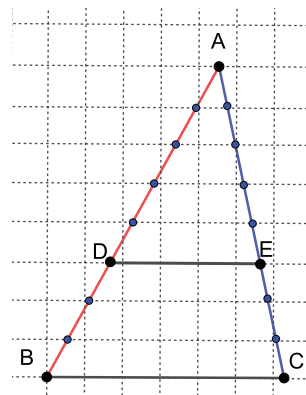
O a treia dreaptă orizontală intersectează laturile  $AB$  și  $AC$  în  $D$  respectiv în  $E$ .

Rețeaua de linii orizontale ale paginii caietului determină pe segmentele  $AD$  și  $AE$  același număr  $p$  de segmente congruente. La fel se întâmplă și cu segmentele  $DB$  și  $EC$ , care sunt împărțite de rețeaua orizontală, fiecare, în  $q$  segmente congruente.

Lungimea fiecărui segment determinat pe  $AB$  de rețeaua de linii orizontale este aceeași; o vom nota cu  $u$ . Atunci,  $AD = p \cdot u$ , iar  $DB = q \cdot u$ . Același raționament este valabil pentru  $AC$ , unde notăm lungimea fiecărui segment determinat de rețeaua de drepte orizontale cu  $v$  și obținem  $AE = p \cdot v$  iar  $EC = q \cdot v$ .

Observăm că  $\frac{AD}{DB} = \frac{p \cdot u}{q \cdot u} = \frac{p}{q}$ , iar  $\frac{AE}{EC} = \frac{p \cdot v}{q \cdot v} = \frac{p}{q}$ , deci  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ .

În cazul din figură,  $p = 5$  și  $q = 3$ .



### Puțină istorie

**Thales din Milet** (623 – 546 î. Hr), filozof grec, considerat părinte al științelor, a avut contribuții importante în matematică, astronomie, filozofie.

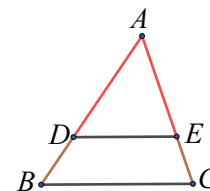


### Teorema lui Thales

O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.

Cu notațiile din figură, pentru triunghiul  $ABC$ , teorema lui Thales se scrie:

$$\text{Dacă } D \in AB, E \in AC \text{ și } DE \parallel BC, \text{ atunci } \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}.$$



### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Aplicația 1:** Rezultatul teoremei rămâne valabil și pentru cazurile când paralela la una din laturi intersectează dreptele suport ale celorlalte laturi în exteriorul laturilor.

Vom demonstra această afirmație.

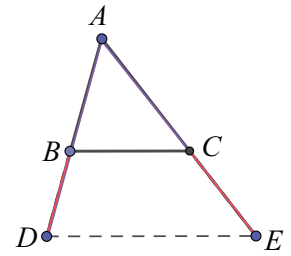
Fie triunghiul  $ABC$ , oarecare. Dreapta  $d$  este paralelă cu  $BC$  și intersectează dreptele  $AB$  și  $AC$  în punctele  $D$  respectiv  $E$ , astfel încât  $D$  și  $E$  nu aparțin segmentelor  $AB$ , respectiv  $AC$ .



Sunt posibile următoarele cazuri:

1) **Punctul  $B$  aparține segmentului  $AD$  și punctul  $C$  aparține segmentului  $AE$ .** Aplicând Teorema lui Thales în triunghiul  $ADE$ , pentru paralela  $BC$ , obținem

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}, \text{ iar cu proporții derivate, } \frac{AB + BD}{BD} = \frac{AC + CE}{CE}, \text{ adică } \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}.$$



2) **Punctul  $A$  este pe segmentul  $BD$  și pe segmentul  $EC$ .**

Fie  $M$  simetricul punctului  $D$  față de  $A$  și  $N$  simetricul punctului  $E$  față de  $A$ .

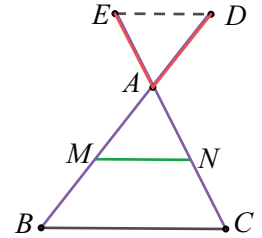
Atunci,  $MA = AD$  și  $NA = AE$  și triunghiurile  $AMN$ ,  $ADE$  sunt congruente (L.U.L).

Din congruența unghiurilor  $AMN$  și  $ADE$ , rezultă  $MN \parallel ED$ .

Dar  $ED \parallel BC$ , deci  $MN \parallel BC$ . Aplicăm teorema lui Thales pentru triunghiul  $ABC$  cu paralela  $MN$ , la latura  $BC$ .

$$\text{Avem } \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}, \text{ iar cu proporții derivate, } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \text{ sau } \frac{DA}{AB} = \frac{EA}{AC},$$

$$\text{apoi } \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}.$$



Cele trei rezultate conduc, împreună, la următoarea formulare a teoremei lui Thales:

*O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi, sau pe prelungirile lor, segmente proporționale.*

**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

**Aplicația 2: Teorema Bisectoarei.** Se consideră un triunghi  $ABC$ ,  $AB$  și  $AC$  având lungimi diferite,  $AD$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAC$ ,  $D \in BC$ .

$$\text{Demonstrați că } \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}.$$

**Soluție:** Construim paralela prin vârful  $B$  la dreapta  $AD$  și notăm cu  $E$  punctul de intersecție cu dreapta  $AC$ . Considerăm dreptele paralele  $AD$  și  $EB$  cu secanta  $AC$ , apoi cu secanta  $AB$ . Atunci,  $\sphericalangle BEA \equiv \sphericalangle DAC$  (corespondente) și  $\sphericalangle EBA \equiv \sphericalangle BAD$  (alterne interne).

Dar,  $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DAC$  ( $AD$  este bisectoare). Rezultă  $\sphericalangle BEA \equiv \sphericalangle EBA$ , deci triunghiul  $ABE$  este isoscel cu baza  $EB$ , adică  $AE \equiv AB$ . (1)

Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul  $CEB$ , cu paralela  $AD$  la latura  $EB$ .

$$\text{Obținem } \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AE} \text{ care, folosind (1), devine } \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}.$$

**Observație:** Pentru cazul  $AB \equiv AC$ , triunghiul  $ABC$  este isoscel, deci bisectoarea  $AD$  este și mediană, ceea ce arată că  $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = 1$ .

**Aplicația 3:** Fie  $ABCD$  trapez și  $O$  intersecția diagonalelor sale. Demonstrați că punctul  $O$  determină pe diagonale segmente proporționale.

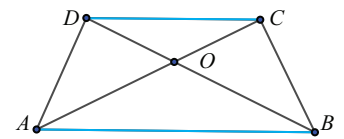
**Soluție:** Fie trapezul  $ABCD$  cu bazele  $AB$ ,  $CD$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ .

Segmentele determinate de  $O$  pe diagonale sunt  $OA$ ,  $OC$  și  $OB$ ,  $OD$ , despre care trebuie să arătăm că sunt proporționale.

Considerăm triunghiul  $OAB$ , cu  $C \in AO$ ,  $D \in BO$  și  $CD \parallel AB$ .

$$\text{Aplicăm teorema lui Thales și obținem } \frac{CO}{CA} = \frac{DO}{DB}.$$

Cu proporții derivate, obținem  $\frac{CO}{OA} = \frac{DO}{OB}$ , apoi  $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ , adică proporționalitatea cerută.





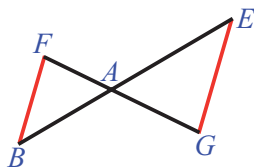


- 1** a) Construiți triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 6$  cm și  $AC = 8$  cm. Fixați un punct  $M$  pe segmentul  $AB$ , astfel încât  $AM = 2$  cm.  
 b) Trasați paralela la  $BC$  prin  $M$  și notați cu  $N$  punctul de intersecție a acesteia cu latura  $AC$ .  
 c) Măsurați  $AN$  cu rigla gradată.  
 d) Calculați, folosind teorema lui Thales, lungimea segmentului  $AN$  și comparați rezultatul cu cel obținut prin măsurare.

- 2** Fie triunghiul  $ABC$ ,  $D \in AB$ ,  $E \in AC$  și  $DE \parallel BC$ . Completați pe caiete spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate:

a)  $\frac{AD}{DB} = \dots$ ; b)  $\frac{EC}{AE} = \dots$ ; c)  $\frac{AE}{AC} = \dots$

- 3** În figura de mai jos, punctele  $F, A, G$ , respectiv  $B, A, E$  sunt coliniare, iar  $FB \parallel EG$ .



Completați pe caiete spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a)  $\frac{FA}{AG} = \dots$ ; b)  $\frac{EA}{AB} = \dots$ ; c)  $\frac{AG}{FG} = \dots$

- 4** Fie un triunghi  $ABC$ . O paralelă la latura  $BC$  intersectează laturile  $AB$  și  $AC$  în punctele  $D$ , respectiv  $E$ , astfel încât  $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{4}$ . Calculați

rapoartele  $\frac{AE}{EC}$ ,  $\frac{AE}{AC}$ ,  $\frac{AC}{EC}$ .

- 5** Pe laturile  $AB$  și  $BC$  ale triunghiului  $ABC$  se consideră punctele  $M$  și  $N$ ,  $MN \parallel AC$ ,  $AM = 2$  cm,  $AB = 6$  cm,  $BC = 9$  cm. Calculați lungimile segmentelor  $BN$  și  $NC$ .

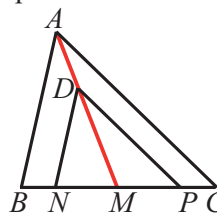
- 6** Dreapta  $d$  este paralelă cu latura  $NP$  a triunghiului  $MNP$  și intersectează prelungirile laturilor  $MN$  și  $MP$  în punctele  $A$ , respectiv  $B$ . Calculați lungimile segmentelor  $AM$  și  $AN$  știind că:

a)  $BM = 3,6$  cm,  $MP = 4,8$  cm și  $MN = 6$  cm.

b)  $\frac{BM}{BP} = \frac{2}{5}$  și  $MN = 15$  cm.

- 7** Fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor trapezului  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AB > CD$  și  $EO \parallel AB$ ,  $E \in AD$ . Se știe că  $\frac{AO}{OC} = \frac{4}{3}$ ,  $DO = 6$  cm,  $DE = 9$  cm. Aflați lungimile segmentelor  $AD$  și  $BD$ .

- 8**  $AM$  este mediană în  $\triangle ABC$ ,  $M \in BC$  și  $D$  un punct situat pe mediana  $AM$ .



- a) Dacă  $DN \parallel AB$  și  $DP \parallel AC$ , cu  $N, P \in BC$ , arătați că  $DM$  este mediană a  $\triangle DNP$ .

b) Dacă  $\frac{AD}{DM} = \frac{1}{2}$  și  $BC = 18$  cm, calculați  $NP$ .

- 9** Punctul  $P$  este situat pe latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ , iar  $PE \parallel AB$ ,  $E \in AC$  și  $PF \parallel AC$ ,  $F \in AB$ . Dacă  $AB = 9$  cm,  $AC = 12$  cm și  $PC = 2BP$ , calculați perimetrul patrulaterului  $AEPF$ .

- 10** În punctul  $A$  de pe cercul  $\mathcal{C}(O, r)$ ,  $r = 5$  cm, se trasează tangenta la cerc și se fixează pe aceasta punctul  $B$ , cu  $AB = 12$  cm.

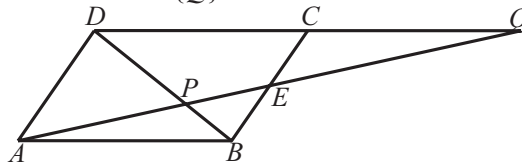
- a) Calculați lungimea segmentului  $OB$ .

- b) Semidreapta  $OB$  intersectează cercul în punctul  $C$  și  $CD \perp OA$ ,  $D \in OA$ . Calculați lungimea segmentului  $OD$ .

- 11** Fie  $ABC$  un triunghi,  $M \in AB$  și  $MN \parallel BC$ ,  $N \in AC$ ,  $MP \parallel AC$ ,  $P \in BC$ .

Arătați că  $\frac{AN}{AC} + \frac{BP}{BC} = 1$ .

- 12** În desenul de mai jos,  $ABCD$  este paralelogram,  $E$  este mijlocul laturii  $BC$  și  $AE \cap BD = \{P\}$ ,  $AE \cap CD = \{Q\}$ .



- a) Arătați că  $AP = 2PE$ .

- b) Arătați că  $AP^2 = PE \cdot PQ$ .



## L2 Reciproca teoremei lui Thales

### Ne amintim

O paralelă la una din laturile unui triunghi determină, pe celelalte două laturi sau pe prelungirile lor, segmente proporționale.

Teorema lui Thales ne oferă o modalitate practică de a demonstra proporționalitatea unor segmente.

Ne întrebăm: *Care ar fi o condiție suficientă ca o dreaptă să fie paralelă cu una din laturile triunghiului?*  
Răspunsul ne este dat în secvența următoare.

Pornind de la o teoremă (numită *teoremă directă*), se poate construi un alt enunț, în care ipoteza conține concluzia teoremei directe, iar concluzia noului enunț este ipoteza teoremei directe (sau o parte a acesteia). Acest enunț se numește *reciproca teoremei directe*. Spus mai sugestiv, dar nu întotdeauna corect, ipoteza și concluzia își schimbă locurile între ele.

Reciproca unei teoreme poate fi adevărată sau falsă. Dacă reciproca este adevărată, atunci se numește *teorema reciprocă* și poate fi folosită în aplicații.

Să detaliem: Cu notațiile din figură, teorema lui Thales și reciproca sa se referă la un triunghi oarecare  $ABC$  și la o dreaptă care intersectează două dintre laturile acestuia, în punctele  $D$  și  $E$ .

### Teorema lui Thales

#### Ipoteza

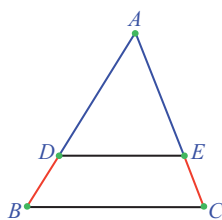
O dreaptă este paralelă cu una din laturile unui triunghi.

$D \in AB, E \in AC$  și  $DE \parallel BC$

#### Concluzia

Segmentele determinate de punctele de intersecție ale dreptei cu celelalte două laturi ale triunghiului sunt proporționale

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



### Reciproca teoremei lui Thales

#### Ipoteza

Segmentele determinate de punctele de intersecție ale unei drepte cu două laturi ale triunghiului sunt proporționale.

$D \in AB, E \in AC$  și  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

#### Concluzia

Dreapta este paralelă cu a treia latură a triunghiului.

$$DE \parallel BC$$

Vom demonstra că reciproca teoremei lui Thales este adevărată. Aceasta ne este de mare ajutor pentru a demonstra că două drepte sunt paralele, în condițiile cunoașterii proporționalității unor segmente.

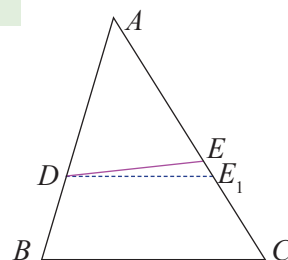
### Reciproca teoremei lui Thales

Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi segmente proporționale, atunci această dreaptă este paralelă cu a treia latură a triunghiului.

*Demonstrație:* Fie  $D$  și  $E$  punctele în care o dreaptă intersectează laturile  $AB$ , respectiv  $AC$  ale triunghiului  $ABC$ , și care determină pe  $AB$ , respectiv  $AC$ , segmente proporționale, adică  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ . (1)

Vom demonstra că dreapta  $DE$  este paralelă cu  $BC$ .

Presupunem, prin reducere la absurd, că  $DE$  și  $BC$  nu sunt paralele. Atunci, există, prin  $D$ , o paralelă  $DE_1$  la  $BC$ ,  $E_1$  fiind punctul de intersecție cu  $AC$ .



Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul  $ABC$  pentru  $DE_1 \parallel BC$  și avem:  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE_1}{E_1C}$ . (2)

Folosind relațiile (1) și (2), rezultă  $\frac{AE}{EC} = \frac{AE_1}{E_1C}$ , apoi  $\frac{AE}{AE + EC} = \frac{AE_1}{AE_1 + E_1C}$  și  $\frac{AE}{AC} = \frac{AE_1}{AC}$ .

Deducem  $AE = AE_1$ , prin urmare punctele  $E$  și  $E_1$  coincid.

Am ajuns la o contradicție, deci presupunerea făcută a fost falsă. În concluzie,  $DE \parallel BC$ .

Rezultatul demonstrat rămâne valabil și în cele două cazuri în care punctul  $D$  se află pe prelungirea laturii  $AB$ , ceea ce implică și despre punctul  $E$  același lucru.

Demonstrația acestor cazuri se face printr-un raționament similar, modificând corespunzător figura.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

#### Aplicație: Reciproca teoremei bisectoarei

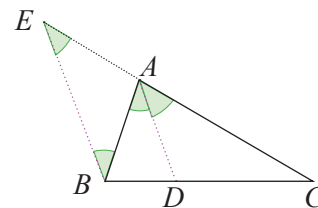
Punctul  $D$  este situat pe latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ , astfel încât  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ . Demonstrați că  $AD$  este bisectoarea unghiului  $A$ .

*Soluție:* Căutăm o modalitate de a aplica teorema de mai sus. Observăm că punctele  $B, D, C$  sunt coliniare. Construim segmentul  $AE$  congruent cu  $AB$  pe prelungirea lui  $AC$ .

Atunci,  $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AC}$ . Relația din ipoteză devine  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AC}$  adică

dreapta  $AD$  determină pe laturile  $CE$  și  $CB$  ale triunghiului  $BCE$  segmente proporționale și, conform reciprocei teoremei lui Thales, dreptele  $AD$  și  $BE$  sunt paralele.

Dreptele paralele  $AD$  și  $BE$  formează cu secanta  $AB$  unghiuri alterne interne congruente,  $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABE$ , iar cu secanta  $AC$ , unghiuri corespondente congruente,  $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle AEB$ . Deoarece triunghiul  $ABE$  este isoscel, cu baza  $BC$ , rezultă  $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle AEB$ , adică,  $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle DAC$ . În concluzie  $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DAC$ , deci  $AD$  este bisectoare a unghiului  $\sphericalangle BAC$ .



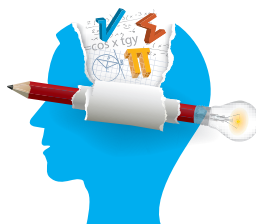
### Temă de portofoliu

Demonstrați că dacă în patrulaterul convex  $ABCD$ , punctul  $O$ , de intersecție a diagonalelor, determină pe acestea segmente proporționale, atunci  $ABCD$  este trapez sau paralelogram.

#### Reținem!



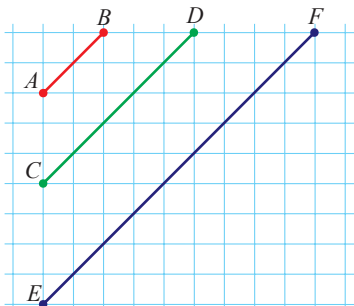
Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi sau pe prelungirile acestora segmente proporționale, atunci ea este paralelă cu a treia latură a triunghiului





**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

- 1** Pe o foaie de matematică sunt desenate segmentele  $AB$ ,  $CD$  și  $EF$  (vezi figura de mai jos).



Demonstrați că dreptele  $AB$ ,  $CD$  și  $EF$  sunt paralele.

- 2** În triunghiul  $ABC$ ,  $M \in AB$ ,  $N \in AC$ . Precizați poziția dreptelor  $MN$  și  $BC$  în următoarele situații:

a)  $AM = 4$  cm,  $AN = 6$  cm,  $MB = 10$  cm,  $NC = 15$  cm.

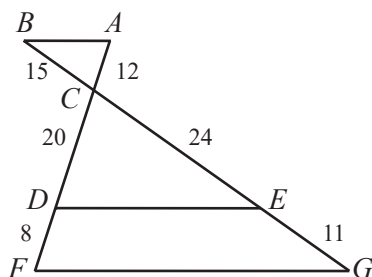
b)  $AB = 15$  cm,  $BM = 9$  cm,  $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$ .

- 3** Pe laturile  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  ale triunghiului  $ABC$  se consideră punctele  $D$ ,  $E$ , respectiv  $F$ , astfel încât  $AD = 3 \cdot BD$ ,  $BC = 4 \cdot BE$  și  $CF = 0,25 AC$ . Arătați că:

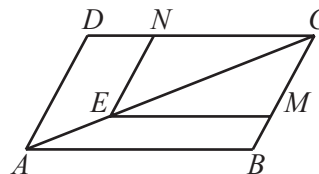
- a) dreptele  $DF$  și  $BC$  sunt paralele.  
b) dreptele  $DE$  și  $AC$  sunt paralele.

- 4** Fie triunghiul  $CDE$ ,  $CD = 20$  cm și  $CE = 24$  cm. Prelungim latura  $CD$  cu segmentele  $AC = 12$  cm și  $DF = 8$  cm. Prelungim latura  $CE$  cu segmentele  $CB = 15$  cm și  $EG = 11$  cm. Precizați dacă propozițiile de mai jos sunt adevărate sau false. Justificați.

- a)  $DE \parallel FG$    b)  $AB \parallel DE$    c)  $AB \parallel FG$



- 5** Punctul  $E$  este situat pe diagonala  $AC$  a paralelogramului  $ABCD$ , iar  $EM \parallel AB$ ,  $M \in BC$  și  $EN \parallel AD$ ,  $N \in CD$ . Arătați că  $MN \parallel BD$ .



- 6** Fie  $D$  mijlocul laturii  $BC$  a triunghiului  $ABC$  și semidreptele  $DE$ ,  $DF$  bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle ADB$ , respectiv  $\sphericalangle ADC$ ;  $E \in AB$ ,  $F \in AC$ . Demonstrați că  $EF \parallel BC$ .

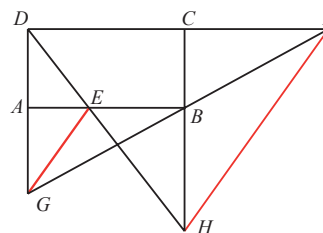
- 7** Se consideră triunghiul  $MNP$  echilateral, cu lungimea laturii de 18 cm și punctele  $R \in MN$ ,  $S \in NP$ , astfel încât  $NR = PS = 12$  cm. Demonstrați că dreapta  $RS$  este paralelă cu bisectoarea unghiului  $\sphericalangle NMP$ .

- 8** Laturile unghiului ascuțit  $xOy$  sunt intersectate de cercurile  $\mathcal{C}_1(O, r_1)$  în punctele  $A$  și  $B$  și de cercul  $\mathcal{C}_2(O, r_2)$ ,  $r_2 > r_1$ , în punctele  $C$  și  $D$ . Demonstrați că  $AB \parallel CD$ .

- 9** În trapezul  $ABCD$ , avem  $AB \parallel CD$ , cu  $E \in AC$ ,  $F \in BC$ ,  $G \in CD$ ,  $AE = 1$  cm,  $AC = 4$  cm,  $BC = 8$  cm,  $CF = 6$  cm.

- a) Arătați că  $EFCG$  este trapez sau paralelogram.  
b) Demonstrați că dacă  $GE \parallel AD$ , atunci  $FG \parallel BD$ .

- 10** Fie punctul  $E$  situat pe latura  $AB$  a dreptunghiului  $ABCD$  și punctul  $F$  situat pe prelungirea laturii  $CD$ , ca în desenul de mai jos. Fie  $\{G\} = AD \cap BF$  și  $\{H\} = DE \cap BC$ . Demonstrați că  $GE \parallel FH$



## L3 Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere date

### Ne amintim

Mai multe paralele echidistante determină pe orice secantă segmente congruente.

Teorema paralelelor echidistante ne oferă o modalitate de împărțire a unui segment într-un număr oarecare de segmente congruente. Aceasta ne-a ajutat să înțelegem teorema lui Thales, care ne conduce către segmente proporționale, determinate de două drepte paralele pe două drepte concurente.

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Ne întrebăm:

- 1) Prin ce relație sunt caracterizate segmentele determinate pe două secante, de mai mult de două drepte paralele?
- 2) Cum putem împărți un segment dat în două sau mai multe părți, între care există proporții date?

**Aplicația 1:** Trei drepte paralele  $d_1, d_2, d_3$  determină pe secantele  $a$  și  $b$  segmente proporționale.

*Demonstrație:* Dreptele  $d_1, d_2, d_3$  intersectează secanta  $a$  în  $A, B$ , respectiv  $C$  și secanta  $b$  în punctele  $D, E$ , respectiv  $F$ .

Vom demonstra egalitatea  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ .

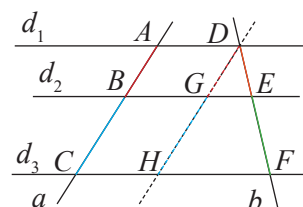
Dorim să găsim un triunghi pentru care una dintre dreptele date să fie paralelă cu o latură a triunghiului.

Prin punctul  $D$  ducem o paralelă la dreapta  $a$ . Aceasta intersectează dreptele  $d_2$  și  $d_3$  în  $G$ , respectiv în  $H$ .

Se formează paralelogramele  $ABGD$  și  $BCHG$ . Într-un paralelogram, laturile opuse sunt congruente, deci  $AB \equiv DG$  și  $BC \equiv GH$ . Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul  $DHF$ , cu  $GE \parallel HF$ ,

și obținem  $\frac{DG}{GH} = \frac{DE}{EF}$ . Apoi, folosind congruențele demonstrate, deducem  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ .

Se obțin rezultate similare pentru orice număr de drepte paralele.



**Aplicația 2:** Horia, prietenul lui Tudor, dorește să realizeze dintr-o șipcă cu lungimea de 3 m, o colivie asemănătoare cu cea a lui Tudor, dar care să nu aibă toate șipcile de aceeași lungime.

Segmentele colorate identic (vezi figura alăturată) au lungimi egale, notate  $L, T, H, C$ .

Se cunosc rapoartele:  $\frac{L}{H} = \frac{H}{T} = 1,6$ , iar  $\frac{C}{L} = 1,2$ . Să-l ajutăm pe Horia să determine

lungimile șipcilor necesare pentru a construi noua colivie.

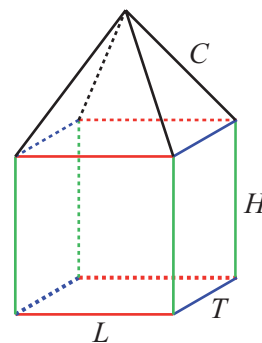
**Rezolvare:** Pentru ușurarea calculului, folosim numere cu o singură zecimală.

Presupunem lățimea  $T$  ca fiind unitatea,  $T = 1$ . Atunci, înălțimea  $H = 1,6$ ;

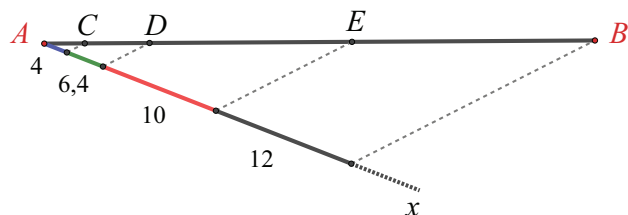
lungimea  $L = 2,5$ , iar pentru acoperiș,  $C = 3$ .

Horia trebuie să obțină din șipca de 300 cm câte patru șipci de lungimi proporționale cu numerele 1; 1,6; 2,5 și 3.

Avem  $4L + 4T + 4H + 4C = 300$  cm.



Va construi un segment  $AB$ , care simbolizează șipca de 300 cm, iar din  $A$ , pe semidreapta  $Ax$ , un segment de lungime  $4 \cdot 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ . În continuarea acestuia, reprezintă un segment de lungime  $4 \cdot 1,6 \text{ cm} = 6,4 \text{ cm}$ , apoi un segment de lungime  $4 \cdot 2,5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$ . În final, reprezintă un segment de lungime  $4 \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$ . Unind capătul ultimului segment cu  $B$  și ducând paralele la acesta, obține punctele  $C, D$  și  $E$ .



$$\text{Avem } \frac{AC}{4} = \frac{CD}{6,4} = \frac{DE}{10} = \frac{EB}{12} = \frac{AC + CD + DE + EB}{4 + 6,4 + 10 + 12} = \frac{300}{32,4} = 9,259... \approx 9,2, \text{ ultimele relații fiind adevărate ca}$$

rezultat al proprietăților unui șir de rapoarte egale.

Deducem dimensiunile segmentelor:  $AC = 36,8 \text{ cm}$ ,  $CD = 59 \text{ cm}$ ,  $DE = 92 \text{ cm}$  și  $EB = 110,4 \text{ cm}$ .

Acum putem afla lungimile celor 16 bucăți. Dimensiunile coliviei sunt  $T = AC : 4 = 9,2 \text{ cm}$ ,  $H = CD : 4 = 14,7 \text{ cm}$ ,

$L = DE : 4 \approx 23 \text{ cm}$  și  $C = EB : 4 = 27,6 \text{ cm}$ . Vor fi câte patru șipci pentru fiecare dimensiune.

Aplicația de mai sus ne furnizează un procedeu practic prin care putem împărți un segment dat în segmente proporționale cu numere date.

Pentru a împărți un segment dat  $AB$  în segmente proporționale cu numerele pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , procedăm astfel:

- 1) Construim o semidreaptă  $Ax$  pe care se reprezintă, în această ordine, punctele  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , astfel încât  $AP_1 = a_1, P_1P_2 = a_2, \dots, P_{n-1}P_n = a_n$ .
- 2) Trasăm segmentul  $P_nB$ , apoi construim paralele prin  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  la  $P_nB$ .
- 3) Notăm cu  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  punctele în care dreptele paralele intersectează segmentul  $AB$ .

Se obțin segmentele  $AQ_1, Q_1Q_2, \dots, Q_{n-1}Q_n$ . Acestea sunt proporționale cu numerele date, adică:

$$\frac{AQ_1}{a_1} = \frac{Q_1Q_2}{a_2} = \frac{Q_2Q_3}{a_3} = \dots = \frac{Q_{n-1}Q_n}{a_n} = \frac{AB}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

**Observație:** Algoritmul de mai sus rămâne valabil dacă în loc de șirul  $a_1, a_2, \dots, a_n$  considerăm șirul  $b_1, b_2, \dots, b_n$  proporțional cu el astfel încât construcția punctelor  $P_1, P_2, \dots, P_n$  să poată fi efectuată pe caiet. Motivați!



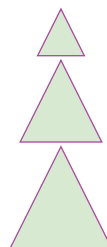
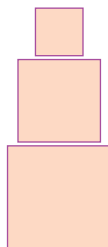
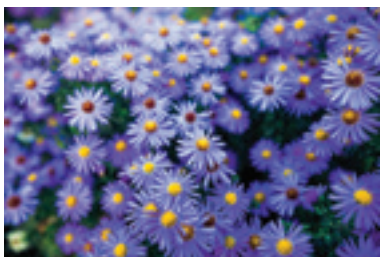
### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1 În triunghiul  $ABC$  se duc paralelele  $DE \parallel FG \parallel BC$ , punctele  $D, F$  situate pe latura  $AB$ , iar punctele  $E, G$  situate pe latura  $AC$ . Dacă  $AE = 4 \text{ cm}$ ,  $AG = 6 \text{ cm}$ ,  $EC = 7 \text{ cm}$ ,  $AB = 22 \text{ cm}$ , aflați lungimile segmentelor  $AD, DF, FB$ .
- 2 Segmentul  $MN$  este linie mijlocie a trapezului  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $M \in AD$ ,  $N \in BC$ , iar  $PQ$  este linie mijlocie a trapezului  $CDMN$ ,  $P \in DM$  și  $Q \in CN$ . Dacă  $AP = 12 \text{ cm}$  și  $NQ = 4 \text{ cm}$ , aflați lungimile segmentelor  $DP, BN$  și  $CQ$ . Stabiliți dacă trapezul  $ABCD$  este isoscel.
- 3 Segmentul  $AB$ , cu lungimea 125 mm, este împărțit de punctul  $P$  în două segmente a căror lungimi sunt direct proporționale cu numerele 5 și 7,5. Calculați lungimile segmentelor  $AP$  și  $PB$ .
- 4 Punctele  $A, B, C, D, E$  sunt coliniare în această ordine:  $AB = 4 \text{ cm}$ ,  $BC = 5 \text{ cm}$ ,  $CD = 6 \text{ cm}$ ,  $DE = 7 \text{ cm}$ . Prin aceste puncte, se construiesc drepte paralele care intersectează o dreaptă  $d \neq AB$  în punctele  $M, N, P, Q$ , respectiv  $R$ . Calculați lungimile segmentelor  $MN, PQ, NR$  în următoarele situații:  
a)  $MR = 33 \text{ cm}$     b)  $NP = 2,5 \text{ cm}$
- 5 Fie  $A$  și  $B$  puncte interioare segmentului  $MN$ ,  $MB > MA$  și  $MN = 0,51 \text{ m}$ . Aflați lungimile segmentelor  $MA, AB, BN$ , știind că lungimile lor sunt exprimate în centimetri prin numere naturale, direct proporționale cu trei numere naturale consecutive, ordonate crescător.





## L1 Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării



Despre două obiecte spunem că sunt *asemănătoare* dacă au *trăsături / proprietăți comune*. Arcul de Triumf din Paris are elemente arhitecturale comune cu Arcul de Triumf din București, mânzul are trăsături comune cu părinții, florile plantei din imagine seamănă foarte bine, fără a fi identice.

Figurile geometrice din desenele de mai sus se aseamănă, dar nu sunt congruente. Dimensiunile lor diferă. Proprietățile figurilor geometrice se referă, de obicei, la numărul și la măsurile laturilor, ale unghiurilor, deci asemănarea a două figuri geometrice se referă la proprietățile acestor elemente.

Să observăm triunghiurile: remarcăm faptul că sunt echilaterale, deci au toate unghiurile congruente, dar laturile celor trei triunghiuri nu sunt congruente, acestea sunt din ce în ce mai mici.

Uneori, dimensiunile unor obiecte fiind mari, este nevoie să realizăm un *model* de dimensiuni mai reduse, dar care să păstreze unele proprietăți.

**Exemplu:** Dorim să amenajăm în curte un spațiu de joacă în formă de triunghi dreptunghic, cu o catetă de dimensiune 4 m, cealaltă catetă fiind de 2 m. Pentru a stabili detaliile, avem nevoie de imaginea terenului respectiv, de o schiță. Nu se poate desena pe foaia de caiet un triunghi atât de mare! Vom realiza o figură geometrică asemănătoare cu cea reală, un triunghi în care o catetă are lungimea egală cu dublul lungimii celeilalte catete.

### Ne amintim

Două triunghiuri sunt congruente dacă au toate laturile și toate unghiurile respectiv congruente.

Două triunghiuri sunt congruente dacă, prin suprapunere, coincid.

Cazurile (criteriile) de congruență ne oferă modalități prin care demonstrăm că două triunghiuri sunt congruente, folosind doar trei dintre cele șase perechi de congruențe ale unghiurilor, respectiv ale laturilor unui triunghi.

Raportul a două segmente este raportul lungimilor acestora, exprimate în aceeași unitate de măsură.



## Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Cazul de congruență L.L.L. ne demonstrează că nu există perechi de triunghiuri care să aibă toate laturile respectiv congruente, iar unghiurile să nu fie congruente.

Ne întrebăm: *Există perechi de triunghiuri care au toate unghiurile respectiv congruente, fără ca laturile să fie congruente?*

**Problemă practică:** Pentru rezolvarea acestei probleme, veți lucra în echipe de câte 2 elevi.

Aveți nevoie de: hârtie, creion, instrumente geometrice, foarfece.

1) Fiecare membru al echipei va desena unul din triunghiurile:

$\triangle ABC$ , cu  $\sphericalangle A = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 60^\circ$ ,  $AB = 8$  cm;

$\triangle MNP$ , cu  $\sphericalangle M = 40^\circ$ ,  $\sphericalangle P = 80^\circ$ ,  $MN = 4$  cm.

2) Măsurăți cu rigla gradată laturile  $AC$  și  $BC$ , respectiv  $MP$  și  $NP$ .

3) Copiați pe caiete tabelul următor și completați rezultatele obținute prin măsurare.

$AB$	$MN$	$\frac{AB}{MN}$	$AC$	$MP$	$\frac{AC}{MP}$	$BC$	$NP$	$\frac{BC}{NP}$
8 cm	4 cm	2						

4) Decupați cele două triunghiuri.

5) Suprapuneți laturile unghiului  $M$  ale triunghiului mai mic peste laturile unghiului  $A$  ale triunghiului mai mare, respectând ordinea de scriere: semidreapta  $MN$  cu semidreapta  $AB$  și semidreapta  $MP$  cu semidreapta  $AC$ .

Cu cele două triunghiuri realizate și cu tabelul completat, să observăm următoarele:

a) Se pot construi o infinitate de triunghiuri astfel încât să aibă unghiurile respectiv congruente cu cele ale triunghiului  $ABC$ , iar laturile să fie de lungimi diferite de cele ale  $\triangle ABC$ .

b) Oricare două triunghiuri de acest fel au laturile corespunzătoare respectiv proporționale.

**Definiție:** Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile respectiv congruente și laturile corespunzătoare lor respectiv proporționale.

Valoarea comună a raportului a două laturi corespunzătoare se numește *raport de asemănare*.

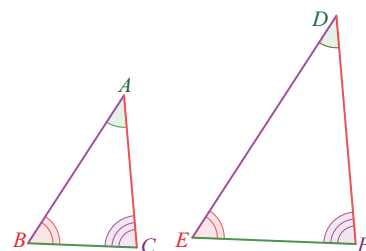
În cazul problemei practice precedente, raportul de asemănare este  $\frac{AB}{MN} = 2$

Pentru triunghiurile asemenea  $ABC$  și  $DEF$ , vom scrie:  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

Să explicăm definiția folosind notațiile din figura alăturată.

Unghiurile celor două triunghiuri  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ ,  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$ ,  $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$  sunt respectiv congruente.

Laturile celor două triunghiuri sunt respectiv proporționale.  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$



**Observație:** Ordinea în scrierea asemănării păstrează ordinea vârfurilor corespunzătoare.

Ordinea în scrierea proporționalității laturilor păstrează ordinea dată de vârfurile corespunzătoare.

Pentru scrierea corectă a relației de asemănare dintre cele două triunghiuri, este esențial să avem în vedere:

- perechile de unghiurile congruente:  $(\sphericalangle A, \sphericalangle D)$ ,  $(\sphericalangle B, \sphericalangle E)$ ,  $(\sphericalangle C, \sphericalangle F)$ ;
- latura opusă unghiului  $A$ , în triunghiul  $ABC$ , este corespunzătoare laturii opuse unghiului  $D$  în triunghiul  $DEF$ ; în acest fel, obținem perechile de laturi corespunzătoare:  $(AB, DE)$ ,  $(BC, EF)$ ,  $(AC, DF)$ ;
- proporționalitatea laturilor corespunzătoare se va scrie:  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ .

**Proprietăți.**

1) Orice triunghi este asemenea cu el însuși:  $\triangle ABC \sim \triangle ABC$ .

2) Dacă  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , atunci  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ .

3) Dacă  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  și  $\triangle DEF \sim \triangle MNP$ , atunci  $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ .

4) Două triunghiuri asemenea, cu raportul de asemănare egal cu 1, au toate laturile respectiv congruente, deci sunt triunghiuri congruente.

Suntem interesați să găsim construcții geometrice care generează triunghiuri asemenea. Ne ajută, în acest sens, următorul rezultat:

### Teorema fundamentală a asemănării

O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi, sau cu prelungirile lor, un triunghi asemenea cu triunghiul inițial.

*Demonstrație:* Considerăm triunghiul  $ABC$  și dreapta  $d$  paralelă cu  $BC$ . Dreapta  $d$  poate intersecta două laturi ale triunghiului sau prelungirile a două laturi ale triunghiului.

I. Dreapta  $d$  intersectează laturile  $AB$  și  $AC$  în punctele  $D$ , respectiv  $E$ .

Se evidențiază triunghiurile  $ADE$  și  $ABC$  și demonstrăm că sunt asemenea.

a) *Congruențele unghiurilor:* pentru  $DE \parallel BC$ , secantele  $DB$  și  $EC$  determină perechile de unghiuri corespondente congruente  $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$ , respectiv  $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$ .

Unghiurile  $\sphericalangle DAE$  și  $\sphericalangle BAC$  coincid, deci sunt congruente.

b) *Proportionalitatea laturilor:* Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul  $ABC$  cu  $DE \parallel BC$  și rezultă

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ . Construim prin  $E$  paralela la  $AB$  și notăm cu  $F$  punctul în care aceasta intersectează latura  $BC$ .

Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul  $ABC$ , cu  $EF \parallel AB$ , și obținem  $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$ . Patrulaterul  $DEFB$  este

paralelogram, deci  $DE \equiv BF$  și egalitatea rapoartelor devine  $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ . Din cele două egalități rezultă

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ , adică proportionalitatea laturilor.

Am demonstrat că unghiurile triunghiurilor  $ADE$  și  $ABC$  sunt respectiv congruente și laturile sunt respectiv proporționale. Conform definiției, cele două triunghiuri sunt asemenea.

II. Dreapta  $d$  nu intersectează laturile triunghiului, dar intersectează dreptele suport.

a) Punctul  $B$  este situat pe segmentul  $AD$ , punctul  $C$  este situat pe segmentul  $AE$  și  $DE \parallel BC$ . Considerând triunghiul  $ADE$  și dreapta  $BC$  paralelă cu latura  $DE$  a triunghiului  $ADE$ , suntem în condițiile date de cazul I. Aplicând rezultatul demonstrat, se obține congruența unghiurilor și proportionalitatea laturilor, deci asemănarea triunghiurilor.

b) Punctul  $A$  este situat pe segmentele  $BD$  și  $CE$ , iar  $DE \parallel BC$ .

Pentru  $DE \parallel BC$  și secanta  $BD$ , avem  $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$  (alterne interne),

iar pentru  $DE \parallel BC$  și secanta  $CE$ , avem  $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$

(alterne interne). Pe de altă parte,  $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAC$  (opuse la vârf). (1)

Construim  $CF \parallel AD$ ,  $F \in DE$  și  $AG \parallel BC$ ,  $G \in CF$ , deci  $BC \parallel AG \parallel DF$ .

Atunci,  $BCFD$ ,  $AGFD$  și  $BCGA$  sunt paralelograme și au loc relațiile

$DF \equiv BC$ ,  $GF \equiv AD$  și  $GC \equiv AB$ .

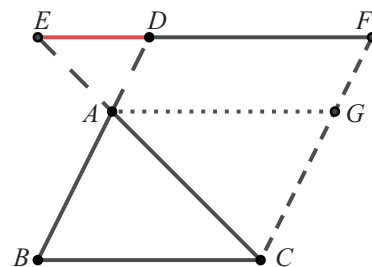
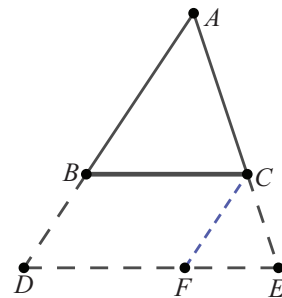
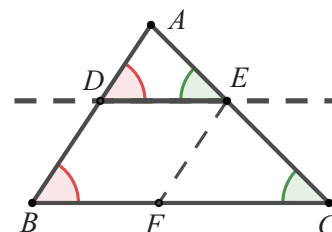
În triunghiul  $CEF$ , avem  $AG \parallel EF$ .

Aplicând teorema lui Thales, obținem  $\frac{AE}{AC} = \frac{GF}{GC}$  sau  $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ .

În triunghiul  $CEF$ , avem  $AD \parallel CF$ .

Aplicând teorema lui Thales obținem:  $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{DF}$  sau  $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ .

În concluzie  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$  și împreună cu congruența unghiurilor date de relațiile (1), se ajunge la  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ .



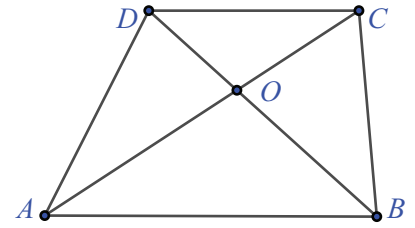
**Aplicația 1:** Fie trapezul  $ABCD$  cu bazele  $AB, CD$  și  $\{O\} = AC \cap BD$ . Arătați că punctul  $O$  împarte diagonalele  $AC$  și  $BD$  într-un raport egal cu raportul bazelor trapezului.

**Soluție:** Considerăm triunghiul  $OAB$ , cu  $DC \parallel AB$ .

Teorema fundamentală a asemănării ne asigură:  $\triangle OCD \sim \triangle OAB$ .

Proporționalitatea laturilor triunghiurilor conduce la  $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$ ,

adică se demonstrează că punctul  $O$  împarte diagonalele în raportul  $\frac{CD}{AB}$ .



**Aplicația 2:** Fie trapezul  $ABCD$ ,  $AB \parallel DC$  și  $\{O\} = AC \cap BD$ . Paralela prin  $O$  la baze intersectează laturile neparalele  $AD$  și  $BC$  în  $E$ , respectiv în  $F$ .

Demonstrați că  $O$  este mijlocul segmentului  $EF$ .

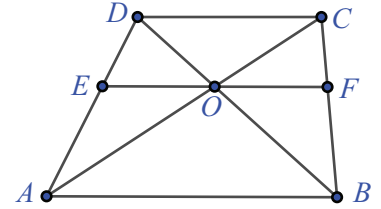
**Soluție:** Avem de comparat segmentele  $OE$  și  $OF$ . Acestea sunt situate pe dreapta  $EF$ , paralelă cu  $AB$ . Conform teoremei fundamentale a asemănării,

$\triangle DEO \sim \triangle DAB$ , deci  $\frac{DE}{DA} = \frac{DO}{DB} = \frac{EO}{AB}$ , iar  $\triangle COF \sim \triangle CAB$ , deci

$\frac{CO}{CA} = \frac{CF}{CB} = \frac{OF}{AB}$ . Dar  $\triangle COD \sim \triangle AOB$  (aplicația 1) și  $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}$ , care prin

proporții derivate devine  $\frac{OC}{AC} = \frac{OD}{BD}$ . Comparând primele două șiruri de rapoarte egale cu ultima proporție,

rezultă  $\frac{EO}{AB} = \frac{OF}{AB}$ , ceea ce este echivalent cu  $EO \equiv OF$ , adică  $O$  este mijlocul segmentului  $EF$ .



### Reținem!

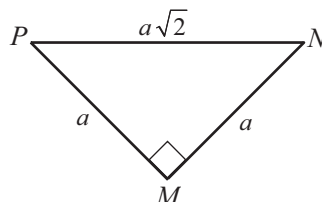
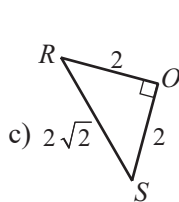
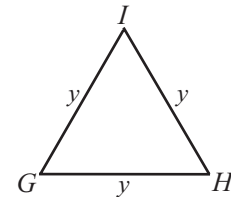
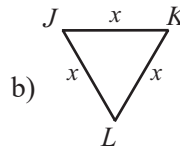
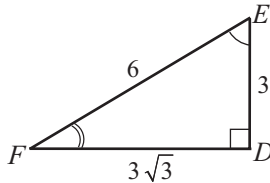
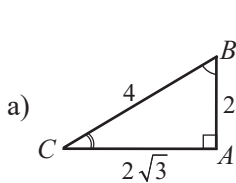


- Două triunghiuri sunt asemenea dacă au unghiurile respectiv congruente și laturile corespunzătoare lor respectiv proporționale.
- O paralelă la una din laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi, sau cu prelungirile lor, un triunghi asemenea cu triunghiul inițial.



### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

**1** Folosind definiția, arătați că următoarele perechi de triunghiuri sunt asemenea. Scrieți, pentru fiecare pereche, relațiile între laturi, respectiv relațiile între unghiuri.



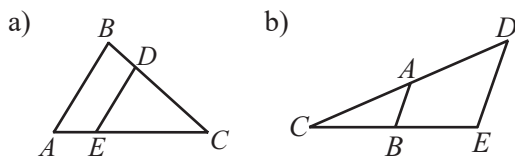
- 2** Se știe că  $\triangle ABC$  este asemenea cu  $\triangle DEF$ .
- Dacă  $AB = 4$  cm,  $BC = 5$  cm,  $EF = 7,5$  cm,  $DF = 9$  cm calculați  $AC$  și  $DE$ .
  - Dacă  $\sphericalangle A = 30^\circ$  și  $\sphericalangle F = 70^\circ$ , aflați măsurile unghiurilor  $\sphericalangle B$ ,  $\sphericalangle C$ ,  $\sphericalangle D$ ,  $\sphericalangle E$ .
  - Dacă  $AB = 15$  cm,  $BC = 24$  cm,  $AC = 18$  cm și  $\mathcal{P}_{\triangle DEF} = 76$  cm, calculați lungimile segmentelor  $DE$ ,  $EF$ ,  $FD$ .

**3** Dacă  $\triangle ABC \sim \triangle MNP$ ,  $AB = 8$  cm,  $MN = 6$  cm,  $NP = 9$  cm,  $PM = 12$  cm, calculați perimetrul triunghiului  $ABC$ .

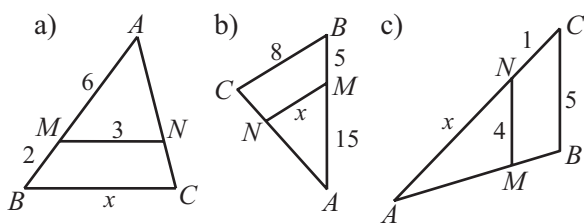
**4** Dacă  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ,  $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 80^\circ + \sphericalangle B$  și  $\sphericalangle D = 65^\circ$ , calculați măsurile unghiurilor triunghiului  $DEF$ .

**5** Se consideră triunghiurile asemenea  $\triangle GEO$  și  $\triangle MAT$  având raportul de asemănare  $k = \frac{2}{5}$ . Se știe că  $GE = 4$  cm,  $GE + 2EO = 13,6$  cm și  $\frac{1}{4}GE + \frac{1}{3}EO + OG = 7,8$  cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului  $\triangle MAT$ .

**6** În desenele de mai jos, avem  $DE \parallel AB$ . Scrieți egalitatea rapoartelor obținută prin aplicarea teoremei fundamentale a asemănării.

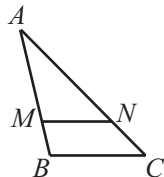


**7** Se consideră triunghiul  $ABC$ ,  $M \in AB$ ,  $N \in AC$  și  $MN \parallel BC$ . Aflați valoarea numărului  $x$  în fiecare din cele trei situații desenate.



**8** În figura alăturată, avem  $\triangle ABC$ ,  $M \in AB$ ,  $N \in AC$  și  $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ACB$ .

- Arătați că  $\triangle AMN$  și  $\triangle ABC$  sunt asemenea. Scrieți egalitatea rapoartelor care se obțin aplicând teorema fundamentală a asemănării.
- Dacă  $\sphericalangle AMN + \sphericalangle ACB = 134^\circ$ , aflați măsura unghiului  $\sphericalangle BAC$ .



**9** Pe laturile  $DE$  și  $DF$  ale triunghiului  $DEF$  se consideră punctele  $A$ , respectiv  $B$ , astfel încât  $\frac{AD}{AE} = \frac{3}{5}$  și  $\frac{BF}{DF} = \frac{5}{8}$ .

- Arătați că  $AB \parallel EF$ .
- Știind că  $EF = 3,6$  cm aflați lungimea segmentului  $AB$ .

**10** Fie triunghiul  $ABC$  și punctele  $P, Q \in AB$  și  $M, N \in AC$ , astfel încât  $PM \parallel QN \parallel BC$ . Se știe că  $AP = PM = 3$  cm,  $AM = 5$  cm,  $AQ = 7,8$  cm,  $AB = 10,5$  cm.

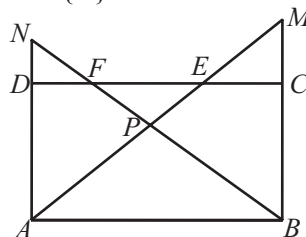
- Calculați lungimile segmentelor  $PQ$ ,  $AN$ ,  $BC$ .
- Calculați perimetrul trapezului  $BCNQ$ .

**11** Fie trapezul  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ ,  $AD \cap BC = \{E\}$  cu  $AB = 7,5$  cm,  $BC = 6$  cm,  $CD = 3$  cm,  $AD = 4,5$  cm. Calculați lungimile segmentelor  $EA$ ,  $EB$ ,  $EC$  și  $ED$ .

**12** În paralelogramul  $ABCD$ , cu  $AB = 12$  cm,  $BC = 6$  cm, se consideră pe latura  $CD$  punctul  $E$  astfel încât  $CE = 3DE$ . Fie  $AE \cap BC = \{F\}$ . Determinați lungimile segmentelor  $EC$  și  $CF$ .

**13** Pe laturile neperalele  $AD$  și  $BC$  ale trapezului  $ABCD$ , se iau punctele  $E$  respectiv  $F$ , cu  $EF \parallel AB$  și  $\frac{AE}{ED} = \frac{2}{7}$ . Știind că  $AB = 24$  cm și  $CD = 6$  cm, calculați lungimea segmentului  $EF$ .

**14** Pe latura  $CD$  a dreptunghiului  $ABCD$ , cu  $AB = 24$  cm,  $BC = 15$  cm, se iau punctele  $E$  și  $F$  cu  $CE = \frac{AB}{3}$ ,  $DF = \frac{CD}{4}$ . Dreptele  $AE$  și  $BF$  se intersectează în punctul  $P$ , iar  $AP \cap BC = \{M\}$ ,  $BP \cap AD = \{N\}$ .



- Calculați lungimile segmentelor  $AN$  și  $BM$ .
- Calculați distanța de la punctul  $P$  la dreapta  $AB$ .

**15** Fie  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ . Construim  $GK \parallel BC$ ,  $K \in AB$ ,  $GL \parallel AC$ ,  $L \in BC$  și  $GM \parallel AB$ ,  $M \in AC$ . Știind că perimetrul triunghiului  $ABC$  este de 18 cm, calculați suma  $GK + GL + GM$ .



## L2 Criterii de asemănare a triunghiurilor

### Ne amintim

Două triunghiuri sunt **congruente** dacă au toate unghiurile respectiv congruente și toate laturile respectiv congruente.

Două triunghiuri sunt **asemenea** dacă au toate unghiurile respectiv congruente și toate laturile respectiv proporționale.

Pentru a arăta congruența a două triunghiuri, folosind definiția, este necesar să demonstrăm toate cele trei congruențe de unghiuri și trei congruențe de laturi. Teoremele numite *cazuri de congruență* ne dau condiții suficiente de congruență a triunghiurilor: (L.U.L); (U.L.U); (L.U.U) și (L.L.L).

Ne propunem să găsim condiții suficiente și pentru relația de asemănare a triunghiurilor.

### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

#### Teorema 1. (cazul de asemănare U.U.)

Dacă două triunghiuri au două perechi de unghiuri respectiv congruente, atunci ele sunt triunghiuri asemenea.

*Demonstrație:* Fie  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DEF$  două triunghiuri cu  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EDF$  și  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ . Singurul indiciu care ne conduce spre triunghiuri asemenea este teorema fundamentală a asemănării.

Ne imaginăm că suprapunem triunghiul  $DEF$  peste triunghiul  $ABC$ , fixând laturile unghiului  $\sphericalangle D$  peste cele ale unghiului  $\sphericalangle A$ .

Această suprapunere ne dă ideea: fixăm punctul  $G$  pe latura  $AB$  (sau pe semidreapta  $AB$ ), astfel încât  $AG \equiv DE$ . Din  $G$  construim segmentul  $GH$ ,  $H \in AC$ , astfel încât  $\sphericalangle AGH \equiv \sphericalangle DEF$ . Astfel, am format triunghiul  $AGH$  congruent cu triunghiul  $DEF$  (U.L.U.). Deci au loc congruențele:  $GH \equiv EF$ ,  $AH \equiv DF$  și  $\sphericalangle AHG \equiv \sphericalangle DFE$ .

Pentru a demonstra că triunghiurile  $ABC$  și  $DEF$  sunt asemenea, este suficient să demonstrăm că sunt asemenea triunghiurile  $ABC$  și  $AGH$ . Din  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$  și  $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle AGH$ , deducem  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AGH$  și cum aceste unghiuri sunt corespondente, formate de dreptele  $GH$  și  $BC$  cu secanta  $AB$ , rezultă  $GH \parallel BC$ .

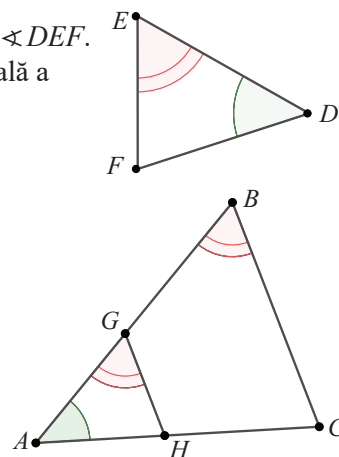
Aplicând teorema fundamentală a asemănării pentru  $\triangle ABC$  cu  $GH \parallel BC$ , obținem  $\frac{AG}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{GH}{BC}$ .

Folosind congruențele laturilor triunghiurilor  $\triangle ABC$  și  $\triangle AGH$ , găsim  $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ , adică proporționalitatea

laturilor triunghiurilor  $\triangle DEF$  și  $\triangle ABC$ . Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este  $180^\circ$ ,

deci  $\sphericalangle DFE = 180^\circ - \sphericalangle DEF - \sphericalangle EDF = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB}$ .

Am demonstrat și congruența unghiurilor triunghiurilor, deci  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ .



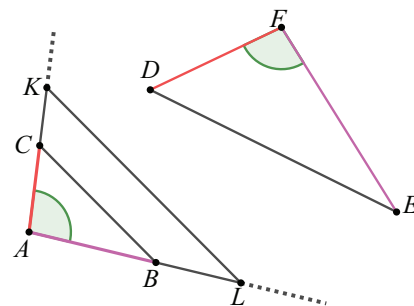
#### Teorema 2. (cazul de asemănare L.U.L.)

Dacă două triunghiuri au o pereche de unghiuri respectiv congruente și laturile care formează aceste unghiuri respectiv proporționale, atunci triunghiurile sunt asemenea.

*Demonstrație:* Considerăm triunghiurile  $ABC$  și  $DEF$ , astfel încât  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EDF$  și laturile care formează aceste unghiuri să fie

proporționale:  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ . Pe semidreptele  $AB$  și  $AC$ , considerăm punctele

$L$ , respectiv  $K$ , astfel încât  $AL \equiv DE$  și  $AK \equiv DF$ .







Proportionalitatea din ipoteză  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$  devine  $\frac{AB}{AL} = \frac{AC}{AK}$ . Aplicăm reciproca teoremei lui Thales pentru triunghiul  $\triangle ABC$  cu punctele  $L$  și  $K$  pe dreptele suport ale laturilor sale și rezultă  $BC \parallel LK$ .

Cu teorema fundamentală a asemănării, rezultă  $\triangle ABC \sim \triangle ALK$ . Obținem  $\frac{AB}{AL} = \frac{AC}{AK} = \frac{BC}{LK}$ , iar din congruențele demonstrate,  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EDF$ ,  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ ,  $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DFE$  și  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ , rezultă că triunghiurile date sunt asemenea și scriem  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

**Teorema 3.** (cazul de asemănare L.L.L.)

Dacă două triunghiuri au toate laturile respectiv proporționale, atunci triunghiurile sunt asemenea.

*Demonstrație:* Pentru triunghiurile  $\triangle ABC$  și  $\triangle DEF$ , are loc  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ .

Pentru a demonstra congruența unghiurilor, alegem pe semidreptele  $AB$  și  $AC$  punctele  $M$ , respectiv  $N$ , astfel încât  $AM \equiv DE$  și  $AN \equiv DF$ . Atunci,  $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$  și, conform reciprocei teoremei lui Thales,  $MN \parallel BC$ .

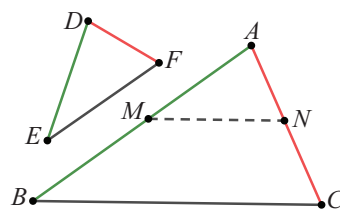
Din teorema fundamentală a asemănării, obținem  $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ ; prin urmare,

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}. \text{ Ținând cont de relațiile } \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \text{ și } AM \equiv DE,$$

deducem că toate cele șase rapoarte precedente sunt egale, deci  $\frac{BC}{MN} = \frac{BC}{EF}$ . Rezultă  $EF \equiv MN$ . Prin urmare,

triunghiurile  $\triangle DEF$  și  $\triangle AMN$  sunt congruente (L.L.L.). Folosind și condiția de congruență a unghiurilor din  $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ , obținem  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle EDF$ ,  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle DEF$  și  $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle DFE$ .

Fiind îndeplinite cerințele din definiția asemănării a două triunghiuri, rezultă  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .



**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

Suntem interesați să găsim construcții geometrice care generează triunghiuri asemenea. Ne ajută, în acest sens, următorul rezultat:

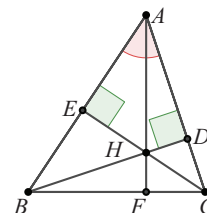
**Aplicația 1:** Fie  $BD$ ,  $CE$  înălțimi ale triunghiului ascuțitunghic  $\triangle ABC$ .

- a) Demonstrați că triunghiurile  $\triangle ADB$  și  $\triangle AEC$  sunt asemenea.
- b) Scrieți congruențele unghiurilor corespunzătoare și proporționalitatea laturilor corespunzătoare pentru cele două triunghiuri.

*Soluție:* a) Fie  $BD$  și  $CE$  înălțimi ale triunghiului  $\triangle ABC$ . Triunghiurile  $\triangle ADB$  și  $\triangle AEC$  au vârful comun  $A$ . Laturile opuse vârfului  $A$  în cele două triunghiuri sunt  $BD$  respectiv  $CE$ ; deci triunghiurile sunt dreptunghice, adică  $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEC = 90^\circ$ . Unghiul din  $A$  este comun, deci  $\triangle ADB \sim \triangle AEC$ .

b) Stabilim corespondența unghiurilor congruente în cele două triunghiuri:

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AEC$  și  $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACE$ . Laturile corespunzătoare,  $(BD, CE)$ ,  $(AB, AC)$  și  $(AD, AE)$  sunt proporționale, deci  $\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ .



**Observație:** Rezultatul aplicației rămâne valabil și pentru perechile de triunghiuri  $(\triangle BDC, \triangle AFC)$ , respectiv  $(\triangle AFB, \triangle CEB)$ .

*Comentariu:* Din prima egalitate de rapoarte, găsim  $BD \cdot AC = CE \cdot AB$ . Din asemănarea triunghiurilor  $AFB$  și  $CEB$ , se obține  $AF \cdot BC = CE \cdot AB$ , adică  $BD \cdot AC = CE \cdot AB = AF \cdot BC$ , egalități care reprezintă un rezultat remarcabil: *într-un triunghi, produsul dintre lungimea unei înălțimi și lungimea laturii opuse este constant*. Dacă notăm  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  lungimile laturilor triunghiului și cu  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  înălțimile corespunzătoare, obținem:  $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$ .

**Observație:** Valoarea produsului obținut mai sus este dublul ariei triunghiului  $ABC$ .

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{BD \cdot AC}{2} = \frac{CE \cdot AB}{2} = \frac{AF \cdot BC}{2}.$$

**Temă de portofoliu**

Demonstrați că rezultatul aplicației de mai sus rămâne valabil și dacă triunghiul este dreptunghic sau obtuzunghic.

**Aplicația 2:** Se consideră triunghiurile echilaterale  $ABE$  și  $BCD$ ,  $B \in AC$ , punctul  $K$  mijlocul laturii  $AE$  și punctul  $L$  mijlocul laturii  $CD$ .

Demonstrați că: a)  $\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BL}$ ; b)  $\triangle ABD \sim \triangle KBL$ .

*Soluție:* a)  $BK$  și  $BL$  sunt mediane în triunghiuri echilaterale, deci sunt și bisectoare:  $\sphericalangle ABK = \sphericalangle CBL = 30^\circ$ . Triunghiurile  $\triangle ABK$  și  $\triangle CBL$  au câte un unghi de  $60^\circ$  și câte unul de  $30^\circ$ . Conform cazului U.U., acestea sunt

triunghiuri asemenea. Rezultă  $\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BL}$ .

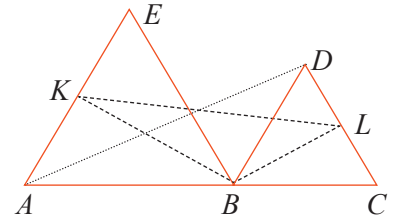
b) Arătăm că triunghiurile  $\triangle ABD$  și  $\triangle KBL$  sunt asemenea. Laturile celor două triunghiuri sunt  $AB, BD, AD$ , respectiv  $KB, BL, KL$ .

Deoarece  $BC = BD$ , relația demonstrată anterior devine  $\frac{AB}{BD} = \frac{BK}{BL}$  sau  $\frac{AB}{BK} = \frac{BD}{BL}$ . Mai avem de demonstrat congruența unghiurilor  $\sphericalangle ABD$  și  $\sphericalangle KBL$ .

$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC - \sphericalangle DBC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ , iar

$\sphericalangle KBL = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABK - \sphericalangle CBL = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ .

Conform cazului de asemănare L.U.L., rezultă  $\triangle ABD \sim \triangle KBL$ .



**Aplicația 3:** Fie  $M$  un punct nesituat pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ . Două secante  $a$  și  $b$  care trec prin punctul  $M$  intersectează cercul în punctele diferite  $A$  și  $B$ , respectiv  $C$  și  $D$ . Arătați că:  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

*Soluție:* Distingem două situații:  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, R)$  și  $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, R)$ .

**I.**  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, R)$ .

Segmentele care formează relația de demonstrat sunt laturi ale triunghiurilor  $\triangle MAD$  și  $\triangle MCB$ . Unghiul  $M$  este comun pentru cele două triunghiuri, iar

$\sphericalangle MDA = \sphericalangle MBC = \frac{\widehat{AC}}{2}$ , fiind unghiuri înscrise în cerc. Conform criteriului de asemănare U.U. rezultă  $\triangle MAD \sim \triangle MCB$ , deci  $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{CB}$ , iar din prima egalitate de rapoarte,  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

**II.**  $M \in \text{Int } \mathcal{C}(O, R)$ .

Considerăm triunghiurile  $\triangle MAC$  și  $\triangle MBD$ , în care  $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BMD$  (opuse

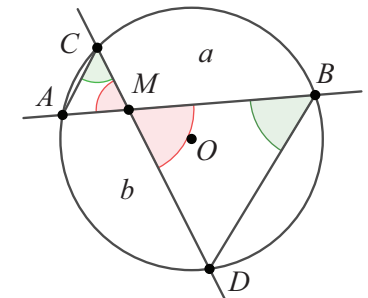
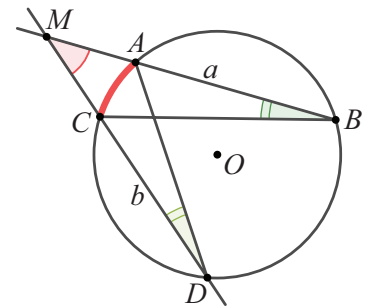
la vârf), iar  $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MBD = \frac{\widehat{AD}}{2}$ , fiind unghiuri înscrise în cerc. Conform

criteriului de asemănare U.U., rezultă  $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ , deci  $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} = \frac{AC}{DB}$ .

Din prima egalitate de rapoarte obținem  $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ .

**Comentariu:** În aplicația precedentă, dreptele  $a$  și  $b$  au fost considerate secante la cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ .

Extindem problema la situația când una dintre drepte sau ambele sunt tangente la cerc.

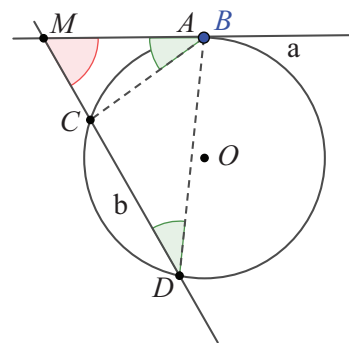


Pentru cazul în care una dintre dreptele care trec prin punctul  $M$  (fie aceasta dreapta  $a$ ) nu ar fi secantă la cerc, ci ar fi tangentă, punctul  $A$  coincide cu punctul  $B$ . Relația de demonstrat devine  $MB^2 = MC \cdot MD$ . Cercetând măsurile unghiurilor triunghiurilor  $\triangle BCM$  și  $\triangle DBM$ , observăm: unghiul  $\sphericalangle M$  este unghi comun,

iar  $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MDB = \frac{\widehat{AC}}{2}$ . Conform criteriului de asemănare U.U., rezultă

$\triangle MBC \sim \triangle MDB$ . Atunci,  $\frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MB} = \frac{BC}{DB}$ , prima egalitate de rapoarte dând

relația  $MB^2 = MC \cdot MD$ .



Dacă ambele drepte sunt tangente la cerc, atunci  $A = B$  și  $C = D$  și relația  $MA^2 = MC^2$  este evidentă, deoarece tangentele dintr-un punct exterior la un cerc sunt congruente.

**Reținem!**



- Conform **definiției**, faptul că triunghiurile  $ABC$  și  $A'B'C'$  sunt asemenea reprezintă verificarea simultană a relațiilor:  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ ,  $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ ,  $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$  și  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ .

• **Cazurile de asemănare** sunt **condiții suficiente** de a demonstra asemănarea triunghiurilor. Pentru demonstrarea asemănării a două triunghiuri cazurile de asemănare reprezintă metode mai eficiente decât definiția.

Din cele șase egalități sau congruențe care apar în definiție, sunt suficiente doar două pentru ca toate celelalte să rezulte.

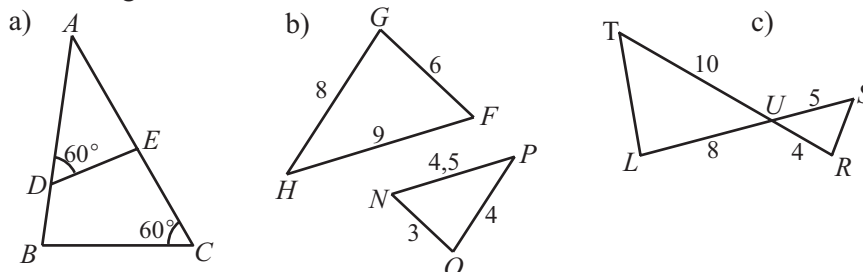
Denumire	Ipoteza	Configurația geometrică	Concluzia
Cazul U.U. (congruența a două unghiuri)	$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$		$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$
Cazul L.U.L. (o congruență de unghiuri și o egalitate de rapoarte)	$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = k$		$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ , $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ $\frac{BC}{B'C'} = k$
Cazul L.L.L. (două egalități de rapoarte)	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$		$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$ $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$



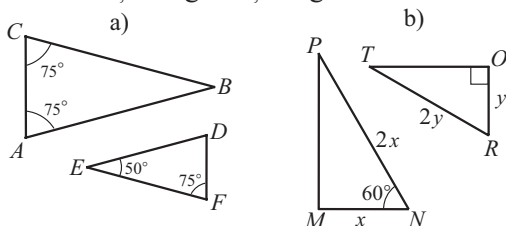


## Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

**1** Numiți triunghiurile asemenea din desenele de mai jos, precizând cazul de asemănare pentru fiecare pereche de triunghiuri.



**2** Arătați că perechile de triunghiuri, reprezentate în figurile de mai jos, sunt asemenea. Scrieți pentru fiecare situație proporționalitatea laturilor și congruența unghiurilor.



**3** Desenați triunghiul isoscel  $ABC$ , cu  $\sphericalangle BAC = 120^\circ$  și punctul  $D$  situat pe latura  $BC$ , astfel încât  $\sphericalangle ADC = 60^\circ$ .

- Arătați că desenul conține două triunghiuri asemenea.
- Demonstrați că  $AB^2 = BC \cdot BD$ .

**4** Fie  $BD$  și  $CE$  înălțimi ale triunghiului  $ABC$ . Demonstrați că  $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ .

**5** Triunghiurile  $\triangle ABC$  și  $\triangle DEF$  sunt asemenea, iar punctele  $M$  și  $N$  aparțin laturilor  $BC$ , respectiv  $EF$ . Arătați că:

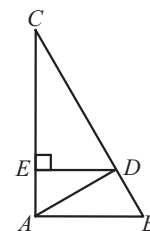
- dacă  $AM$  și  $DN$  sunt mediane, atunci  $\triangle ABM \sim \triangle DEN$ .
- dacă  $AM$  și  $DN$  sunt bisectoare, atunci  $\triangle ACM \sim \triangle DFN$ .
- dacă  $AM$  și  $DN$  sunt înălțimi, atunci  $\frac{AM}{DN} = \frac{BC}{EF}$ .

**6**  $\triangle DEF$  este un triunghi echilateral cu perimetrul de 30 cm.  $DA$  este mediană,  $EB$  este înălțime, iar  $FC$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle DFE$ ,  $C \in DE$ .

- Demonstrați că  $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ .
- Calculați perimetrul patrulaterului  $ABDE$ .

**7** Segmentul  $AD$  este înălțime în triunghiul dreptunghic  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ , iar segmentul  $DE$  este înălțime în triunghiul  $ADC$ .

- Demonstrați că  $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ .
- Demonstrați că  $\triangle ABD \sim \triangle CDE$ .
- Dacă  $AC = 16$  cm,  $CD = 12,8$  cm, calculați lungimile segmentelor  $BC$  și  $EC$ .

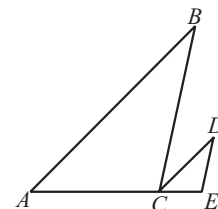


**8** Fie  $ABCD$  un dreptunghi și  $E \in AB$ , astfel încât  $\sphericalangle BCE \equiv \sphericalangle BDC$ .

- Demonstrați că  $BC^2 = BE \cdot CD$ .
- Calculați lungimea segmentului  $AE$ , știind că  $AB = 8$  cm și  $BC = 6$  cm.

**9** În desenul alăturat, avem  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel DE$  și  $AE = 4 \cdot CE$ . Determinați:

- raportul perimetrelor triunghiurilor  $\triangle ABC$  și  $\triangle CDE$ ;
- raportul ariilor triunghiurilor  $\triangle CDE$  și  $\triangle ABC$ .

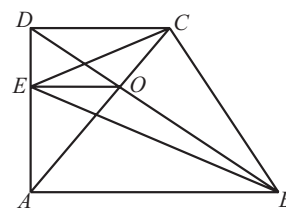


**10** În paralelogramul  $ABCD$ ,  $AE \perp CD$ ,  $E \in CD$  și  $AE \cap BC = \{F\}$ .

Analizând cazurile în care  $\sphericalangle BAD$  este ascuțit sau obtuz, stabiliți dacă triunghiurile  $\triangle ADE$  și  $\triangle FCE$  sunt asemenea.

**11** Se consideră trapezul dreptunghic  $ABCD$ ,  $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ . Paralela la bazele trapezului, prin punctul de intersecție al diagonalelor, intersectează  $AD$  în  $E$ .

- Demonstrați că  $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ .
- Demonstrați că  $EO$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BEC$ .



## L3 Aplicații practice ale asemănării triunghiurilor

Măsurarea obiectelor, chiar și cu ajutorul instrumentelor geometrice, poate conduce la valori aproximative. De multe ori, măsurarea directă este imposibilă, fie din cauza distanțelor foarte mari, fie din cauza obstacolelor care nu permit accesul în apropierea obiectelor.

Thales a aplicat proprietățile geometrice în rezolvarea unor probleme practice de această natură.

Este celebră problema aproximării înălțimii unei piramide folosind umbrele. Thales folosea proprietățile triunghiurilor asemenea pentru a afla distanța de la țărm la o corabie sau distanța dintre două corăbii, el aflându-se pe țărm.

Trebuie menționat faptul că, în aceste situații, valorile obținute sunt aproximative nu din cauza calculelor, folosind aproximări sau estimări ale numerelor, ci din cauza erorilor care pot interveni în stabilirea unor direcții, în măsurarea unor distanțe sau a unor măsuri de unghiuri. De-a lungul timpului, au fost create instrumente performante care apropie foarte mult rezultatele obținute de cele reale. Cu toate acestea, folosirea tehnicilor practice, intuitive, sunt foarte interesante și sunt de mare folos în anumite situații.

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

#### A. Aproximarea distanțelor, în situații practice, folosind asemănarea

##### 1) Aproximarea înălțimii unor obiecte

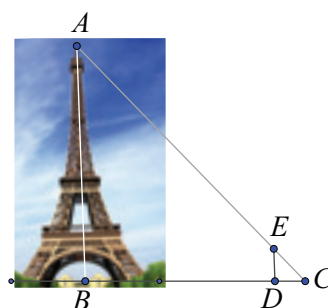
Ne propunem să calculăm înălțimea Turnului Eiffel din Paris. Măsurăm distanța de la centrul bazei turnului la punctul din exterior unde ne aflăm, distanța  $BC = a$ . Plasăm între raza vizuală care merge spre vârf și cea care merge spre punctul de la bază, pe verticală, o mărime cunoscută  $DE = b$  și măsurăm distanța  $DC = c$ .

Avem acum date suficiente pentru a determina înălțimea turnului.

Dreptele  $AB$  și  $DE$  sunt paralele (ambele au direcția verticală) și atunci triunghiurile

$\triangle ABC$  și  $\triangle EDC$  sunt asemenea. Proportionalitatea laturilor este  $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$ , iar  $BC$ ,  $ED$  și  $CD$  sunt cunoscute.

Din  $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$ , aflăm înălțimea turnului:  $AB = \frac{BC \cdot ED}{DC}$  sau  $AB = \frac{a \cdot b}{c}$ .



### Temă de portofoliu

Imaginați-vă că sunteți la Paris, împreună cu prietenul vostru, care are înălțimea de 180 cm. Acesta vă ajută să găsiți înălțimea turnului, plasându-se în poziția  $DE$ . Ați măsurat distanțele  $BC = 540$  m și  $DC = 3$  m. Calculați înălțimea turnului, parcurgând pașii descriși în aplicația de mai sus. (Răspuns:  $H_{\text{turn}} = 324$  m)

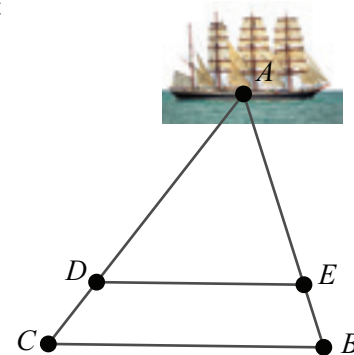
##### 2) Aproximarea distanței până la un punct fix

Suntem într-un punct  $B$  pe plajă și vrem să estimăm distanța până la un vapor aflat în larg, în punctul  $A$ . Cum procedăm? Iată o posibilă variantă în figura alăturată.

Ne deplasăm din punctul  $B$  până în punctul  $C$ , măsurând distanța  $BC$ . Marcăm pe nisip direcțiile  $BA$  și  $CA$ . Pe direcția  $BA$  considerăm punctul  $E$ , prin care ducem o paralelă la  $BC$ . Aceasta intersectează dreapta  $AC$  în  $D$ . Măsurăm lungimile  $BE$  și  $ED$ . În triunghiul  $ABC$ , cu  $DE \parallel BC$ , aplicăm teorema fundamentală a asemănării

și rezultă:  $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC}$ . Din  $\frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$  sau  $\frac{AB - AE}{AB} = \frac{BC - DE}{BC}$  rezultă

distanța până la vapor:  $d = AB = \frac{EB \cdot BC}{BC - DE}$ .

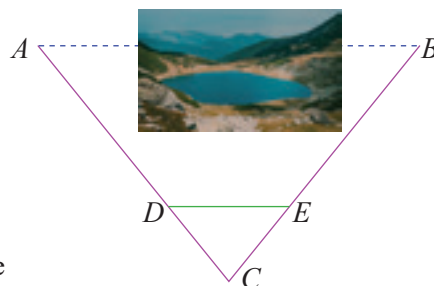


**Temă de portofoliu**

Parcurgeți pașii descriși în rezolvarea aplicației 2, pentru  $BC = 60$  m,  $DE = 58$  m și  $BE = 10$  m.

**3) Aproximarea distanței dintre două puncte**

Ne aflăm într-un punct  $A$  și dorim să calculăm distanța până la punctul  $B$ . Observăm că măsurarea directă este imposibilă din cauza prezenței unui obstacol (figura alăturată). Trebuie să găsim o posibilitate de a determina distanța  $AB$ .



Găsim un punct  $C$  din care putem măsura distanțele  $AC$  și  $BC$ . Trasăm direcțiile  $CA$  și  $CB$ . Dorim să fixăm un segment  $DE$  cu capetele pe  $CA$ , respectiv  $CB$ , astfel încât  $DE$  și  $AB$  să fie paralele. Trebuie ca între punctele  $D$  și  $E$  să nu fie alte obstacole. Vom proceda astfel:

- 1) Alegem punctul  $D$ , pe segmentul  $CA$ .
- 2) Măsurăm lungimile  $CD$ ,  $AC$  și  $BC$ .
- 3) Luăm punctul  $E$  pe segmentul  $CB$  astfel încât  $\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA}$ .
- 4) Măsurăm segmentul  $DE$ .
- 5) Aplicăm reciproca teoremei lui Thales și rezultă  $DE \parallel AB$ .

Teorema fundamentală a asemănării aplicată în  $\triangle ABC$ , conduce la:  $\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$ .

Rezultă  $AB = \frac{CA}{CD} \cdot DE$  și distanța  $AB$  este aflată.

**Exemplu:** Pentru cazul particular  $AC = 15$  m și  $BC = 45$  m, putem alege  $D$ , astfel încât  $CD = 1$  m. Luăm punctul  $E$  pe segmentul  $CB$ , astfel încât  $\frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA}$ , adică  $\frac{CE}{45} = \frac{1}{15}$ . Rezultă  $CE = 3$  m, cu condiția ca măsurarea segmentului  $DE$  astfel obținut să nu fie împiedicată de vreun obstacol. În caz contrar, reluăm alegerea punctului  $D$ , convenabil. Prin măsurare, găsim  $DE = 5$  m. Atunci,  $\frac{5}{AB} = \frac{1}{15} = \frac{3}{45}$ , adică  $AB = 75$  m.

**B. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea**

Știm că în calculul ariei triunghiului intervine lungimea înălțimii. Ne va fi util rezultatul:

**Teorema 1.**

Dacă două triunghiuri sunt asemenea, cu raportul de asemănare  $k$ , atunci:

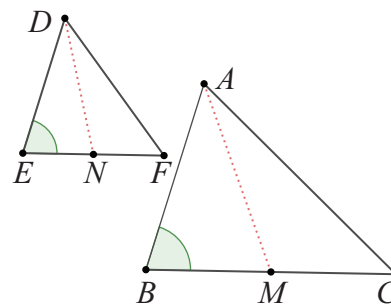
- a) raportul medianelor corespunzătoare este egal cu  $k$ ;
- b) raportul înălțimilor corespunzătoare este egal cu  $k$ ;
- c) raportul bisectoarelor corespunzătoare este egal cu  $k$ .

*Demonstrație:* Fie triunghiurile asemenea  $\triangle DEF$  și  $\triangle ABC$ , cu raportul de asemănare  $k$ .

Atunci:  $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle A$ ,  $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$ ,  $\sphericalangle F \equiv \sphericalangle C$  și  $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$ .

a) Arătăm că raportul dintre medianele din  $D$  și  $A$  este egal cu  $k$ .  
Notăm cu  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $BC$ , respectiv  $EF$ .

Atunci,  $\frac{EN}{BM} = \frac{\frac{EF}{2}}{\frac{BC}{2}} = \frac{EF}{BC} = k$  și  $\frac{DE}{AB} = \frac{EN}{BM}$ .





Din ipoteză  $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$  și conform criteriului L.U.L., obținem  $\triangle DEN \sim \triangle ABM$ ,

deci  $\frac{DN}{AM} = \frac{DE}{AB} = k$ . Am arătat că raportul medianelor corespunzătoare a două

triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare a triunghiurilor.

b) Arătăm că raportul dintre înălțimile din  $D$  și din  $A$  este egal cu  $k$ . Fie  $DN$  și  $AM$  înălțimi în triunghiurile  $\triangle DEF$  și  $\triangle ABC$ . Atunci, cele două triunghiuri au unghiurile drepte  $\sphericalangle DNE$  și  $\sphericalangle AMB$  congruente. Din  $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle B$  și cazul de asemănare U.U., rezultă  $\triangle DEN \sim \triangle ABM$ , deci  $\frac{DN}{AM} = \frac{DE}{AB} = k$ . Am arătat

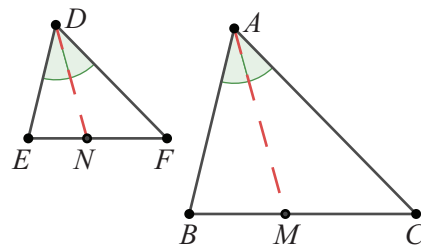
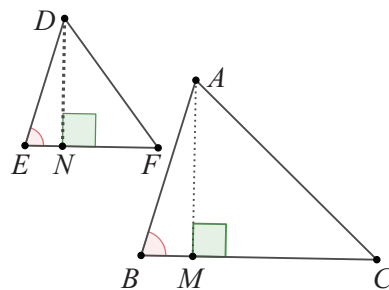
că raportul înălțimilor corespunzătoare a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare al triunghiurilor.

c) Să precizăm, mai întâi, că atunci când vorbim de lungimile bisectoarelor ne referim la lungimile segmentelor determinate de un vârf al triunghiului cu punctul de intersecție a bisectoarei cu latura opusă. Fie  $DN$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle EDF$ ,  $N \in EF$  și  $AM$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BAC$ ,  $M \in BC$ .

Considerând segmentele  $DN$  și  $AM$ , situate pe bisectoare, demonstrăm că raportul lor este  $k$ .

Deoarece  $\sphericalangle BAM = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \frac{\sphericalangle EDF}{2} = \sphericalangle EDN$ ,  $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ , conform cazului de asemănare U.U. rezultă

$\triangle DEN \sim \triangle ABM$ , adică  $\frac{DN}{AM} = \frac{DE}{AB} = k$ .



### Teorema 2.

Dacă două triunghiuri sunt asemenea, cu raportul de asemănare  $k$ , atunci raportul ariilor acestora este  $k^2$ .

*Demonstrație:* Vom folosi figura de la teorema 1. Considerăm triunghiurile asemenea  $\triangle DEF$  și  $\triangle ABC$ , cu raportul de asemănare  $k$ , adică  $\frac{EF}{BC} = k$ . Am arătat în teorema 1 că raportul înălțimilor corespunzătoare este

$$\frac{DN}{AM} = k. \text{ Calculând raportul ariilor, se obține: } \frac{\mathcal{A}_{\triangle DEF}}{\mathcal{A}_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{EF \cdot DN}{2}}{\frac{BC \cdot AM}{2}} = \frac{EF}{BC} \cdot \frac{DN}{AM} = k \cdot k = k^2.$$

Rezultatul demonstrat se poate formula și astfel:

*Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.*

**Aplicația 1:** Triunghiul  $\triangle ABC$  este dreptunghic,  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = 8$  cm,  $AC = 6$  cm. Prelungim segmentul  $AB$  cu  $BD = 1$  cm și fie punctul  $E$  pe semidreapta  $AC$  astfel încât  $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$ .

a) Arătați că triunghiurile  $\triangle ABC$  și  $\triangle AED$  sunt asemenea.

b) Calculați aria triunghiului  $\triangle ADE$ .

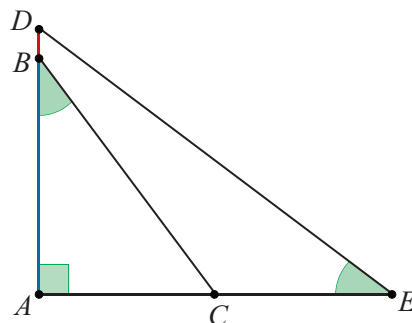
*Soluție:* a) Asemănarea triunghiurilor  $\triangle ABC$  și  $\triangle AED$  este imediată și are loc conform cazului U.U. ( $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle EAD$  unghi comun și  $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ADE$  din ipoteză).

b) Din asemănarea triunghiurilor  $\triangle ABC$  și  $\triangle AED$ , obținem raportul de asemănare

$$k = \frac{AC}{AD} = \frac{AC}{AB + BD} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \text{ Deoarece } \frac{\mathcal{A}_{\triangle ABC}}{\mathcal{A}_{\triangle AED}} = k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\text{și } \mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{se obține } \mathcal{A}_{\triangle AED} = \mathcal{A}_{\triangle ABC} : \frac{4}{9} = 24 \cdot \frac{9}{4} = 54 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



**Aplicația 2:** Fie un triunghi  $ABC$  și un punct  $P$  în interiorul unghiului  $\sphericalangle BAC$ . Dreapta  $AP$  intersectează latura  $BC$  în punctul  $D$ . Atunci:

a)  $\frac{\mathcal{A}_{\triangle ABP}}{\mathcal{A}_{\triangle ACP}} = \frac{DB}{DC}$ ;      b)  $\frac{\mathcal{A}_{\triangle ABC}}{\mathcal{A}_{\triangle PBC}} = \frac{DA}{DP}$ .

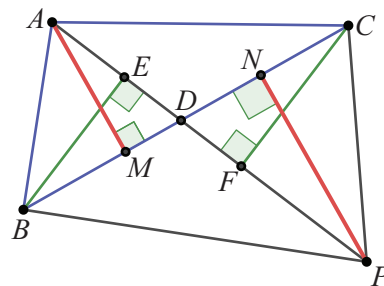
**Soluție:** a) Fie  $BE$ ,  $CF$  înălțimi în triunghiurile  $ABP$ , respectiv  $ACP$ . Triunghiurile  $\triangle BDE$  și  $\triangle CDF$  sunt asemenea deoarece

$\sphericalangle BED \equiv \sphericalangle CFD (90^\circ)$  și  $\sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle CDF$  (opuse la vârf). Atunci  $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{CF}$ .

Se obține  $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{CF} = \frac{BE \cdot AP}{CF \cdot AP} = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABP}}{2 \cdot \mathcal{A}_{\triangle ACP}} = \frac{\mathcal{A}_{\triangle ABP}}{\mathcal{A}_{\triangle ACP}}$ .

b) Fie  $AM$  și  $PN$  înălțimi ale triunghiurilor  $\triangle ABC$  și  $\triangle PBC$ . Triunghiurile  $\triangle ADM$  și  $\triangle PDN$  sunt asemenea, deoarece  $\sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle PND (90^\circ)$  și  $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle PDN$  (opuse la vârf). Atunci  $\frac{DA}{DP} = \frac{AM}{PN}$ .

Se obține  $\frac{DA}{DP} = \frac{AM}{PN} = \frac{AM \cdot BC}{PN \cdot BC} = \frac{2 \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABC}}{2 \cdot \mathcal{A}_{\triangle PBC}} = \frac{\mathcal{A}_{\triangle ABC}}{\mathcal{A}_{\triangle PBC}}$ .



### Aplicația 3

Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $D, E, F$  situate pe laturile  $AB, BC$ , respectiv  $AC$ , astfel încât  $DE \parallel AC$  și  $DF \parallel BC$ . Se știe că aria triunghiului  $ADF$  este  $4 \text{ cm}^2$  și aria triunghiului  $BDE$  este  $9 \text{ cm}^2$ . Calculați aria triunghiului  $ABC$ .

**Soluție:**

Triunghiurile  $ADF$  și  $ABC$  sunt asemenea deci  $\frac{\mathcal{A}_{ADF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{AD^2}{AB^2}$  (1).

Triunghiurile  $BDE$  și  $BAC$  sunt asemenea deci  $\frac{\mathcal{A}_{BDE}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{BD^2}{AB^2}$  sau  $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{BDE}} = \frac{AB^2}{BD^2}$  (2).

Înmulțind relațiile (1) și (2) se obține  $\frac{\mathcal{A}_{ADF}}{\mathcal{A}_{ABC}} \cdot \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{BDE}} = \frac{AD^2}{AB^2} \cdot \frac{AB^2}{BD^2}$ ,  $\frac{\mathcal{A}_{ADF}}{\mathcal{A}_{BDE}} = \frac{AD^2}{DB^2}$

$\frac{4}{9} = \frac{AD^2}{DB^2}$  deci  $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ . Cu proporții derivate deducem că  $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$ .

Din (1) rezultă  $\frac{\mathcal{A}_{ADF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$ ,  $\frac{4}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{4}{25}$ , de unde  $\mathcal{A}_{ABC} = 25 \text{ cm}^2$ .

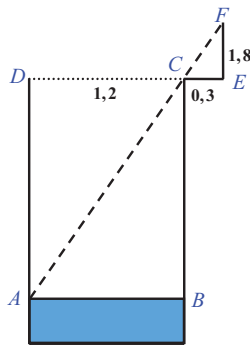
### Reținem!

- Dacă două triunghiuri sunt asemenea, atunci **mediantele** corespunzătoare, **înălțimile** corespunzătoare și **bisectoarele** corespunzătoare determină rapoarte egale cu raportul de asemănare a triunghiurilor.
- Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.



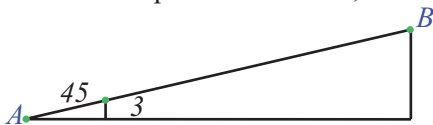


**1** Sandu este în vacanță la bunici. El constată că trebuie făcute reparații la fântâna din grădină și pentru aceasta trebuie să afle adâncimea fântânii până la nivelul apei ( $h = AD$ ). Nu are sfoară atât de lungă, dar este un bun geometru și recurge la o metodă inedită:

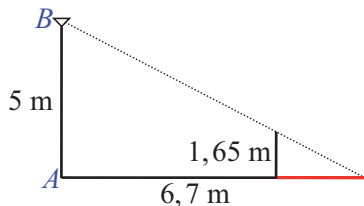


Sandu are 1,8 m înălțime și dacă se apropie la 0,3 m de fântână, el vede suprafața apei. Știe că diametrul fântânii este de 1,2 m și afirmă că acum poate afla (cu aproximație) adâncimea fântânii până la nivelul apei. Observați desenul. Cum a calculat Sandu?

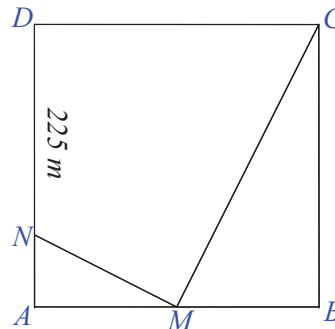
**2** Un funicular cu tracțiune prin cablu transportă minereu și se deplasează în linie dreaptă, pe traseul  $AB$ , lung de 375 m. După ce parcurge, din punctul  $A$ , distanța de 45 m, funicularul a ajuns la înălțimea de 3 m. Calculați înălțimea la care este situat punctul de sosire,  $B$ .



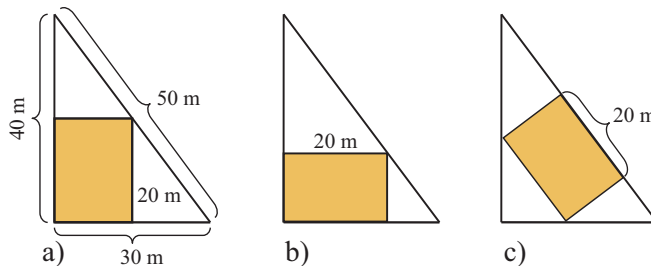
**3** Terenul de joacă din curtea lui Raul este iluminat de un bec, situat pe un stâlp, la înălțimea de 5 m. Raul are înălțimea 1,65 m și se află la 6,7 m de stâlp. Calculați lungimea umbrei lui Raul.



**4** Un centru comercial este construit pe o suprafață pătratică  $ABCD$ , o schiță a acestuia fiind reprezentată în figura alăturată. Suprafața delimitată de triunghiurile  $AMN$  și  $BCM$  este destinată magazinelor, punctul  $M$  fiind mijlocul segmentului  $AB$  și  $MN \perp MC$ . Se știe că  $DN = 225$  m. Calculați suprafața destinată magazinelor.



**5** Vlad dorește să amenajeze un teren de baschet cu lungimea de 20 m. Grădina sa are forma unui triunghi dreptunghic, cu laturile de dimensiuni 30 m, 40 m, 50 m. Constructorul îi prezintă trei variante (figura de mai jos). Vlad a ales varianta în care terenul are cea mai mare suprafață. Care este aceasta?



**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

**I. Asociați fiecărei cifre corespunzătoare enunțurilor din coloana A, litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana B**

	1. În desenul prezentat, $BE \parallel CF \parallel DG$ , $EL \parallel AD$ , $EL \cap CF = \{H\}$ , $HI \parallel FG$ și $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 20$ cm, $AG = 30$ cm, $DG = 24$ cm. Atunci:		
	<b>A</b>	<b>B</b>	
5p	1. $CF =$	a. 3,6 cm	
5p	2. $FG =$	b. 12 cm	
5p	3. $DL =$	c. 4,8 cm	
5p	4. $\mathcal{P}_{HIL} =$	d. 37 cm	
		e. 15 cm	
		f. 18 cm	

**II. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.**

5p	1. În pătratul $ABCD$ , $AB = 6$ cm, $E$ este mijlocul laturii $CD$ , $BE \cap AC = \{F\}$ și $FM \parallel CD$ , $M \in BC$ . Lungimea segmentului $FM$ este: A. 2 cm                      B. 3 cm                      C. 4 cm                      D. 6 cm
10p	2. Prin centrul de greutate al triunghiului echilateral $DEF$ se construiește o paralelă la latura $EF$ , care intersectează laturile $DE$ și $DF$ în punctele $T$ , respectiv $S$ . Dacă $EF = 15$ cm, atunci perimetrul triunghiului $DTS$ este: A. 15 cm                      B. 20cm                      C. 25 cm                      D. 30 cm
5p	3. Pe latura $CD$ a dreptunghiului $ABCD$ se iau punctele $E$ și $F$ , cu $DE = CF = 2$ cm. Dacă $AB = 12$ cm și $AF \cap BE = \{P\}$ . Atunci: A. $AP = 1, (3) \cdot PF$ B. $AP = 1,5 \cdot PF$ C. $AP = 2 \cdot PF$ D. $AP = PF$
5p	4. În triunghiul $ABC$ , $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ , $AB = 30$ cm, $BC = 40$ cm, $AC = 50$ cm și $D \in BC$ , $CD = 0,75 \cdot BC$ . Distanța de la punctul $D$ la dreapta $AC$ este: A. 15 cm                      B. 16 cm                      C. 18 cm                      D. 20 cm

**III. La problemele următoare se cer rezolvări complete.**

	1. În triunghiul $MAB$ , bisectoarele unghiurilor $MAB$ și $MBA$ se intersectează în punctul $I$ , iar paralela prin $I$ la $AB$ intersectează latura $MA$ în punctul $C$ și latura $MB$ în punctul $D$ . Se știe că $MC = 12$ cm, $MA = 18$ cm, $MD = 8$ cm.
5p	a) Calculați lungimea segmentului $BD$ .
10p	b) Arătați că $CI = 6$ cm.
10p	c) Determinați lungimea segmentului $AB$ .
	2. Fie $P$ și $Q$ mijloacele laturilor $BC$ , respectiv $CD$ ale rombului $ABCD$ . Dreapta $AP$ intersectează dreapta $BD$ în punctul $E$ , dreapta $BQ$ intersectează dreapta $AC$ în punctul $F$ și $AC \cap BD = \{O\}$ .
10p	a) Demonstrați că triunghiurile $ADE$ și $PBE$ sunt asemenea.
10p	b) Calculați raportul $\frac{EO}{BD}$ .
5p	c) Demonstrați că dreptele $EF$ și $BC$ sunt paralele.

# 7

# Relații metrice în triunghiul dreptunghic

- 7.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii. Teorema catetei
- 7.2. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora
- 7.3. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta unui unghi ascuțit
- 7.4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic. Aplicații



**Competențe specifice:**

1.7 2.7 3.7 4.7 5.7 6.7

7.1

# Proiecții ortogonale pe o dreaptă. Teorema înălțimii. Teorema catetei

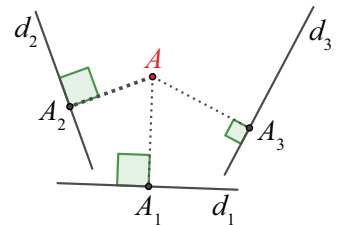
## L1 Proiecții ortogonale pe o dreaptă

**Definiția 1:** Piciorul perpendicularei duse dintr-un punct  $A$ , pe o dreaptă  $d$ , se numește **proiecția ortogonală a punctului  $A$  pe dreapta  $d$**  (sau, pe scurt, **proiecția punctului  $A$  pe dreapta  $d$** ).

Dacă  $M$  este proiecția punctului  $A$  pe dreapta  $d$ , vom scrie  $M = pr_d A$ .  
Se mai citește și „punctul  $M$  este proiecția pe dreapta  $d$  a punctului  $A$ ”

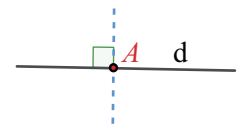
**Exemple:**

- a) Punctul  $A_1$  este proiecția punctului  $A$  pe dreapta  $d_1$  pentru că  $AA_1 \perp d_1$  și  $A_1 \in d_1$ .  
Punctul  $A_2$  este proiecția punctului  $A$  pe dreapta  $d_2$  pentru că  $AA_2 \perp d_2$  și  $A_2 \in d_2$ .  
Punctul  $A_3$  este proiecția punctului  $A$  pe dreapta  $d_3$  pentru că  $AA_3 \perp d_3$  și  $A_3 \in d_3$ .  
Vom scrie  $A_1 = pr_{d_1} A$ ,  $A_2 = pr_{d_2} A$ ,  $A_3 = pr_{d_3} A$ .



În toate aceste exemple, punctul  $A$  este exterior dreptei pe care se proiectează.

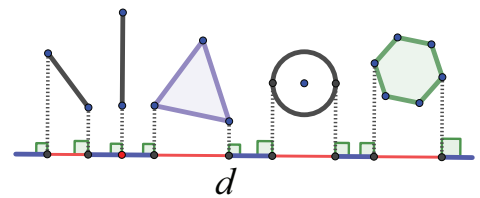
- b) Punctul  $A$  aparține dreptei  $d$ . Piciorul perpendicularei pe dreapta  $d$ , care conține punctul  $A$  este chiar punctul  $A$ , deci proiecția sa pe dreapta  $d$  este punctul  $A$  însuși.



Figurile geometrice sunt mulțimi de puncte, deci putem vorbi despre proiecția ortogonală a unei mulțimi de puncte pe o dreaptă.

**Definiția 2:** Mulțimea proiecțiilor tuturor punctelor unei mulțimi  $F$  pe o dreaptă  $d$  se numește **proiecția mulțimii (figurii) pe dreapta  $d$** .

**Exemple:** În figura alăturată, sunt reprezentate mai multe figuri geometrice, împreună cu proiecțiile lor pe o dreaptă  $d$ .  
Observăm că proiecțiile, reprezentate cu roșu, sunt segmente sau puncte.



**Teorema.**

- 1) Dacă  $AB \not\perp d$ , atunci proiecția segmentului  $AB$  pe dreapta  $d$  este segmentul  $A'B'$ , unde  $A' = pr_d A$  și  $B' = pr_d B$ .
- 2) Dacă  $AB \perp d$ , atunci proiecția segmentului  $AB$  pe dreapta  $d$  este punctul  $A'$ .

**Demonstrație:** Fie segmentul  $AB$  și dreapta  $d$ . Vom considera cazurile:

- 1) Segmentul  $AB$  nu este situat pe o dreaptă perpendiculară pe  $d$ .

Notăm cu  $A'$ ,  $B'$  proiecțiile punctelor  $A$ , respectiv  $B$  pe dreapta  $d$ , evident  $A' \neq B'$ . Vom arăta că proiecția pe  $d$ , a segmentului  $AB$ , este segmentul  $A'B'$ .

Pentru un punct  $M$  oarecare pe segmentul  $AB$ , notăm  $M'$  proiecția sa pe dreapta  $d$ .

Avem  $AA' \parallel BB' \parallel MM'$ , deoarece sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă  $d$ .

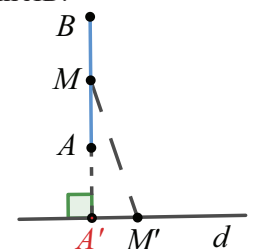
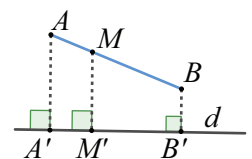
Considerând dreptele  $MM'$  și  $AA'$  paralele, rezultă că  $A$  și  $A'$  sunt de aceeași parte a dreptei  $MM'$ . Analog  $B$  și  $B'$  sunt de aceeași parte a dreptei  $MM'$ . Cum  $A$  și  $B$  sunt de o parte și de alta a dreptei  $MM'$ , rezultă că și  $A'$  și  $B'$  sunt de o parte și de alta a acesteia, adică  $M'$  se găsește pe segmentul  $A'B'$ .

Vom demonstra, de asemenea, că orice punct al segmentului  $A'B'$  este proiecția unui punct din  $AB$ .

Luăm un punct  $M'$  pe segmentul  $A'B'$  în care ridicăm o perpendiculară pe  $d$ . Notăm cu  $M$  punctul în care perpendiculara pe  $d$  intersectează  $AB$ . Relația  $AA' \parallel MM' \parallel BB'$ , conduce la faptul că  $M$  se află între  $A$  și  $B$ , deci aparține segmentului  $AB$ .

- 2) Segmentul  $AB$  este perpendicular pe  $d$ , adică dreptele  $AB$  și  $d$  formează un unghi drept și deci se intersectează într-un punct notat  $A'$ .

Vom arăta că proiecția segmentului  $AB$  pe  $d$  este punctul  $A'$ , adică toate punctele segmentului  $AB$  au aceeași proiecție și anume punctul  $A'$ .





Presupunem că există un punct  $M$  pe  $AB$  astfel încât proiecția sa  $M'$  să nu fie  $A'$ , deci  $M' \neq A'$ . S-ar obține triunghiul  $MA'M'$  cu două unghiuri drepte, ceea ce este fals. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci proiecțiile tuturor punctelor segmentului  $AB$  se suprapun cu punctul  $A'$ . Rezultă că proiecția segmentului  $AB$  pe dreapta  $d$  este punctul  $A'$ .

### Aplicația 1

- a) Proiecția unui segment pe o dreaptă are lungimea cel mult egală cu lungimea segmentului.  
 b) Proiecția mijlocului unui segment pe o dreaptă este mijlocul proiecției segmentului.

**Soluție:** a) Fie  $AB$  un segment oarecare,  $d$  o dreaptă și  $C = pr_d A$ ,  $D = pr_d B$ . Atunci, proiecția segmentului  $AB$  pe dreapta  $d$  este segmentul  $CD$  și scriem  $pr_d AB = CD$ .

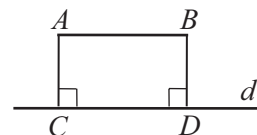
Vom compara lungimile segmentelor  $AB$  și  $CD$ .

Cazul când  $AB \perp d$  este evident, deoarece proiecția segmentului  $AB$  se reduce la un punct,  $C = D$ .

Rămân de analizat cazurile a<sub>1</sub>) când  $AB \parallel d$  și a<sub>2</sub>) când  $AB \not\parallel d$ .

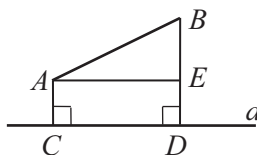
- a<sub>1</sub>) Dacă  $AB \parallel d$ , din  $AC \perp d$ ,  $BD \perp d$  rezultă  $AC \parallel BD$  și  $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC = 90^\circ$ .

Deoarece  $AB \parallel CD$ , rezultă că  $ABDC$  este dreptunghi și  $CD = AB$ .



- a<sub>2</sub>) Dacă dreapta  $AB$  nu este paralelă cu dreapta  $d$ , construim  $AE \perp BD$ ,  $E \in BD$ .

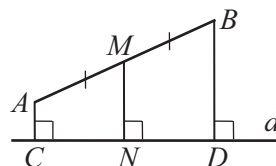
Patrulaterul  $AEDC$  este dreptunghi și  $AE = CD$ . În triunghiul  $ABE$ , cu  $\sphericalangle AEB = 90^\circ$ , lungimea oricărei catete este mai mică decât lungimea ipotenuzei, adică  $AE < AB$  sau  $CD < AB$ .



Din a<sub>1</sub>) și a<sub>2</sub>) rezultă  $CD \leq AB$ .

- b) Cazul  $AB \perp d$  nu trebuie discutat, deoarece  $C = D$ . Rămâne de analizat cazul  $AB \not\perp d$ .

Perpendicularele din  $A$ ,  $M$  și  $B$  pe  $d$  sunt paralele echidistante ( $M$  este mijlocul lui  $AB$ ). Folosind teorema paralelelor echidistante, rezultă că  $N$  este mijlocul lui  $CD$ .



### Aplicația 2

Se consideră paralelogramul  $ABCD$  cu unghiul  $A$  ascuțit, în care diagonala  $BD$  nu este perpendiculară pe latura  $AD$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ . Punctele  $E$  și  $F$  sunt proiecțiile ortogonale ale punctului  $O$  pe laturile  $AB$ , respectiv  $AD$ , iar punctele  $G$  și  $H$  sunt proiecțiile ortogonale ale punctelor  $D$  și  $B$  pe laturile  $AB$ , respectiv  $AD$ .

Demonstrați că  $BE \cdot FH = DF \cdot GE$ .

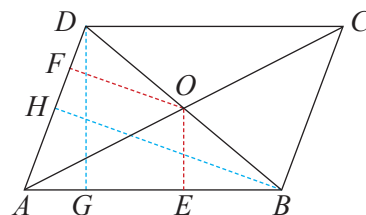
**Soluție:** Din  $E = pr_{AB} O$ ,  $G = pr_{AB} D$  și  $B = pr_{AB} B$ , rezultă: proiecția segmentului  $BD$  pe dreapta  $AB$  este segmentul  $BG$ , iar punctul  $O$ , mijlocul segmentului  $BD$ , se proiectează în  $E$ , mijlocul segmentului  $BG$ . Rezultă  $BE = EG$ . Notăm  $BE = a$ .

$$(1)$$

Din  $F = pr_{AD} O$ ,  $H = pr_{AD} B$  și  $D = pr_{AD} D$ , rezultă: proiecția segmentului  $BD$  pe dreapta  $AD$  este segmentul  $DH$ , iar punctul  $O$ , mijlocul segmentului  $BD$ , se proiectează în  $F$ , mijlocul segmentului  $DH$ . Rezultă  $DF = FH$ .

$$(2)$$

Din relațiile (1) și (2), obținem  $BE \cdot FH = a \cdot b = DF \cdot GE$ .



### Temă de portofoliu

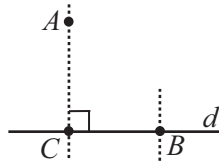
Reformulați și rezolvați **Aplicația 2** pentru cazul când unghiul  $A$  este obtuz.





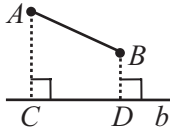
Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1 În figura de mai jos, sunt reprezentate punctele  $A, B, C$  și dreapta  $d$  astfel încât  $A \notin d, B \in d, C \in d$  și  $AC \perp d$ . Copiați pe caiete propozițiile de mai jos, apoi completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.



- Punctul  $C$  este proiecția punctului ... pe dreapta  $d$ .
- Punctul  $B$  este proiecția punctului ... pe dreapta  $d$ .

2 Punctele  $A$  și  $B$  sunt situate de aceeași parte a dreptei  $b$ ,  $AB \not\perp b$ . Dreptele  $AC$  și  $BD$  sunt perpendiculare pe dreapta  $b$ , cu  $C \in b, D \in b$ .



Precizați:  $pr_b A, pr_b B$  și  $pr_b AB$ .

**Observație:** în problemele 2, 3, 4, 9 notația  $pr_d AB$  reprezintă proiecția segmentului  $AB$  pe dreapta  $b$ .

3 Fie punctele  $E, G$  și dreapta  $d$ , astfel încât  $E \notin d$  și  $G \in d$ . Construiți  $EF \perp d, F \in d$ . Precizați:  $pr_d E, pr_d G$  și  $pr_d EG$ .

4 Fie punctele  $A, B$  situate de o parte și de alta a dreptei  $d$  și  $AB \cap d = \{C\}$ .

Fie  $AD \perp d, D \in d$  și  $BE \perp d, E \in d$ .

- Precizați:  $pr_d A, pr_d B, pr_d C, pr_d AB$ .
- Dacă  $C$  este mijlocul segmentului  $AB$ , arătați că  $pr_d C$  este mijlocul segmentului  $DE$ .

5 Desenați într-un sistem de axe ortogonale  $xOy$  punctele  $A(-2; 4), B(0; 3), C(3; -2), D(5; 0)$ , apoi punctele  $A', B', C', D'$  proiecțiile punctelor  $A, B, C$  respectiv  $D$  pe axa  $Ox$ . Precizați coordonatele punctelor  $A', B', C', D'$ .

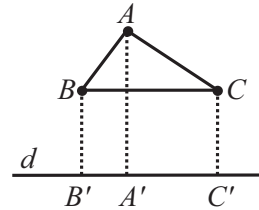
6 Desenați într-un sistem de coordonate  $xOy$  punctele  $A(-3; -4), B(0; 2), C(1; 5), D(3; 0)$ , apoi punctele  $A', B', C', D'$  proiecțiile punctelor  $A, B, C$ , respectiv  $D$  pe axa  $Oy$ . Precizați coordonatele punctelor  $A', B', C', D'$ .

7 Punctul  $P$  este situat în interiorul unghiului  $xOy$ , iar proiecțiile segmentului  $OP$  pe laturile unghiului sunt segmentele congruente  $OA$ , respectiv  $OB$ . Demonstrați că semidreapta  $OP$  este bisectoarea unghiului  $xOy$ .

8 De o parte și de alta a dreptei  $d$  se consideră punctele  $M$  și  $N, d \cap MN = \{O\}$ , iar  $A = pr_d M, B = pr_d N$ . Arătați că:

- Dacă  $OM = ON$ , arătați că  $OA = OB$ .
- Dacă  $OA = OB$ , arătați că  $OM = ON$ .

9 În figura de mai jos, punctele  $A, B, C$  sunt situate de aceeași parte a dreptei  $d$ , cu  $BC \parallel d$ .



Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- $pr_d AB = A'B'$ ;
- $pr_d AC = A'C'$ ;
- $pr_d BC = B'C'$ .

10 Fie triunghiul  $ABC$  și  $AD$  înălțime a acestuia.

a) Construiți și numiți proiecțiile laturilor  $AB$  și  $AC$  pe dreapta  $BC$ , în următoarele situații:

- $\sphericalangle B < 90^\circ$  și  $\sphericalangle C < 90^\circ$ ;
- $\sphericalangle B > 90^\circ$ .

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției „ $BD + DC = BC$ ” pentru fiecare din cele două cazuri de la subpunctul a).

11 Punctele  $A, B, C, D$  sunt coliniare și sunt situate de aceeași parte a dreptei  $d$ , astfel încât  $AB = BC = CD$ , iar punctele  $A', B', C', D'$  sunt proiecțiile punctelor  $A, B, C$ , respectiv  $D$  pe dreapta  $d$ . Arătați că au loc egalitățile:

- $A'B' = B'C' = C'D'$
- $BB' = \frac{AA' + CC'}{2}, CC' = \frac{BB' + DD'}{2}$ ,

$$BB' = \frac{2AA' + DD'}{3}, CC' = \frac{AA' + 2DD'}{3}.$$

## L2 Teorema înălțimii

Alături de triunghiul echilateral, triunghiurile cu un unghi drept, pe care le numim triunghiuri dreptunghice, apar în numeroase aplicații și studii. Cunoștințele despre triunghiul dreptunghic apar încă de la începutul istoriei matematicii, rezultatele descoperite de-a lungul timpului fiind aplicate în multe domenii ale vieții sociale.

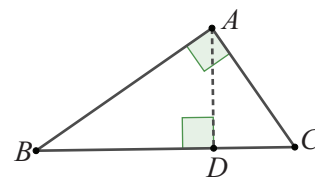
### Puțină istorie

Primele texte matematice descoperite, (2000-1800 I.Hr.), scrise pe tăblițe de argilă de babilonieni (Plimpton 332) sau pe papyrus (Rhind Mathematical Papyrus), vorbesc despre numere care pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic (numere pitagoreice) și despre proprietăți ale triunghiului dreptunghic.

### Ne amintim

Cu notațiile din figura alăturată,  $\triangle ABC$  este dreptunghic în  $A$ , segmentele  $CA$ ,  $BA$  și  $AD$  sunt înălțimile triunghiului, iar punctul  $A$  este ortocentrul acestuia (punctul de intersecție a înălțimilor).

- 1) Catetele unui triunghi dreptunghic sunt înălțimi ale triunghiului.
- 2) Ortocentrul triunghiului dreptunghic este vârful unghiului drept al triunghiului.



### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

#### Teorema înălțimii

Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egală cu media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

*Demonstrație:* Fie triunghiul  $ABC$  dreptunghic, cu  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$  și  $AD$  înălțimea

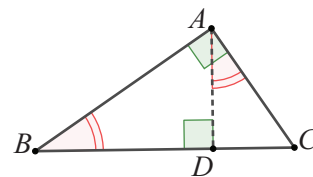
corespunzătoare ipotenuzei. Relația de demonstrat este:  $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$ ,

echivalentă cu  $AD^2 = BD \cdot CD$  sau  $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ , ceea ce ne sugerează că am putea

să o obținem ca rezultat al unui raport de asemănare. Segmentul  $AD$  este latură în triunghiurile  $ADB$  și  $ADC$ .

Deoarece fiecare dintre triunghiuri are câte un unghi drept,  $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ , iar unghiurile  $ABD$  și  $CAD$  sunt congruente (au același complement, unghiul  $BAD$ ), obținem  $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ .

Din proporționalitatea laturilor, rezultă  $\frac{AB}{CA} = \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$ , iar din  $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$ , obținem  $AD^2 = BD \cdot CD$ .



### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

**Aplicația 1:** a) Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic, cu  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ . Calculați  $AD$ , lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei, știind că  $DC = 2,25 \cdot BD$  și  $AD + BC = 57$  cm.

b) Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic cu  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ,  $AD$  este lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei, iar pentru numerele pozitive  $k$  și  $a$  au loc relațiile  $DC = k^2 \cdot BD$  și  $AD + BC = a$ . Calculați lungimea segmentului  $AD$  în funcție de  $a$  și  $k$ .



*Soluție:* a) Notăm  $BD = x$ . Atunci,  $DC = 2,25 \cdot BD = 2,25 \cdot x$ , iar  $BC = BD + DC = x + 2,25 \cdot x = 3,25 \cdot x$ .

În triunghiul  $ABC$  sunt îndeplinite condițiile teoremei înălțimii și obținem

$$AD^2 = BD \cdot DC = 2,25 \cdot x^2 \Rightarrow AD = 1,5 \cdot x.$$

Din ipoteză  $AD + BC = 57 \Rightarrow 1,5 \cdot x + 3,25 \cdot x = 57 \Rightarrow 4,75 \cdot x = 57 \Rightarrow x = 57 : 4,75 = 12$ .

Așadar  $AD = 1,5 \cdot x = 18$  cm.

b) Vom exprima lungimea ipotenuzei  $BC$  în funcție de  $AD$ . Punctul  $D$  aparține ipotenuzei  $BC$ , iar  $BC = BD + DC$ .

Înlocuind  $DC$ , avem  $BC = (k^2 + 1) \cdot BD$ . (1)

În triunghiul dreptunghic  $ABC$  sunt îndeplinite condițiile teoremei înălțimii și se obține  $AD^2 = BD \cdot CD$ ,

apoi egalitățile  $AD^2 = k^2 \cdot BD^2$ ,  $AD = k \cdot BD$ ,  $BD = \frac{AD}{k}$ , iar din relația (1),  $BC = (k^2 + 1) \cdot \frac{AD}{k}$ .

Relația  $AD + BC = a$  devine succesiv:  $AD + (k^2 + 1) \cdot \frac{AD}{k} = a$ , apoi  $AD \cdot \frac{k^2 + k + 1}{k} = a$ , de unde

$$AD = \frac{a \cdot k}{k^2 + k + 1}.$$

Pentru a formula reciproca teoremei înălțimii, să reformulăm teorema înălțimii evidențiind ipoteza și concluzia.

*Reformulare:* Fie  $ABC$  un triunghi și  $AD$  înălțimea corespunzătoare laturii  $BC$ .

Dacă triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$  ( $\sphericalangle A = 90^\circ$ ), atunci  $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$ .

Vom formula reciproca teoremei în același cadru general, adică vorbim tot despre un triunghi  $ABC$  și înălțimea sa  $AD$ .

Ipoteza teoremei directe	Concluzie
Triunghiul $ABC$ este dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90^\circ$	$AD = \sqrt{BD \cdot CD}$

Pentru a stabili dacă reciproca este adevărată, ar trebui să analizăm dacă din relația  $AD = \sqrt{BD \cdot CD}$ , rezultă că triunghiul este dreptunghic în  $A$ .

Vom avea surpriza să constatăm că această implicație nu are loc întotdeauna. Totuși, adăugând o condiție (ipoteză) suplimentară, obținem teorema enunțată în continuare.

### Reciproca teoremei înălțimii

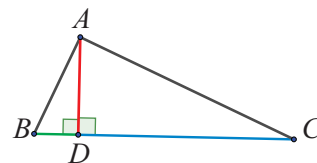
Dacă într-un triunghi  $ABC$ , care nu este triunghi obtuzunghic, lungimea înălțimii  $AD$  este media geometrică a lungimilor proiecțiilor laturilor  $AB$  și  $AC$  pe  $BC$ , atunci triunghiul este dreptunghic.

*Demonstrație:* Considerăm triunghiul  $ABC$  și  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ . Condiția impusă triunghiului face ca  $D$  să fie punct interior al segmentului  $BC$ . Din ipoteză avem

$$AD = \sqrt{BD \cdot CD}, \text{ relație echivalentă cu } AD^2 = BD \cdot CD \text{ sau chiar } \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}.$$

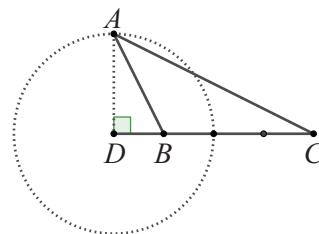
Rapoartele egale ne sugerează alegerea triunghiurilor  $ADB$  și  $CDA$ , care sunt asemenea, conform cazului de asemănare L.U.L., deoarece unghiurile  $ADB$  și  $CDA$  sunt unghiuri drepte, deci congruente.

Deducem congruențele  $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$  și  $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$ . În triunghiul  $ABD$  dreptunghic, unghiurile  $ABD$  și  $BAD$  sunt complementare și, ținând cont de  $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$ , rezultă că  $\sphericalangle CAD$  și  $\sphericalangle BAD$  sunt complementare, adică  $\sphericalangle BAC$  este drept.



**Observație:** Să motivăm interdicția impusă triunghiului  $ABC$  de a nu fi obtuzunghic, printr-un contraexemplu.

Împărțim segmentul  $CD$  în patru părți de lungimi egale și notăm cu  $B$  punctul interior segmentului, cu proprietatea  $CD = 4BD$ . Pe perpendiculara în  $D$  pe dreapta  $BC$ , luăm punctul  $A$ , cu  $AD = 2BD$ .



Au loc relațiile  $\sqrt{BD \cdot DC} = \sqrt{BD \cdot 4 \cdot BD} = 2 \cdot BD = AD$ , iar  $BD$  și  $CD$  sunt proiecțiile laturilor  $AB$  respectiv  $AC$  pe dreapta  $BC$ .

**Concluzie:** Există triunghiuri pentru care înălțimea din  $A$  determină segmente proporționale pe  $BC$ , dar care nu sunt dreptunghice.

**Știați că... ?**

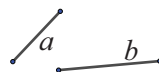
- 1) Contraexemplul este un exemplu care contrazice validitatea unui enunț matematic.
- 2) Pentru a stabili că un enunț matematic este adevărat, este necesară o demonstrație.
- 3) Pentru a stabili că un enunț matematic este fals, este suficient un contraexemplu.

**Aplicația 2:** Se dau două segmente de lungimi  $a$  și  $b$ . Construiți cu rigla și compasul segmente de lungimi  $\frac{a+b}{2}$  și  $\sqrt{a \cdot b}$ , demonstrând, în acest fel, inegalitatea mediilor:  $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ , oricare ar fi numerele pozitive  $a$  și  $b$ .

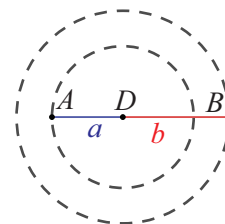
**Soluție:** Am arătat că media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză este chiar înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Atunci, construcția noastră va consta în a găsi un triunghi dreptunghic ce are proiecțiile catetelor pe ipotenuză congruente cu cele două segmente date.

Ne amintim că un unghi drept subîntinde un diametru. Pentru a construi triunghiul dorit, parcurgem următorii pași:

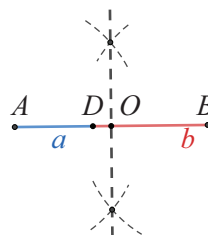
**Stabilirea datelor:** Se dau segmentele de lungimi  $a$  și  $b$ .



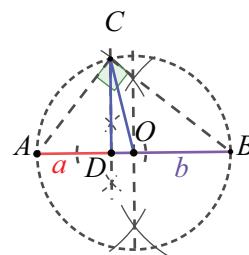
**Pas 1:** Considerăm o dreaptă  $d$  pe care am fixat un punct  $D$  și construim de-o parte și de alta a sa, cu ajutorul compasului, segmente de măsura  $a$  și  $b$ .



**Pas 2:** Determinăm mijlocul  $O$  al segmentului  $AB$  construind cu aceeași deschidere de compas două puncte ce se găsesc pe mediatoarea segmentului  $AB$  (intersecția mediatoarei cu segmentul  $AB$  este chiar mijlocul lui  $AB$ ).



**Pas 3:** Construim semicercul de diametru  $AB$ , cu centrul în  $O$ . Trebuie să ducem în  $D$  o perpendiculară pe  $AB$ . Vom face asta (cu rigla și compasul) construind mediatoarea unui segment cu mijlocul  $D$ . Intersecția perpendicularei în  $D$  cu cercul de diametru  $AB$  este punctul  $C$ . Fiind înscris într-un semicerc, triunghiul  $ABC$  este dreptunghic, iar  $CD$  este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Din teorema înălțimii, avem  $CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{a \cdot b}$ .



Raza  $CO$  este egală cu jumătate din lungimea diametrului, deci  $CO = \frac{AB}{2} = \frac{AD + DB}{2} = \frac{a+b}{2}$ . În orice triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este mai mică decât lungimea ipotenuzei. Triunghiul  $DCO$  este dreptunghic, deci  $DC \leq CO$ , adică  $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ .



**Reținem!**

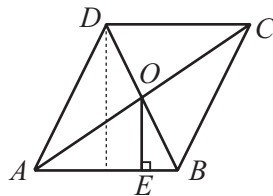
Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este egală cu media geometrică a lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.  
Dacă într-un triunghi  $ABC$ , care nu este triunghi obtuzunghic, lungimea înălțimii  $AD$  este media geometrică a lungimilor proiecțiilor celorlalte două laturi,  $AB$  și  $AC$ , pe  $BC$ , atunci triunghiul este dreptunghic în  $A$ .



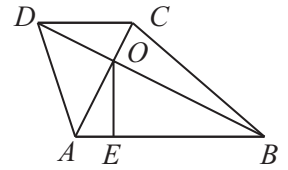


Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1 Desenați triunghiul dreptunghic  $ABC$ , cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ , înălțimea  $AD$  a triunghiului  $ABC$  și înălțimea  $DE$  a triunghiului  $ACD$ . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:  
 $p_1$ : „Proiecția catetei  $AB$  pe ipotenuza  $BC$  a triunghiului  $ABC$  este  $BD$ .”  
 $p_2$ : „Proiecția catetei  $CD$  pe ipotenuza  $AC$  a triunghiului  $ACD$  este  $AE$ .”  
 $p_3$ : „ $AD^2 = BD \cdot DC$ ”  
 $p_4$ : „ $DE^2 = AE + EC$ ”
- 2 Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic știind că proiecțiile catetelor pe ipotenuză au dimensiunile:  
a) 5 cm și 20 cm;      b)  $x$  și  $4x$ , cu  $x > 0$ ;  
c) 16 cm și 9 cm;      d) 2,7 cm și 1,2 cm;  
e)  $\sqrt{3}$  dm și  $3\sqrt{3}$  dm.
- 3 În triunghiul  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ .  
a) Dacă  $BD = 8$  cm și  $CD = 18$  cm, aflați  $AD$ .  
b) Dacă  $AD = 12$  cm și  $CD = 8$  cm, aflați  $BD$  și  $BC$ .
- 4 Se consideră triunghiul  $DEF$ ,  $\sphericalangle D = \sphericalangle E + \sphericalangle F$  și  $DA \perp EF$ ,  $A \in EF$ . Se știe că  $AD = 10$  cm și  $EF = 5 \cdot AE$ . Calculați lungimile segmentelor  $AE$ ,  $AF$  și  $EF$ .
- 5 În triunghiul  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AM \perp BC$ ,  $M \in BC$ ,  $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{4}$  și  $BC = 20$  cm. Calculați  $AM$  și aria triunghiului  $ABC$ .
- 6 În trapezul dreptunghic  $TRAP$ , se cunosc:  $\sphericalangle T = \sphericalangle P = 90^\circ$ ,  $TR = 30$  cm,  $AP = 18$  cm și  $TA \perp AR$ . Calculați înălțimea trapezului.
- 7 Rombul  $ABCD$  are înălțimea de 20 cm și  $AC \cap BD = \{O\}$ . Proiecția segmentului  $OB$  pe latura  $AB$  are lungimea de 5 cm. Calculați perimetrul rombului.



- 8 Fie  $ABCD$  un dreptunghi. Proiecția punctului  $A$  pe diagonala  $BD$  este punctul  $E$ ,  $BE = 3 DE$ , iar  $AC \cap BD = \{O\}$ .  
a) Determinați valoarea raportului  $\frac{DE}{EO}$ .  
b) Pentru  $BD = 8\sqrt{2}$  cm, calculați  $AE$ .  
c) Aflați măsura unghiului ascuțit format de diagonalele dreptunghiului.
- 9 În trapezul  $ABCD$  diagonalele sunt perpendiculare,  $AC \cap BD = \{O\}$ , proiecția punctului  $O$  pe baza mare  $AB$  este punctul  $E$ . Se cunosc  $AE = 2$  cm și  $BE = 8$  cm.  
a) Calculați lungimea segmentului  $OE$ .  
b) Dacă  $CD = 5$  cm, aflați aria trapezului.
- 10 Se consideră dreptunghiul  $MNPQ$ ,  $MA \perp NQ$ ,  $A \in NQ$  și  $MA \cap PQ = \{B\}$ . Dacă  $AN = 12$  cm,  $AQ = 27$  cm calculați  $MA$  și  $MB$ .
- 11 În triunghiul  $ABC$  isoscel,  $AM$  este înălțimea corespunzătoare bazei  $BC$  și  $MD \perp AB$ ,  $D \in AB$ ,  $ME \perp AC$ ,  $E \in AC$ . Se știe că  $MD = 2\sqrt{3}$  cm și  $AD = 2\sqrt{6}$  cm.  
a) Aflați lungimea segmentului  $AB$ .  
b) Arătați că  $DE \perp AM$  și apoi calculați  $DE$ .
- 12 Fie triunghiul echilateral  $ABM$  și  $D$  mijlocul laturii  $BM$ . Pe dreapta  $BM$  se consideră un punct  $C$  astfel încât  $M$  este mijlocul segmentului  $BC$ .  
Arătați că  $AD^2 = \frac{3BC^2}{16}$ .
- 13 Fie  $AD$  înălțime a triunghiului  $AMN$ ,  $D \in MN$  și  $AD = 3\sqrt{6}$  cm,  $MD = 9$  cm,  $ND = 6$  cm. Arătați că triunghiul  $AMN$  este dreptunghic.
- 14 Fie  $AD$  înălțime a triunghiului  $AMN$ ,  $D \in MN$  și  $AD = a \cdot MD$ ,  $ND = a \cdot AD$ , unde  $a > 0$ . Arătați că triunghiul  $AMN$  este dreptunghic.
- 15 Dreptunghiul  $DREP$  are  $DR = 16$  cm și  $RE = 8$  cm. Prelungim segmentul  $DR$  cu  $RQ = \frac{RE}{2}$ . Arătați că  $DE \perp EQ$ .





**Ne amintim**

Dacă într-un triunghi dreptunghic reprezentăm înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, se evidențiază trei triunghiuri dreptunghice, oricare două dintre ele, fiind asemenea.

Într-adevăr, considerând triunghiul  $ABC$  dreptunghic ( $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ) și  $AD$  înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, au loc următoarele congruențe de unghiuri:

- $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$ ; sunt unghiuri drepte;
- $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle DAC$ ; au același complement, unghiul  $BAD$ ;
- $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$ ; au același complement, unghiul  $CAD$ .

Folosind asemănarea triunghiurilor  $ABD$  și  $CAD$  am demonstrat teorema înălțimii. Ne propunem să obținem un rezultat și din asemănarea celorlalte două perechi de triunghiuri:  $ABC$  și  $DBA$ , respectiv  $ABC$  și  $DAC$ .

**Descoperim, înțelegem, exemplificăm**

**Teorema 1. Teorema catetei**

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii unei catete este egal cu produsul dintre lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acelei catete pe ipotenuză.

*Demonstrație:* Triunghiurile  $ABC$  și  $DBA$  sunt asemenea, deoarece unghiurile  $BAC$  și  $ADB$  sunt drepte, iar  $\sphericalangle ABC$  și  $\sphericalangle ABD$  este unghi comun. Scriem proporționalitatea

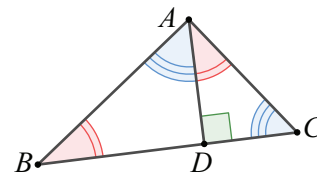
$$\text{laturilor: } \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AD}.$$

$$\text{Din } \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{AB}, \text{ rezultă } AB^2 = BC \cdot BD.$$

În mod analog, triunghiurile  $ABC$  și  $DAC$  sunt asemenea, deoarece unghiurile  $BAC$  și  $ADC$  sunt drepte, iar

$$\sphericalangle ACB \text{ și } \sphericalangle ACD \text{ este unghi comun. Atunci, } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}. \text{ Din } \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}, \text{ rezultă } AC^2 = BC \cdot CD.$$

*Observație:* Egalitățile date de teorema catetei sunt echivalente cu  $AB = \sqrt{BC \cdot BD}$ , respectiv  $AC = \sqrt{BC \cdot CD}$ , ceea ce duce la o nouă formulare: *într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este media geometrică între lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acelei catete pe ipotenuză.*

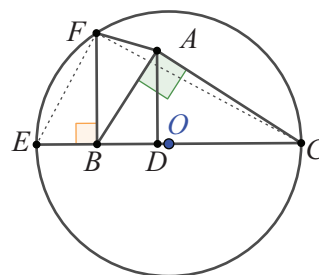


**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

**Aplicația 1:** În triunghiul dreptunghic  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ , considerăm înălțimea  $AD$  și notăm cu  $E$  simetricul lui  $D$  față de  $B$ . Perpendiculara în  $B$  pe  $CB$  intersectează cercul de diametru  $EC$  în  $F$ . Arătați că triunghiul  $BFA$  este isoscel.

*Soluție:* Deoarece triunghiul  $BAC$  este dreptunghic, putem aplica teorema catetei pentru  $AB$ , obținând:  $AB^2 = BC \cdot BD$ .

Triunghiul  $EFC$  este înscris într-un semicerc, deci este dreptunghic și aplicăm, pentru înălțimea  $FB$ , teorema înălțimii:  $FB^2 = BC \cdot BE$ . Dar,  $E$  este simetricul lui  $D$  față de  $B$ , prin urmare  $BD \equiv BE$ , care implică  $AB^2 = FB^2$  sau  $BA \equiv BF$ , adică triunghiul  $BFA$  este isoscel.



### Teorema 2.

**Reciproca teoremei catetei:** Fie triunghiul  $ABC$  și  $D = pr_{BC}A$ . Dacă  $D$  aparține segmentului  $BC$  și este verificată una din relațiile  $AB^2 = BC \cdot BD$  sau  $AC^2 = BC \cdot CD$ , atunci triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$ .

**Demonstrație:** Se construiește proiecția lui  $A$  pe  $BC$ , respectând condiția impusă:  $D$  se găsește pe segmentul  $BC$ . Considerând verificată relația  $AB^2 = BC \cdot BD$ , aceasta se mai

scrie:  $\frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA}$ . În această proporție numărătorii reprezintă laturi ale triunghiului

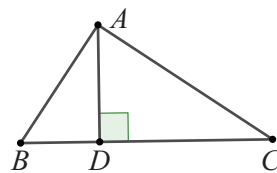
$BAC$ , iar numitorii reprezintă laturi ale triunghiului  $BDA$ . Cele două triunghiuri

au unghiul comun  $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DBA$  și conform cazului de asemănare L.U.L.,

triunghiurile sunt asemenea. Din congruența unghiurilor corespunzătoare avem  $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDA$ . Dar,

unghiul  $BDA$  este unghi drept, prin urmare și  $BAC$  este unghi drept, deci triunghiul este dreptunghic. Analog

se demonstrează că triunghiul  $ABC$  este dreptunghic, plecând de la relația  $AC^2 = BC \cdot CD$ .



### Temă de portofoliu

Justificați, printr-un contraexemplu, faptul că reciproca teoremei catetei nu rămâne valabilă dacă proiecția punctului  $A$  pe  $BC$  nu aparține segmentului  $BC$ .

**Aplicația 2:** În triunghiul dreptunghic  $ABC$ ,  $AD$  este înălțime,  $E$  este proiecția punctului  $D$  pe dreapta  $AB$  iar  $F$  este proiecția punctului  $E$  pe dreapta  $BC$ . Calculați lungimea segmentului  $BF$  știind că  $AB = 18$  cm și  $BC = 27$  cm.

**Soluție:** Observăm că, realizând construcțiile cerute în enunț, s-au format mai multe triunghiuri dreptunghice și s-au trasat înălțimile corespunzătoare ipotenzelor.

Aplicăm de mai multe ori teorema catetei și obținem:

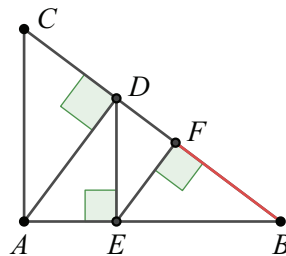
În triunghiul  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AD$  înălțimea corespunzătoare ipotenuzei  $AB^2 = BC \cdot BD$ ,

de unde  $BD = \frac{AB^2}{BC} = \frac{324}{27} = 12$  (cm). În triunghiul  $ABD$ ,  $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ ,  $DE$  este

înălțimea corespunzătoare ipotenuzei:  $BD^2 = BE \cdot AB$  sau  $BE = \frac{BD^2}{AB} = \frac{144}{18} = 8$  (cm).

În triunghiul  $BDE$ ,  $\sphericalangle BED = 90^\circ$ ,  $EF$  înălțimea corespunzătoare ipotenuzei:  $BE^2 = BD \cdot BF$  sau

$BF = \frac{BE^2}{BD} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$  (cm).



**Aplicația 3:** În triunghiul dreptunghic  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AD$  este înălțime,  $E$  este proiecția punctului  $D$  pe dreapta  $AB$ , iar  $F$  este proiecția punctului  $E$  pe dreapta  $BC$ .

a) Calculați lungimea segmentului  $BF$  în funcție de  $AB = c_1$  și  $BC = ip$ .

b) Determinați lungimea segmentului  $BF$  pentru  $AB = 18$  cm,  $BC = 27$  cm.

**Soluție:** Din enunț,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AD \perp BC$ ,  $DE \perp AB$ , deci triunghiurile  $ABC$ ,  $ADB$ ,  $DEB$  sunt dreptunghice, iar  $AD$ ,  $DE$ ,  $EF$  sunt înălțimile corespunzătoare ipotenzelor în aceste triunghiuri. Vom calcula lungimea

segmentului  $BF$  cu ajutorul teoremei catetei în triunghiul  $BED$ , adică  $BF = \frac{BE^2}{BD}$ .

Segmentul  $BE$  este proiecția catetei  $BD$  pe ipotenuză în triunghiul  $ADB$ , deci  $BE = \frac{BD^2}{AB}$ .

Segmentul  $BD$  este proiecția catetei  $AB$  pe ipotenuză în triunghiul  $ABC$ , deci  $BD = \frac{AB^2}{BC}$ .

Atunci,  $BF = \frac{BE^2}{BD} = \left(\frac{BD^2}{AB}\right)^2 \cdot \frac{1}{BD} = \frac{BD^3}{AB^2} = \left(\frac{AB^2}{BC}\right)^3 \cdot \frac{1}{AB^2} = \frac{AB^4}{BC^3} = \frac{c_1^4}{ip^3}$ .

b) Pentru  $c_1 = 18$  cm și  $ip = 27$  cm, obținem  $BF = \frac{c_1^4}{ip^3} = \frac{18^4}{27^3} = \frac{2^4 \cdot 3^8}{3^9} = \frac{2^4}{3} = \frac{16}{3}$  (cm).

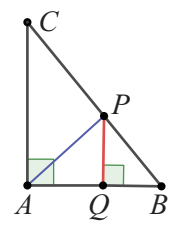
**Aplicația 4:** Punctul  $P$  este situat pe ipotenuza  $BC$  a triunghiului  $ABC$ ,  $PB = 6$  cm. Proiecția punctului  $P$  pe dreapta  $AB$  este punctul  $Q$ ,  $QA = 5$  cm,  $QB = 4$  cm. Calculați lungimile segmentelor  $AP$  și  $BC$ .

**Soluție:** Punctul  $P$  este situat pe ipotenuza triunghiului dreptunghic  $ABC$ . Atunci, unghiurile  $PAB$  și  $PBA$  sunt ascuțite, deci punctul  $Q$ , proiecția punctului  $P$  pe  $AB$ , este situat în interiorul segmentului  $AB$ .

În triunghiul  $APB$  au loc:  $PQ \perp AB$ ,  $Q \in AB$ ,  $PB^2 = BQ \cdot BA = 4 \cdot 9 = 36$ .

Reciproca teoremei catetei aplicată triunghiului  $ABP$ , arată că  $\sphericalangle APB = 90^\circ$ .

Aplicând teorema catetei în triunghiul  $APB$ , obținem  $AP^2 = AQ \cdot AB = 45$ , deci  $AP = 3\sqrt{5}$  (cm) și aplicând teorema catetei în triunghiul  $ABC$  obținem  $AB^2 = BC \cdot BP$ , apoi  $81 = BC \cdot 6$ , de unde  $BC = 13,5$  (cm).



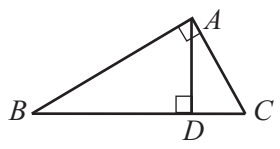
**Reținem!**

- Teorema înălțimii și teorema catetei exprimă „legături” între lungimile elementelor unui triunghi dreptunghic: înălțimea, catetele, ipotenuza și proiecțiile catetelor pe ipotenuză. Aceste „legături” se numesc *relații metrice*.
- Reciproca teoremei catetei și reciproca teoremei înălțimii reprezintă modalități de a arăta perpendicularitatea unor drepte.



**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

**1** Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic,  $\sphericalangle A = 90^\circ$  și  $AD \perp BC$ .



Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- $p_1$ : „Proiecția catetei  $AB$  pe ipotenuza  $BC$  este  $BD$ ”
- $p_2$ : „Proiecția catetei  $AC$  pe ipotenuza  $BC$  este  $BD$ ”
- $p_3$ : „ $AB^2 = BC \cdot BD$ ”
- $p_4$ : „ $AC = \sqrt{BD \cdot DC}$ ”

**2** În triunghiul dreptunghic  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AD$  este înălțime, iar  $DE$  este înălțime în triunghiul  $ABD$ . Se știe că  $AD = 24$  cm,  $DC = 18$  cm. Calculați lungimile segmentelor  $BD$ ,  $AC$  și  $AE$ .

**3** În paralelogramul  $ABCD$ , avem  $CD = 18$  cm, iar bisectoarele unghiurilor  $\sphericalangle A$  și  $\sphericalangle B$  se intersectează în punctul  $E$ .

- a) Arătați că triunghiul  $ABE$  este dreptunghic.
- b) Știind că  $AB = 3 BE$ , calculați lungimea proiecției segmentului  $BE$  pe dreapta  $AB$ .

**4** Calculați lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic știind că proiecțiile catetelor pe ipotenuză au lungimile:

- a) 9 cm și 16 cm;
- b) 4 cm și 12 cm;
- c)  $9\sqrt{3}$  cm și  $3\sqrt{3}$  cm;
- d)  $x$  cm și  $9x$  cm,  $x > 0$ .

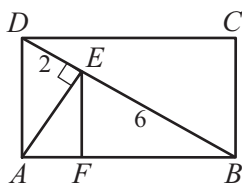
**5** În dreptunghiul  $ABCD$ , avem  $AB = 4,5$  cm și  $BE \perp BD$ ,  $E \in CD$ . Știind că  $DE = 12,5$  cm, calculați  $BE$  și perimetrul dreptunghiului.

- 6** În triunghiul  $ABC$ , avem  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ .
- Dacă  $BC = 20$  cm,  $BD = 7,2$  cm, aflați  $CD$ ,  $AB$ , și  $AC$ .
  - Dacă  $BC = 6$  cm,  $BD = 0,4$  dm, aflați  $DC$ ,  $AC$  și  $AB$ .
  - Dacă  $AB = 5\sqrt{6}$  m,  $BC = 25$  m, aflați  $BD$ ,  $CD$  și  $AC$ .
  - Dacă  $AB = 2x$  cm,  $BD = x$  cm, aflați  $BC$  și  $AC$ .

**7** Triunghiul  $DEF$  este dreptunghic în  $D$ ,  $DG \perp EF$ ,  $G \in EF$ , iar dreapta  $DG$  intersectează paralela prin  $F$  la  $DE$  în punctul  $L$ . Dacă  $DE = 15$  cm și  $EF = 25$  cm, calculați lungimile segmentelor  $EG$ ,  $DF$  și  $FL$ .

**8** Fie rombul  $ROMB$ ,  $RM \cap OB = \{A\}$  și  $AC \perp BM$ ,  $C \in MB$ . Știind că  $OB = 24$  cm și  $BC = 8$  cm, calculați latura și înălțimea rombului.

**9** Proiecțiile laturilor  $AB$  și  $AD$  ale dreptunghiului  $ABCD$  pe diagonala  $BD$  au lungimile de 2 cm și 6 cm.



- Calculați dimensiunile dreptunghiului.
  - Dacă  $AE \perp BD$ ,  $E \in BD$  și  $EF \perp AB$ ,  $F \in AB$  aflați aria triunghiului  $BEF$ .
- 10** În triunghiul dreptunghic  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ , mediana  $AM$  și înălțimea  $AD$  formează un unghi de  $30^\circ$ . Calculați:

- valoarea raportului  $\frac{DM}{BC}$ ;
- $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$ .

**11** În triunghiul dreptunghic  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AD$  este înălțime și  $CD = 3 \cdot BD$ . Determinați măsura unghiului  $\sphericalangle ABC$ .

**12** Fie triunghiul  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ ,  $DE \perp AB$ ,  $E \in AB$  și  $DF \perp AC$ ,  $F \in AC$ .

a) Demonstrați că  $\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB}$ .

- Arătați că  $\triangle AEF$  și  $\triangle ACB$  sunt asemenea.
- Dacă  $BD = 3$  cm și  $BC = 15$  cm calculați  $EF$ .

**13** Fie triunghiul  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 135^\circ$  și punctele  $D, E$  pe latura  $BC$  astfel încât  $AD \perp BC$ ,  $CD = 6$  cm,  $CE = 8$  cm și  $AE = 4$  cm.

- Demonstrați că triunghiul  $AEC$  este dreptunghic.
- Calculați lungimea segmentului  $BE$ .

**14** Se consideră triunghiul isoscel  $ABC$ , cu  $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ ,  $AD$  înălțime și  $AP$  bisectoarea unghiului  $BAD$ ,  $P \in BC$ ,  $AP = 2\sqrt{3}$  cm.

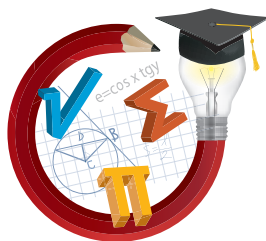
- Arătați că triunghiul  $APC$  este dreptunghic.
- Calculați lungimile segmentelor  $AC$  și  $BC$ .

**15** În triunghiul  $ABC$ ,  $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ ,  $AB = 10$  cm,  $BD \perp AC$ ,  $D \in AC$ . Proiecția segmentului  $BD$  pe dreapta  $BC$  are lungimea de 2,5 cm. Demonstrați că triunghiul  $ABC$  este isoscel.

**16** Un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 9 cm, are lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză exprimate, în centimetri, prin două numere prime. Calculați lungimile catetelor acestui triunghi.

**17** Perimetrul rombului  $ABCD$  este 60 cm și  $BD \equiv CD$ . Perpendiculara în  $A$  pe  $AB$  intersectează dreapta  $BD$  în punctul  $E$ . Calculați:

- lungimea proiecției segmentului  $AB$  pe dreapta  $BE$ ;
- perimetrul triunghiului  $ACE$ .



7.2

## Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora

### Ne amintim

Teorema catetei exprimă lungimea unei catete, ca medie geometrică între lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției sale pe ipotenuză.

Într-un triunghi dreptunghic proiecția vârfului unghiului drept pe ipotenuză aparține acesteia, adică suma lungimilor celor două proiecții ale catetelor pe ipotenuză este chiar lungimea ipotenuzei.

Folosind aceste două observații putem demonstra unul din cele mai frumoase rezultate din geometria triunghiului dreptunghic, rezultat pe care îl cunoaștem din clasa a VI-a, sub numele de Teorema lui Pitagora.

Teorema lui Pitagora are, probabil, cele mai multe demonstrații dintre toate teoremele din matematică.

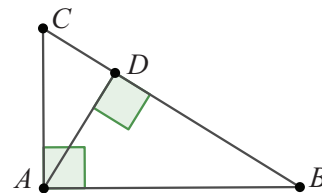


### Descoperim, înțelegem, exemplificăm

#### Teorema lui Pitagora.

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

*Demonstrație:* În triunghiul dreptunghic  $ABC$  ( $\sphericalangle A = 90^\circ$ ), notăm cu  $D$  proiecția lui  $A$  pe  $BC$ . Deoarece unghiurile  $B$  și  $C$  sunt ascuțite, rezultă că  $D$  se găsește pe latura  $BC$ , iar segmentele  $BD$  și  $CD$  sunt proiecțiile catetelor  $AB$  respectiv  $AC$  pe ipotenuză.



Folosind teorema catetei, obținem  $BD = \frac{AB^2}{BC}$  și  $CD = \frac{AC^2}{BC}$ .

$BD + CD = BC$ , iar prin înlocuire deducem:  $\frac{AB^2}{BC} + \frac{AC^2}{BC} = BC$  sau  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ .

**Observație:** Teorema lui Pitagora permite aflarea lungimii unei laturi a unui triunghi dreptunghic atunci când cunoaștem lungimile celorlalte două laturi:

1) cunoscând lungimile catetelor, lungimea ipotenuzei este:  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$ ;

2) cunoscând lungimea unei catete și lungimea ipotenuzei, cealaltă catetă este:  $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$  sau  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$ .

### Temă de portofoliu

Decideți care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- 1) Suma pătratelor lungimilor diagonalelor unui pătrat este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor sale.
- 2) Suma pătratelor lungimilor diagonalelor unui dreptunghi este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor sale.
- 3) Suma pătratelor lungimilor diagonalelor unui romb este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor sale.



**Știm să aplicăm, identificăm conexiuni**

**Aplicația 1:**

a) Considerăm triunghiul isoscel  $MNP$ , cu  $MN = MP = 15$  cm și  $NP = 18$  cm. Calculați înălțimea corespunzătoare bazei.

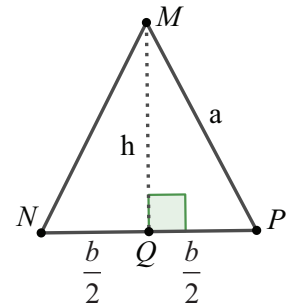
b) Demonstrați că pentru triunghiul isoscel cu laturile congruente de lungime  $a$  și baza

de lungime  $b$ , lungimea  $h$  a înălțimii corespunzătoare bazei este  $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ .

c) Fie trapezul isoscel  $MNPQ$ , cu  $MN \parallel PQ$ ,  $MN = 30$  cm,  $PQ = 16$  cm și  $MQ = 25$  cm. Calculați înălțimea trapezului.

d) Demonstrați că pentru trapezul isoscel cu lungimile bazelor  $B$ , respectiv  $b$  și laturile

neperalele de lungime  $l$ , lungimea  $h$  a înălțimii trapezului este:  $h = \sqrt{l^2 - \frac{(B-b)^2}{4}}$ .



**Soluție:** a) Considerăm triunghiul isoscel  $MNP$  cu baza  $NP$  și  $Q$  proiecția lui  $M$

pe latura  $NP$ . Din ipoteză,  $MQ$  este înălțimea corespunzătoare bazei triunghiului isoscel, deci  $MQ$  este și mediană, prin urmare  $QP = \frac{NP}{2} = 9$  (cm).

Notăm  $MQ = h$ . Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul  $MQP$ , dreptunghic,  $\sphericalangle MQP = 90^\circ$  și obținem

$$h = MQ = \sqrt{MP^2 - QP^2}, h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ cm.}$$

b) Vom parcurge același drum, considerând lungimile laturilor numere pozitive, astfel încât triunghiul să

existe. Din ipoteză, avem  $QP = \frac{b}{2}$ ,  $MP = a$  și  $MQ = h$ . Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul  $MQP$ ,

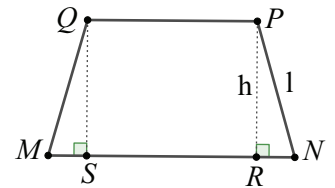
$$\text{dreptunghic, } \sphericalangle MQP = 90^\circ \text{ și obținem } h = MQ = \sqrt{MP^2 - QP^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

c) Considerăm trapezul isoscel  $MNPQ$  ( $MN \parallel PQ$ ) și notăm cu  $R$  și  $S$  proiecțiile

$$\text{punctelor } P, \text{ respectiv } Q, \text{ pe baza mare. Cu datele din ipoteză, obținem } MS = RN = \frac{MN - PQ}{2} = 7 \text{ cm, } MQ = NP = 25 \text{ cm, } h = PR = QS.$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic  $PRN$  și obținem

$$h = PR = \sqrt{PN^2 - RN^2}, \text{ deci } h = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ (cm).}$$



d) Cu datele din ipoteză, avem lungimile segmentelor:  $MS = RN = \frac{B-b}{2}$ ,  $MQ = NP = l$ ,  $h = PR = QS$ .

$$\text{Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic } PRN \text{ și obținem } h = PR = \sqrt{PN^2 - RN^2} = \sqrt{l^2 - \frac{(B-b)^2}{4}}.$$

**Aplicația 2:** Fie  $H$  ortocentrul triunghiului  $ABC$ .

Arătați că  $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2$ .

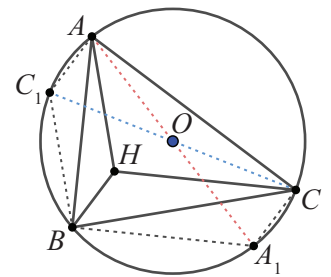
**Soluție:** Să observăm figura alăturată. Vom trasa cercul circumscris triunghiului  $ABC$  și vom nota cu  $A_1$  și  $C_1$  punctele diametral opuse lui  $A$ , respectiv  $C$ . Am obținut diametrele  $AA_1$  și  $CC_1$ . Atunci, unghiurile  $ABA_1$ ,  $ACA_1$ ,  $CAC_1$ ,  $CBC_1$  sunt drepte, deci  $A_1B \perp AB$ ,  $A_1C \perp AC$ ,  $C_1A \perp AC$  și  $C_1B \perp CB$ . Punctul  $H$  este ortocentrul, deci  $AH \perp BC$ ,  $BH \perp AC$  și  $CH \perp AB$ . Rezultă  $AH \parallel C_1B$  și  $BH \parallel C_1A$ , deci  $BHAC_1$  este paralelogram.

Analog,  $BHCA_1$  este paralelogram. Obținem  $BH \equiv A_1C$  și  $CH \equiv A_1B$ . Triunghiurile

$AA_1C$  și  $AA_1B$  sunt dreptunghice, deci putem aplica teorema lui Pitagora:

$$AA_1^2 = AC^2 + A_1C^2 \text{ și } AA_1^2 = AB^2 + A_1B^2, \text{ adică } AC^2 + BH^2 = AB^2 + CH^2.$$

Analog pentru paralelogramul  $BHAC_1$ , obținem  $CC_1^2 = AC^2 + BH^2$  și  $CC_1^2 = BC^2 + AH^2$ , adică  $AC^2 + BH^2 = BC^2 + AH^2$ .

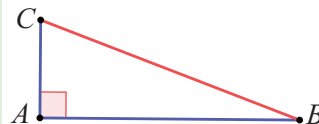




### Reciproca teoremei lui Pitagora

Dacă pătratul lungimii unei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept fiind opus primei laturi.

Cu notațiile din figura alăturată, enunțul reciprocei teoremei lui Pitagora este următorul: *Dacă între lungimile laturilor triunghiului ABC are loc relația  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , atunci triunghiul este dreptunghic, cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ .*

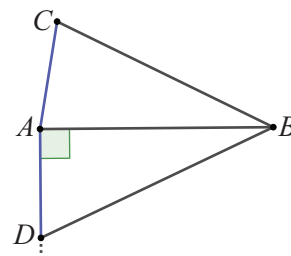


*Demonstrație:* Pe perpendiculara în A pe AB, considerăm punctul D astfel încât  $AD \equiv AC$ , punctele D, C fiind situate în semiplane diferite determinate de dreapta AB.

În triunghiul ABD, dreptunghic,  $\sphericalangle BAD = 90^\circ$  (din construcție) aplicăm teorema lui Pitagora:  $BD^2 = AB^2 + AD^2$ . Din ipoteză,  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2$ .

Rezultă că  $BD \equiv BC$ . Comparând triunghiurile ABD și ABC avem:

$AB \equiv AB$ ,  $AD \equiv AC$  și  $BD \equiv BC$ . Cazul de congruență L.L.L. ne conduce la congruența triunghiurilor ABD și ABC, deci la congruența unghiurilor  $\sphericalangle BAC$  și  $\sphericalangle BAD$ . Deoarece  $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ , rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic, cu ipotenuza BC.



Reciproca teoremei lui Pitagora ne oferă o metodă de a demonstra că un triunghi este dreptunghic.

Pentru a decide dacă un triunghi, căruia i se cunosc lungimile laturilor este dreptunghic, procedăm astfel:

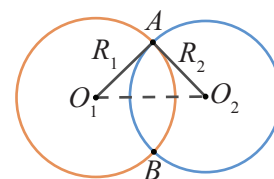
- 1) Ordonăm crescător lungimile laturilor.
  - 2) Calculăm pătratele lungimilor laturilor, păstrând ordinea crescătoare.
  - 3) Calculăm suma pătratelor numerelor mai mici și comparăm cu pătratul numărului mai mare.
  - 4) Interpretăm rezultatul: Dacă obținem egalitate, reciproca teoremei lui Pitagora ne spune că triunghiul este dreptunghic și că unghiul drept se opune celei mai mari dintre laturi.
- Dacă cele două numere sunt diferite, atunci triunghiul nu este dreptunghic.

#### Exemple:

- a) Triunghiul ABC cu  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  și  $BC = 5$  este triunghi dreptunghic în A pentru că:
  - 1)  $3 < 4 < 5$ ;
  - 2)  $9 < 16 < 25$ ;
  - 3)  $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = BC^2$ .
- b) Triunghiul MNP cu  $MN = 4$ ,  $MP = 5$  și  $NP = 6$  nu este dreptunghic pentru că:
  - 1)  $4 < 5 < 6$ ;
  - 2)  $16 < 25 < 36$ ;
  - 3)  $6 + 25 \neq 36$ .



**Aplicația 3:** Cu centrul în punctul  $O_1$  se construiește un cerc de rază  $R_1 = 21$  cm, iar cu centrul în  $O_2$  se construiește un cerc de rază  $R_2 = 20$  cm. Se știe că  $O_1O_2 = 29$  cm, iar cele două cercuri se intersectează în A și B. Arătați că dreapta  $O_1A$  este tangentă cercului  $\mathcal{C}(O_2, R_2)$ , iar dreapta  $O_2B$  este tangentă cercului  $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ .



*Soluție:* Pentru ca  $O_1A$  să fie tangentă cercului de centru  $O_2$ , trebuie ca  $O_1A \perp O_2A$ .

Vom verifica aceasta prin reciproca teoremei lui Pitagora în triunghiul  $O_1O_2A$ . Calculăm  $O_1O_2^2 = 29^2 = 841$  și  $O_1A^2 + O_2A^2 = 21^2 + 20^2 = 841$ .

Cele două valori sunt identice, deci este verificată reciproca teoremei lui Pitagora, triunghiul  $O_1O_2A$  este dreptunghic, adică dreapta  $O_1A$  este tangentă în A la cercul de centru  $O_2$ .

Procedând la fel, în triunghiul  $O_1O_2B$  se obține  $O_1O_2^2 = 29^2 = 841 = 21^2 + 20^2 = O_1B^2 + O_2B^2$ , egalitate ce arată că  $\sphericalangle O_1BO_2 = 90^\circ$ , deci dreapta  $O_2B$  este tangentă cercului  $\mathcal{C}(O_1, R_1)$ .

**Aplicația 4:** În patrulaterul convex  $ABCD$ , diagonalele  $AC$  și  $BD$  sunt perpendiculare.

a) Arătați că suma pătratelor laturilor opuse este constantă.

b) Enunțați și demonstrați reciproca acestei propoziții.

**Soluție:** a) Notăm intersecția diagonalelor cu  $O$ . Deoarece diagonalele sunt perpendiculare s-au format triunghiurile dreptunghice  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ,  $ODA$ .

Aplicând teorema lui Pitagora în aceste triunghiuri, calculăm suma pătratelor laturilor opuse:  $AD^2 + BC^2 = (AO^2 + DO^2) + (BO^2 + CO^2)$  și  $AB^2 + DC^2 = (AO^2 + BO^2) + (CO^2 + DO^2)$ . Atunci,  $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$ .

b) Reciproca: Dacă suma pătratelor lungimilor laturilor opuse ale unui patrulater este constantă, atunci diagonalele sunt perpendiculare.

Vom presupune că diagonalele nu sunt perpendiculare, notând proiecțiile punctelor  $B$  și  $D$  pe dreapta  $AC$  cu  $B_1$ , respectiv  $D_1$ . Cum  $B_1 \neq D_1$ , pentru început considerăm ordinea pe  $AC$ :  $A-B_1-D_1-C$ . Pentru operativitatea scrierii notăm lungimile segmentelor cu:

$AB_1 = p$ ,  $B_1D_1 = t$ ,  $D_1C = u$ ,  $DD_1 = w$ , și  $BB_1 = q$ . Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice  $BB_1A$  și  $DD_1C$  și calculăm suma pătratelor lungimilor laturilor opuse  $AB$  și  $DC$ :  $AB^2 + DC^2 = p^2 + q^2 + u^2 + w^2$ .

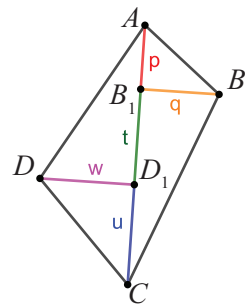
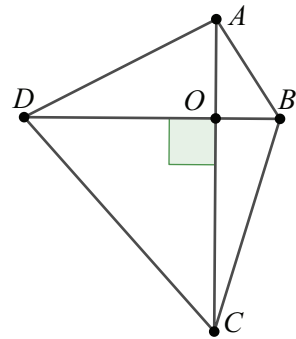
Procedăm la fel în triunghiurile dreptunghice  $BB_1C$  și  $DD_1A$ :

$$AD^2 + BC^2 = (p+t)^2 + w^2 + q^2 + (u+t)^2.$$

Egalitatea sumei pătratelor lungimilor laturilor opuse conduce la  $p^2 + u^2 = (p+t)^2 + (u+t)^2$ , egalitate cu numere pozitive, imposibilă. Analog tratăm și cazul în care ordinea pe  $AC$  este:

$A-D_1-B_1-C$ .

Am ajuns la o contradicție, prin urmare presupunerea făcută este falsă, adică diagonalele sunt perpendiculare.



### Reținem!



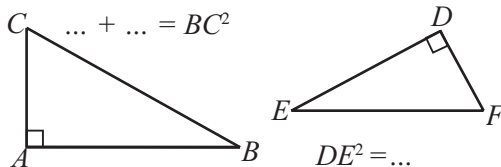
**Teorema lui Pitagora:** Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

**Reciproca teoremei lui Pitagora:** Dacă suma pătratelor lungimilor a două laturi ale unui triunghi este egală cu pătratul lungimii celei de-a treia laturi, atunci triunghiul este dreptunghic, unghiul drept fiind opus laturii a treia.

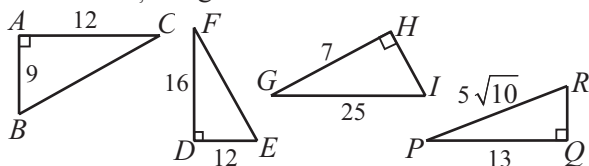


### Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

- 1** Analizați triunghiurile din figurile de mai jos, desenați-le pe caiete și completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.



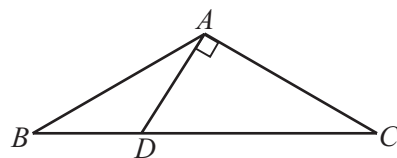
- 2** Pentru fiecare dintre triunghiurile de mai jos, calculați lungimea laturii necunoscute:



- 3** Triunghiul  $ABC$  este isoscel,  $AB = AC = 25$  cm și  $BC = 40$  cm. Aflați  $h_1 + h_2 + h_3$ , suma înălțimilor triunghiului.

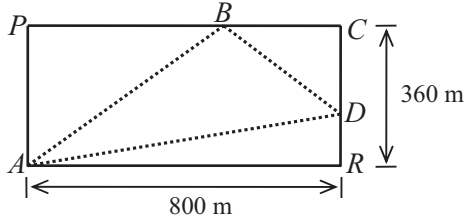
- 4** Fie triunghiul  $ABC$  cu  $AB = AC = 8\sqrt{3}$  cm și  $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ . Perpendiculara în  $A$  pe  $AC$  intersectează latura  $BC$  în  $D$ . Calculați:

- a) măsurile unghiurilor  $\sphericalangle ABC$  și  $\sphericalangle ACB$ .  
b) lungimile segmentelor  $DC$  și  $BD$ .



- 5** Calculați:
- lungimea înălțimii unui triunghi echilateral cu latura de 8 cm;
  - lungimea diagonalei unui pătrat cu perimetrul de 48 cm;
  - lungimea diagonalei unui dreptunghi cu dimensiunile  $a$  și  $2a$ ;
  - perimetrul unui romb cu diagonalele 2 cm și  $2\sqrt{3}$  cm.

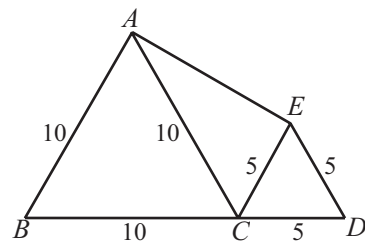
- 6** Maria se deplasează pe aleile parcului *PARC* cu suprafața dreptunghiulară (vezi figura de mai jos). În punctul *B* se află o fântână arteziană la 480 m de punctul *P*, iar în punctul *D* se află o statuie, la 120 m de punctul *R*. Arătați că, dacă Maria se deplasează pe traseul  $A - B - D - A$ , atunci ea parcurge mai mult de 1,8 km.



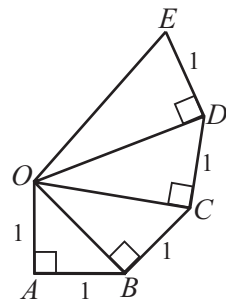
- 7**  $A, B, C$  sunt puncte ale cercului  $C(O, r)$ ,  $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ . Punctul  $C$  este situat pe arcul mic  $AB$ , la distanța de  $8\sqrt{2}$  cm de dreapta  $AO$  și la distanța de 4 cm de dreapta  $BO$ . Calculați raza cercului.
- 8** Un triunghi dreptunghic are un unghi de  $60^\circ$  și lungimea ipotenuzei de 6 cm. Calculați perimetrul triunghiului.
- 9** În triunghiul  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $BD$  este mediană și  $CE$  este bisectoarea  $\sphericalangle ACB$ ,  $E \in AB$ . Știind că  $BD = 50$  cm și  $AC = 80$  cm, aflați distanța de la punctul  $E$  la dreapta  $BC$ .
- 10** Un trapez isoscel are baza mare de 8 cm, diagonala de  $2\sqrt{13}$  cm și laturile neperalele de lungime  $2\sqrt{3}$  cm. Calculați înălțimea trapezului.
- 11** Fie triunghiul  $ABC$  cu  $BC = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ ,  $AB = 2a$ . Arătați că  $\sphericalangle A = \frac{1}{2} \sphericalangle B = \frac{1}{3} \sphericalangle C$ .

- 12** Se consideră paralelogramul  $MNPQ$ , cu  $MN = 17$  cm,  $NQ = 16$  cm și  $MP = 30$  cm. Determinați măsura unghiului format de diagonalele paralelogramului.
- 13** Triunghiul  $DEF$  este dreptunghic, având catetele  $DE$  și  $DF$ , cu lungimile 15 cm și 20 cm și  $M$  este un punct situat pe ipotenuza  $EF$ . Calculați lungimea segmentului  $DM$  în fiecare din situațiile:
- $M$  este mijlocul segmentului  $EF$ ;
  - $MF = 4$  cm.

- 14** Analizați triunghiurile din figura de mai jos. Se știe că punctele  $B, C$  și  $D$  sunt coliniare. Demonstrați că triunghiul  $ACE$  este dreptunghic în două moduri:
- folosind reciproca Teoremei lui Pitagora.
  - fără a folosi reciproca teoremei lui Pitagora.



- 15** Triunghiurile  $OAB, OBC, OCD$  și  $ODE$  sunt dreptunghice,  $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCD = \sphericalangle ODE = 90^\circ$  și  $OA = AB = BC = CD = DE = 1$  cm (vezi figura de mai jos).
- Calculați lungimile segmentelor  $OB, OC, OD, OE$ .
  - Fie  $s = OA + OB + OC + OD + OE$ . Arătați că  $7 < s < 10$ .
  - Descrieți un procedeu prin care se poate construi un segment cu lungimea de  $\sqrt{10}$  cm.



7.3

# Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

## Ne amintim

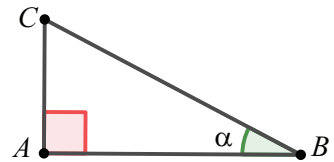
- 1) Într-un triunghi, latura mai mare se opune unghiului mai mare.
- 2) Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este mai mare decât lungimea oricărei catete.
- 3) Dacă într-un triunghi, pătratul lungimii unei laturi este egală cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic, prima latură fiind ipotenuza.
- 4) Într-un triunghi dreptunghic, cu un unghi de  $30^\circ$ , cateta care se opune acestui unghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei

## Descoperim, înțelegem, exemplificăm

**Problemă:** Considerăm triunghiul dreptunghic  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$  și  $\sphericalangle B = 30^\circ$ .

a) Calculați rapoartele:  $\frac{AC}{BC}, \frac{AB}{BC}, \frac{AC}{AB}, \frac{AB}{AC}$ .

b) Stabiliți dacă valoarea rapoartelor calculate depinde de lungimile laturilor triunghiului.



**Soluție:** a) Din  $\sphericalangle A = 90^\circ$  și  $\sphericalangle B = 30^\circ$ , deducem că  $AC = \frac{BC}{2}$ , care se poate scrie  $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ . (1)

Cu teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul  $ABC$ , aflăm  $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{\frac{3 \cdot BC^2}{4}}$ , adică

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC \text{ sau } \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

$$\text{Obținem apoi } \frac{AB}{AC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot BC\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3} \text{ și } \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3)$$

b) Observăm rezultatele (1), (2) și (3) și constatăm că niciunul din rapoartele calculate nu depinde de lungimile laturilor.

**Observație:** Rezultatele care au fost obținute depind doar de următoarele aspecte:

- 1) Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $A$ ;
- 2) Măsura unghiului  $B$  este  $30^\circ$ .
- 3)  $AC$  este cateta opusă unghiului de  $30^\circ$ .

**Concluzie:** Pentru toate triunghiurile dreptunghice care au un unghi de  $30^\circ$ , găsim aceleași valori pentru cele patru rapoarte, independente de lungimile laturilor.

Ne întrebăm: 1) Cum se justifică faptul că aceste rapoarte nu depind de lungimile laturilor?

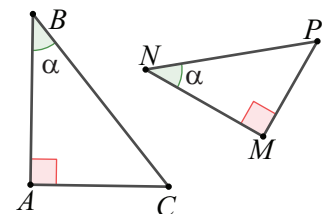
- 2) Rapoartele căutate sunt constante și pentru alte măsuri de unghiuri?
- 3) Ce valori pot avea aceste rapoarte?

Pentru a răspunde, considerăm triunghiurile dreptunghice  $ABC$  și  $MNP$ , astfel încât  $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90^\circ$  și  $\sphericalangle B = \sphericalangle N = \alpha^\circ$ , cu  $0 < \alpha < 90$ .

Rezultă că triunghiurile  $ABC$  și  $MNP$  sunt asemenea (cazul de asemănare U.U.).

Atunci, unghiurile  $C$  și  $P$  sunt, de asemenea, ascuțite și congruente:

$$\sphericalangle C = \sphericalangle P = 90^\circ - \alpha^\circ.$$



Din proporționalitatea laturilor corespunzătoare,  $\frac{AC}{MP} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$ , deducem proporțiile:  $\frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP}$ ,  $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}$

și  $\frac{AC}{MP} = \frac{AB}{MN}$  din care, cu proporții derivate, găsim:  $\frac{AC}{BC} = \frac{MP}{NP}$ ,  $\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$ ,  $\frac{AC}{AB} = \frac{MP}{MN}$ ,  $\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP}$ .

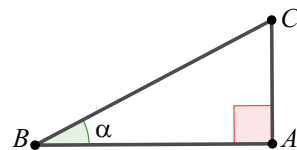
Să observăm că laturile celor două triunghiuri asemenea sunt dispuse astfel:

- 1)  $AC$  și  $MP$  sunt catetele opuse unghiului de măsură  $\alpha^\circ$ ;
- 2)  $AB$  și  $MN$  sunt catetele alăturate unghiului de măsură  $\alpha^\circ$ ;
- 3)  $BC$  și  $NP$  sunt ipotenuzele celor două triunghiuri.

**Concluzie:**

Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi de măsură  $\alpha^\circ$ , cu  $0 < \alpha < 90$ , atunci:

- raportul dintre cateta opusă unghiului de măsură  $\alpha^\circ$  și ipotenuză este constant;
- raportul dintre cateta alăturată unghiului de măsură  $\alpha^\circ$  și ipotenuză este constant;
- raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată unghiului de măsură  $\alpha^\circ$  este constant;
- raportul dintre cateta alăturată și cateta opusă unghiului de măsură  $\alpha^\circ$  este constant.



Folosind rezultatele și notațiile de mai sus, definim relațiile care au loc între raportul a două laturi ale unui triunghi dreptunghic și măsura unui unghi ascuțit al acestui triunghi, numite *relații trigonometrice* în triunghiul dreptunghic.

Definiții	Interpretarea
<b>Definiția 1:</b> Într-un triunghi dreptunghic, cu unghiul ascuțit $B$ de măsură $\alpha^\circ$ , raportul dintre lungimea catetei <i>opuse</i> unghiului $B$ și lungimea <i>ipotenuzei</i> se numește <b>sinusul</b> unghiului și se notează $\sin B$ sau $\sin \alpha^\circ$ .	$\sin B = \frac{AC}{BC}$
<b>Definiția 2:</b> Într-un triunghi dreptunghic, cu unghiul ascuțit $B$ de măsură $\alpha^\circ$ , raportul dintre lungimea catetei <i>alăturate</i> unghiului $B$ și lungimea <i>ipotenuzei</i> se numește <b>cosinusul</b> unghiului și se notează $\cos B$ sau $\cos \alpha^\circ$ .	$\cos B = \frac{AB}{BC}$
<b>Definiția 3:</b> Într-un triunghi dreptunghic, cu unghiul ascuțit $B$ de măsură $\alpha^\circ$ , raportul dintre lungimea catetei <i>opuse</i> unghiului $B$ și lungimea catetei <i>alăturate</i> se numește <b>tangenta</b> unghiului și se notează $\operatorname{tg} B$ sau $\operatorname{tg} \alpha^\circ$ .	$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}$
<b>Definiția 4:</b> Într-un triunghi dreptunghic, cu unghiul ascuțit $B$ de măsură $\alpha^\circ$ , raportul dintre lungimea catetei <i>alăturate</i> unghiului $B$ și lungimea catetei <i>opuse</i> se numește <b>cotangenta</b> unghiului și se notează $\operatorname{ctg} B$ sau $\operatorname{ctg} \alpha^\circ$ .	$\operatorname{ctg} B = \frac{AB}{AC}$ (vezi figura de mai sus)

**Aplicația 1:** Folosind definițiile de mai sus, pentru triunghiul dreptunghic  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$  și  $\sphericalangle B = \alpha^\circ$ ,  $0 < \alpha < 90$ , calculeți:

- a)  $\frac{\sin \alpha^\circ}{\cos \alpha^\circ}$ ;    b)  $\frac{\cos \alpha^\circ}{\sin \alpha^\circ}$ ;    c)  $(\sin \alpha^\circ)^2 + (\cos \alpha^\circ)^2$ ;    d)  $\operatorname{tg} \alpha^\circ \cdot \operatorname{ctg} \alpha^\circ$ .

**Soluție:** a)  $\frac{\sin \alpha^\circ}{\cos \alpha^\circ} = \frac{AC}{BC} : \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} \alpha^\circ$ , deci  $\frac{\sin \alpha^\circ}{\cos \alpha^\circ} = \operatorname{tg} \alpha^\circ$ .

b)  $\frac{\cos \alpha^\circ}{\sin \alpha^\circ} = \frac{AB}{BC} : \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} = \operatorname{ctg} \alpha^\circ$ , deci  $\frac{\cos \alpha^\circ}{\sin \alpha^\circ} = \operatorname{ctg} \alpha^\circ$ .

c)  $(\sin \alpha^\circ)^2 + (\cos \alpha^\circ)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$ , adică  $(\sin \alpha^\circ)^2 + (\cos \alpha^\circ)^2 = 1$ .

d)  $\operatorname{tg} \alpha^\circ \cdot \operatorname{ctg} \alpha^\circ = \frac{\sin \alpha^\circ}{\cos \alpha^\circ} \cdot \frac{\cos \alpha^\circ}{\sin \alpha^\circ} = 1$ .

**Observații:**

- 1) Relațiile obținute la aplicația 1 sunt valabile pentru orice valoare  $\alpha$ , măsură a unui unghi ascuțit.
- 2) Egalitatea  $(\sin \alpha^\circ)^2 + (\cos \alpha^\circ)^2 = 1$  se numește *formula fundamentală a trigonometriei*.
- 3)  $0 < \sin \alpha^\circ < 1$  și  $0 < \cos \alpha^\circ < 1$  pentru orice valoare  $\alpha$ , măsură a unui unghi ascuțit.

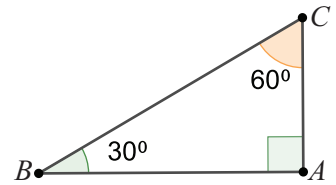


**Aplicația 2:** a) Calculați  $\sin\alpha^\circ$ ,  $\cos\alpha^\circ$ ,  $\operatorname{tg}\alpha^\circ$ ,  $\operatorname{ctg}\alpha^\circ$  pentru  $\alpha \in \{30, 60\}$ .

b) Calculați  $\sin\alpha^\circ$ ,  $\cos\alpha^\circ$ ,  $\operatorname{tg}\alpha^\circ$ ,  $\operatorname{ctg}\alpha^\circ$  pentru  $\alpha = 45^\circ$ .

*Soluție:* În  $\triangle ABC$ , cu  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$  și  $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ , rezultă  $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ .

Notând  $BC = 2 \cdot x$ , lungimile catetelor sunt  $AC = \frac{BC}{2} = x$  și  $AB = x\sqrt{3}$ .



a) Pentru  $\alpha = 30^\circ$  avem:  $\sin 30^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{2 \cdot x} = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{x\sqrt{3}}{2 \cdot x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ și } \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Pentru  $\alpha = 60^\circ$  avem:  $\sin 60^\circ = \frac{AB}{BC} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos 60^\circ = \frac{AC}{BC} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AB}{AC} = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) Pentru  $\alpha = 45^\circ$ : În triunghiul dreptunghic  $ABC$  cu  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$  și  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ , rezultă  $\sphericalangle ACB = 45^\circ$ .

Notăm  $AB = BC = x$  și găsim  $AC = x\sqrt{2}$ . Deci:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1.$$

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

**Aplicația 3:** Sandu se află la 20 de metri de o clădire pe care o vede sub un unghi de  $60^\circ$ .

a) Calculați înălțimea clădirii.

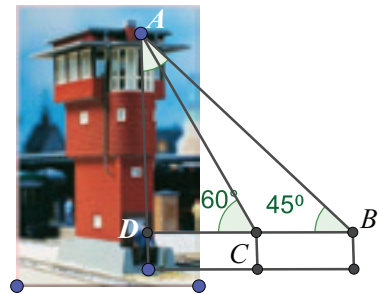
b) Aflați distanța la care trebuie să se afle Sandu pentru a vedea clădirea sub un unghi de  $45^\circ$ .

*Soluție:* a) Sandu se află în punctul  $C$ , la distanța  $CD = 20$  m față de clădire,  $AD$  este înălțimea clădirii,  $\sphericalangle ADC = 90^\circ$  și  $\sphericalangle ACD = 60^\circ$ . În triunghiul dreptunghic  $ADC$ , știm lungimea catetei  $CD$  și vrem să aflăm cateta  $AD$ .

Din  $\operatorname{tg} \sphericalangle ACD = \frac{AD}{CD}$ , obținem  $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AD}{20}$ . Rezultă că înălțimea clădirii este

$$AD = 20 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 20\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

b) Fie  $B$  un punct din care clădirea se vede sub un unghi de  $45^\circ$ ,  $B \in CD$ . Atunci, triunghiul  $ADB$  este dreptunghic isoscel și  $AD = DB = 20\sqrt{3}$  (m), deci Sandu trebuie să se afle la distanța de  $20\sqrt{3} \approx 34,64$  metri pentru a vedea clădirea sub un unghi de  $45^\circ$ .



### Temă de portofoliu

Cum ar putea Sandu să măsoare înălțimea clădirii, folosind cele două poziții din problema precedentă, dar cunoscând doar distanța  $BC$ ?



**Aplicația 4:** Calculați sinusul unghiului  $C$  al triunghiului oarecare  $ABC$ , în care  $AB = 1$  dm,  $BC = 1,4$  dm și  $\sin B = \frac{3}{5}$ .

**Să nu ne pripim!**

Nu putem folosi relația  $\sin B = \frac{AC}{BC}$ , deoarece despre  $\triangle ABC$  nu știm că ar fi dreptunghic.

**Soluție:** Exprimăm lungimile laturilor în centimetri, deci  $AB = 10$  cm,  $BC = 14$  cm. Fie  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ .

În triunghiul  $ABD$ ,  $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ ,  $\sin B = \frac{AD}{AB}$ , adică  $\frac{3}{5} = \frac{AD}{10}$ .

Rezultă  $AD = 6$  cm. Aplicând teorema lui Pitagora, se obține  $BD^2 = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$  (cm)

În triunghiul  $ADC$ ,  $\sphericalangle ADC = 90^\circ$ ,  $AD = 6$  cm și  $DC = BC - BD = 6$  (cm).

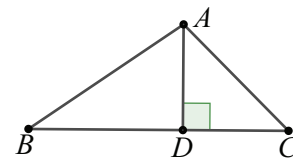
Triunghiul  $ADC$  este dreptunghic isoscel,  $\sphericalangle ACD = \sphericalangle C = 45^\circ$  și  $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Aplicația 5:** Într-un triunghi  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = \sphericalangle B + \sphericalangle C$ ,  $AC = 5\sqrt{5}$  cm și  $\sin \sphericalangle ACB = \frac{2}{3}$ . Arătați că perimetrul triunghiului este mai mare decât 36 cm.

**Soluție:** Relația  $\sphericalangle A = \sphericalangle B + \sphericalangle C$  ne evocă egalitatea provenită din suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Folosind acestea vom ajunge la  $\sphericalangle A + \sphericalangle A = 180^\circ$ , deci triunghiul  $ABC$  este dreptunghic, cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ .

Din  $\sin \sphericalangle ACB = \frac{2}{3}$ , deducem  $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ , prin urmare putem nota  $AB = 2x$ ,  $BC = 3x$ , unde  $x > 0$ .

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul  $ABC$ , obținem  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , adică  $(3x)^2 = (2x)^2 + (5\sqrt{5})^2$ . Prin calcul, găsim  $x = 5$  cm,  $BC = 15$  cm și  $AB = 10$  cm și  $P_{\triangle ABC} = 25 + 5\sqrt{5} \geq 25 + 5 \cdot 2,2 = 36$  (cm).



**Reținem!**



Într-un triunghi dreptunghic:

- *sinusul* unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei opuse acestui unghi și lungimea ipotenuzei.
- *cosinusul* unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei alăturate acestui unghi și lungimea ipotenuzei.
- *tangenta* unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate acestui unghi.
- *cotangenta* unui unghi ascuțit este raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea catetei opuse acestui unghi.

	$\alpha$		
	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg } \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{ctg } \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

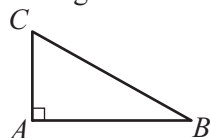




Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

**1** Fie triunghiul  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ . Copiați pe caiete și completați spațiile libere cu rapoartele corespunzătoare:

$\sin B = \dots$                        $\operatorname{tg} B = \dots$   
 $\cos C = \dots$                        $\operatorname{ctg} C = \dots$



**2** În triunghiul  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm. Notând măsura unghiului  $B$  cu  $u^\circ$  și măsura unghiului  $C$  cu  $v^\circ$ , copiați pe caiete și completați tabelul:

	$u^\circ$	$v^\circ$
sin		
cos		
tg		
ctg		

**3** În triunghiul  $DEF$ ,  $\sphericalangle D = 90^\circ$ ,  $DE = 8$  cm și  $\sin F = 0,8$ . Calculați perimetrul triunghiului.

**4** Fie  $u^\circ$  măsura unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic.

a) Dacă  $\sin u^\circ = \frac{12}{13}$ , calculați  $\cos u^\circ$ .

b) Dacă  $\cos u^\circ = \frac{1}{6}$ , calculați  $\operatorname{tg} u^\circ$ .

c) Dacă  $\operatorname{tg} u^\circ = \frac{3}{4}$ , calculați  $\sin u^\circ$ .

**5** Calculați:

a)  $\sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ$

b)  $\sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$

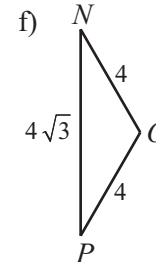
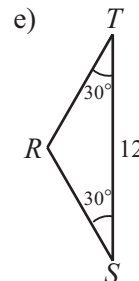
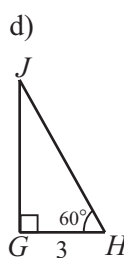
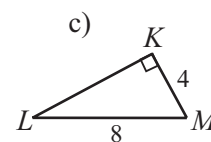
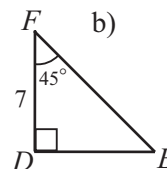
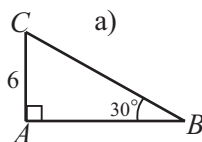
**6** Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic,  $\sphericalangle B = 90^\circ$ ,  $BD \perp AC$ ,  $D \in AC$ ,  $AD + DC = 10$  cm și  $3 \cdot AD = 2 \cdot CD$ .

a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.

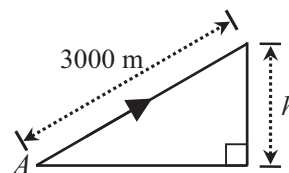
b) Calculați  $\sin C$ ,  $\operatorname{tg} A$  și  $\cos \sphericalangle CBD$ .

**7** Fie triunghiul  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$  și  $D = pr_{BC}A$ . Dacă  $AD = 8$  cm și  $BD = 4$  cm, calculați  $\sin B + \sin C$ .

**8** Aflați măsurile unghiurilor și lungimile laturilor pentru triunghiurile din figurile de mai jos:



**9** Un avion se desprinde de la sol în punctul  $A$  și urcă sub un unghi de  $30^\circ$ . Aflați la ce altitudine  $h$  ajunge după ce parcurge 3000 m.



**10** Calculați aria și perimetrul triunghiului  $MNP$  știind că  $\sphericalangle M = 90^\circ$ ,  $MN = 18$  cm și  $\operatorname{tg} P = \frac{3}{4}$ .

**11** În trapezul  $ABCD$ , avem  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 60^\circ$ ,  $BC = 8$  cm,  $CD = 12$  cm.

a) Calculați înălțimea trapezului.

b) Demonstrați că  $AC \perp BC$ .

**12** Triunghiul  $DEF$  este isoscel,  $DE = DF = 18$  cm,  $EF = 24$  cm. Calculați sinusul unghiului  $\sphericalangle DEF$ .



## L1 Rezolvarea triunghiului dreptunghic

## Ne amintim

- 1) Elementele unui triunghi dreptunghic sunt: ipotenuza, cele două catete, unghiul drept și cele două unghiuri ascuțite.
- 2) Un poligon care are toate laturile și toate unghiurile congruente se numește poligon regulat.
- 3) Orice poligon regulat poate fi înscris într-un cerc.

## Descoperim, înțelegem, exemplificăm

Prin rezolvarea triunghiului dreptunghic înțelegem demersul logic pe care îl urmăm pentru aflarea tuturor elementelor triunghiului dreptunghic (toate laturile și toate unghiurile) atunci când sunt cunoscute un număr cât mai mic de elemente ale acestuia.

## Exemple:

- 1) Dacă se cunosc două laturi, se poate afla a treia latură folosind teorema lui Pitagora. Apoi se pot afla și măsuri de unghiuri cu ajutorul rapoartelor de laturi (relații trigonometrice)
- 2) Dacă se cunoaște un unghi ascuțit, celălalt unghi ascuțit este complementul primului unghi; despre laturi nu obținem informații. Nu avem suficiente date pentru rezolvarea triunghiului.

Să analizăm două din cazurile care permit rezolvarea triunghiului dreptunghic:

**C<sub>1</sub>: Dacă se cunosc lungimile a două laturi ale triunghiului dreptunghic.**

- 1) Se determină lungimea celei de-a treia laturi, folosind teorema lui Pitagora.
- 2) Se calculează raportul dintre cateta opusă unui unghi și ipotenuză și se determină sinusul celui unghi ascuțit. Dacă este una dintre valorile care au fost determinate pentru unghiurile de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ , atunci se pot afla și unghiurile ascuțite. Dacă nu este una dintre aceste valori, atunci se poate aproxima valoarea unghiului, folosind tabele care conțin valori aproximative ale sinusului unghiurilor ascuțite sau folosind calculatorul.

**Aplicația 1:** Se consideră triunghiul  $ABC$  în care  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $AB = 4$  cm,

$AC = 4\sqrt{3}$  cm. Aflați lungimea ipotenuzei și măsurile unghiurilor ascuțite.

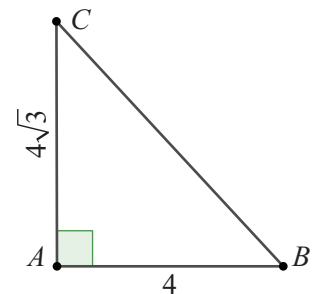
**Soluție:** Calculăm ipotenuza  $BC$  cu teorema lui Pitagora:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8 \text{ (cm)}.$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ care este o valoare cunoscută, deci putem}$$

afla unghiurile ascuțite  $\sphericalangle B = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

**Observație:** În aplicația de mai sus se cunosc ambele catete. Demersul este similar atunci când se cunoaște o catetă și ipotenuza.



**Temă de portofoliu**

Rezolvați triunghiul  $MNP$ , cu  $\sphericalangle M = 90^\circ$ ,  $MN = 12$  cm și  $NP = 12\sqrt{2}$  cm.

**$C_2$ : Dacă se cunoaște lungimea unei laturi și un raport între lungimile laturilor (una din valorile: sinusul, cosinusul, tangenta, cotangenta unui unghi ascuțit al triunghiului)**

Se disting două situații:

- a) Latura a cărei lungime se cunoaște este una dintre laturile raportului. Atunci, se află cealaltă latură din raport și am ajuns la cazul  $C_1$ , deci se pot afla toate elementele triunghiului.
- b) Latura a cărei lungime se cunoaște nu apare în raportul dat.

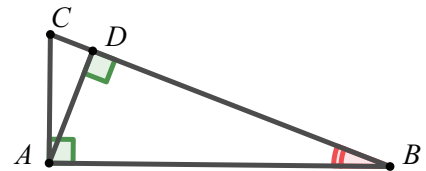
Sunt posibile situațiile:

- b<sub>1</sub>) raportul dat și latura cunoscută permit aflarea lungimilor celorlalte două laturi folosind teorema lui Pitagora și am ajuns la cazul  $C_1$ .
- b<sub>2</sub>) raportul dat ne dă posibilitatea să aflăm un alt raport, în care intervine latura cunoscută și am ajuns, din nou, la cazul  $C_1$ .

**Aplicația 2:**

În triunghiul  $ABC$ , se cunosc  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $\text{ctg} \sphericalangle ABC = 3$  și  $BC = 5$  cm. Fie  $AD$  înălțimea corespunzătoare ipotenuzei. Aflați valorile expresiilor:

- a)  $E_1 = AB \cdot AC \cdot \frac{1}{AD}$
- b)  $E_1 = AB \cdot \sin C + AC \cdot \sin B$ .



*Soluție:* a) Aflăm lungimile segmentelor  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ .

În triunghiul dreptunghic  $ABC$ , avem  $\text{ctg} B = \frac{AB}{AC} = 3$ . Atunci,  $\frac{AB^2}{AC^2} = 9$ ,  $\frac{AB^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{9}{10}$

sau  $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{25} = \frac{9}{10}$ . Obținem  $AB = \frac{3\sqrt{10}}{2}$  (cm),  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$  (cm) și

$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{2} \text{ (cm)}. \quad E_1 = \frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

b) Pentru expresia  $E_2$  scriem rapoartele  $\sin C$ ,  $\sin B$  și, fără a înlocui lungimile lor, se calculează

$$AB \cdot \sin C + AC \cdot \sin B = AB \cdot \frac{AB}{BC} + AC \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC} = \frac{BC^2}{BC} = BC = 5 \text{ (cm)}$$

**Comentariu:** Măsura exactă a unghiurilor nu poate fi aflată, deoarece valoarea pentru  $\text{ctg} \sphericalangle ABC = 3$  nu este printre cele determinate de noi. Pentru aflarea unghiului  $ABC$  și a complementului său, se pot folosi tabelele de valori aproximative.





## Aplicații ale triunghiului dreptunghic în determinarea elementelor unor poligoane regulate și în situații practice

### Știm să aplicăm, identificăm conexiuni

#### A. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat

Când vorbim de un poligon regulat, ne referim la: *latura poligonului*, *unghi al poligonului*, *raza cercului circumscris poligonului*, *diagonalele poligonului*, *apotema poligonului*, *perimetrul și aria acestuia*.

În numeroase cazuri, cunoaștem un element sau câteva dintre elementele unui poligon regulat și le determinăm pe celelalte.

Vom studia, în acest sens, poligoanele regulate cu 3, 4 respectiv 6 laturi. Notăm  $L$  latura poligonului regulat cu  $n$  laturi,  $n \in \{3, 4, 6\}$  și  $R$  raza cercului circumscris acestui poligon. Vom determina câteva relații foarte utile.

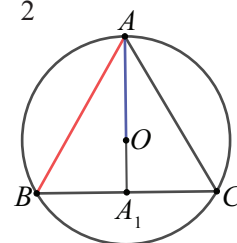
#### A<sub>1</sub>. Relația între lungimea laturii unui poligon regulat și raza cercului circumscris

- În triunghiul echilateral  $ABC$ , liniile importante ale triunghiului coincid și se intersectează în  $O$ , centrul cercului circumscris. Punctul  $O$  aparține medianei  $AA_1$ , pe care o împarte în raportul  $\frac{OA_1}{OA} = \frac{1}{2}$ .

În triunghiul dreptunghic  $ABA_1$  notăm  $AB = L$ , iar  $BA_1 = \frac{L}{2}$ .

Calculăm cu teorema lui Pitagora  $AA_1 = \sqrt{AB^2 - BA_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ .

Pentru raza  $AO$ , avem:  $R = AO = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{L}{\sqrt{3}}$ , deci  $L = R\sqrt{3}$ .



- Pătratul  $ABCD$  este înscris în cercul de centru  $O$ .

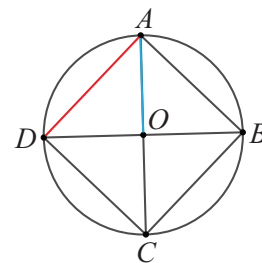
Diagonalele pătratului sunt diametre, deci  $O$  este punctul de intersecție a diagonalelor și determină segmente congruente (le înjumătățește).

În triunghiul dreptunghic  $ADB$ , notăm  $AB = L$ , iar cu teorema lui Pitagora calculăm

$$DB = \sqrt{AB^2 + AD^2} = L\sqrt{2}.$$

Raza cercului circumscris este oricare din segmentele  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ , deci

$$R = OB = \frac{1}{2}BD = \frac{L}{\sqrt{2}}. \text{ Am obținut } L = R\sqrt{2}.$$



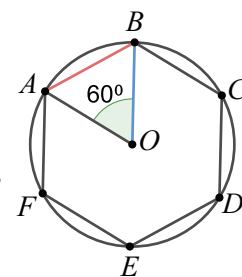
- Hexagonul  $ABCDEF$  este înscris în cercul de centru  $O$ .

Unghiul la centru corespunzător unei laturi are măsura  $360^\circ : 6 = 60^\circ$ .

În triunghiul echilateral  $AOB$  notăm cu  $AB = L$ , iar raza este  $OA$ .

Am obținut  $L = R$ .

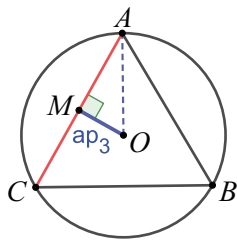
- Pentru poligonul regulat cu  $n$  laturi, triunghiurile cu vârful în centrul cercului circumscris și o latură comună cu latura poligonului sunt isoscele și congruente (au două laturi raze ale cercului, iar a treia este chiar latura patrulaterului regulat). Deducem că în toate aceste triunghiuri, înălțimile duse din vârful  $O$ , sunt congruente, adică distanța de la centrul cercului circumscris la oricare dintre laturile poligonului, este aceeași.



**Definiția 1:** Distanța de la centrul cercului circumscris la o latură unui poligon regulat se numește **apotemă** a poligonului.

Pentru un poligon regulat cu  $n$  laturi, notăm apotema poligonului cu  $a_n$ .

## A<sub>2</sub>. Relația dintre apotemă și raza cercului circumscris

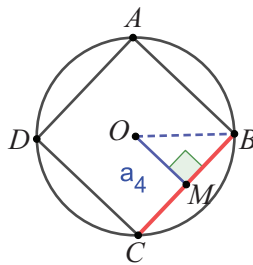


$$d(O, AC) = a_3$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul  $AOM$ :

$$a_3 = OM = \sqrt{AO^2 - AM^2}$$

$$a_3 = \frac{L\sqrt{3}}{6} = \frac{R}{2}$$

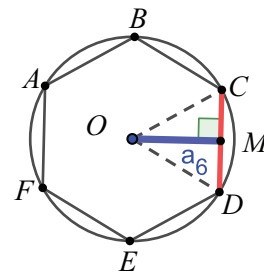


$$d(O, BC) = a_4$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul  $BOM$ :

$$a_4 = OM = \sqrt{BO^2 - BM^2}$$

$$a_4 = \frac{L}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$



$$d(O, CD) = a_6$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul  $COM$ :

$$a_6 = OM = \sqrt{CO^2 - CM^2}$$

$$a_6 = \frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

## A<sub>3</sub>. Unghiurile poligonului regulat

Cu notațiile din figurile de la aplicația  $A_2$ , au loc relațiile:

	Triunghiul echilateral $ABC$	Pătratul $ABCD$	Hexagonul regulat $ABCDEF$
Unghiul format de două laturi alăturate	$\sphericalangle ABC = 60^\circ$	$\sphericalangle ABC = 90^\circ$	$\sphericalangle ABC = 120^\circ$
Unghiul la centru corespunzător unei laturi	$\sphericalangle AOB = 120^\circ$	$\sphericalangle AOB = 90^\circ$	$\sphericalangle AOB = 60^\circ$

## A<sub>4</sub>. Perimetrul și aria poligoanelor regulate

Calculăm perimetrul unui poligon regulat cu  $n$  laturi ca suma lungimilor tuturor laturilor:  $\mathcal{P}_n = n \cdot L$ .

$$\mathcal{P}_3 = 3 \cdot L$$

$$\mathcal{P}_4 = 4 \cdot L$$

$$\mathcal{P}_6 = 6 \cdot L$$

Descompunem suprafața poligonală în  $n$  suprafețe triunghiuri isoscele congruente, cu vârful în centrul cercului circumscris, având ca bază o latură a poligonului. Apotema poligonului devine înălțime a acestor triunghiuri. Rezultă formula pentru aria poligonului regulat cu  $n$  laturi:  $\mathcal{A}_n = n \cdot \frac{L \cdot a_n}{2}$

$$\mathcal{A}_3 = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\mathcal{A}_4 = L^2$$

$$\mathcal{A}_6 = 6 \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$



**Aplicația 1:** Un triunghi și un pătrat au vârfurile pe același cerc.

a) Dacă latura triunghiului echilateral este de 12 cm, calculați apotema pătratului.

b) Dacă aria pătratului este  $72 \text{ cm}^2$ , aflați apotema triunghiului.

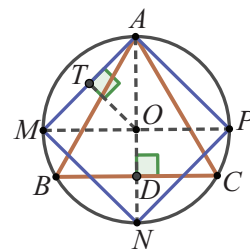
*Soluție:* Vârfurile poligoanelor regulate  $ABC$  și  $AMNP$  sunt situate pe cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ .

a) Fie  $AD$  înălțime în triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 12 \text{ cm}$ . Atunci,  $\sphericalangle ADB = 90^\circ$  și în triunghiul

$$ABD \text{ cu } \sphericalangle ABD = 60^\circ, \text{ calculăm } AD, \sin(\sphericalangle ABD) = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AD}{12} \Rightarrow AD = 6\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Dar  $O \in AD$  și  $AO = R = \frac{2}{3} \cdot AD = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$ . În triunghiul  $AOM$ ,  $\sphericalangle AOM = 90^\circ$ ,  $AO = OM = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}$ ,

$\sphericalangle MAO = 45^\circ$ , iar  $AM$  este latura pătratului. Fie  $OT \perp AM$ ,  $T \in AM$ . Rezultă  $\sphericalangle ATO = 90^\circ$  și  $OT$  este apotema pătratului.





În triunghiul  $ATO$  avem  $\sin(\sphericalangle TAO) = \frac{OT}{AO} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OT}{4\sqrt{3}} \Rightarrow OT = a_4 = 2\sqrt{6}$  (cm).

b)  $\mathcal{A}_{AMNP} = 72 \text{ cm}^2$ , rezultă  $AM^2 = 72$ , deci  $AM = 6\sqrt{2}$  cm. În triunghiul  $AMN$  dreptunghic isoscel cu  $AM = MN = 6\sqrt{2}$  (cm), se obține  $AN = AM \sqrt{2} = 12$  (cm).  $AN$  este diametru al cercului deci  $R = AO = 6$  (cm).

În triunghiul echilateral  $ABC$ ,  $AD$  este înălțime,  $O \in AD$  și  $OD = a_3 = \frac{R}{2} = 3$  (cm).

**Aplicația 2:** Punctele  $A$  și  $B$  aparțin unui cerc  $\mathcal{C}(O,R)$ , cu  $\widehat{AB} = 120^\circ$  și  $AB = 24\sqrt{3}$  cm. Aflați raza cercului și apotema hexagonului regulat cu vârfurile pe cercul  $\mathcal{C}(O,R)$ .

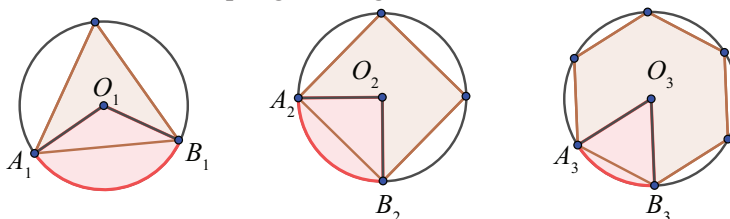
*Soluție:* Dacă măsura arcului mic este  $120^\circ$ , atunci  $AB$  este latura triunghiului echilateral (vezi  $A_3$ ).

Deci  $AB = L = R\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ . Rezultă  $R = 24$ , iar  $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ .

**Aplicația 3:** Se consideră discul de diametru 10 cm. Decideți care dintre poligoanele regulate cu 3, 4 sau 6 laturi se poate decupa din acest disc astfel încât pierderea de material să fie minimă.

Exprimați suprafața îndepărtată, în procente.

*Soluție:* Figurile corespunzătoare celor trei poligoane regulate sunt:



Aria suprafeței îndepărtate (pierdute) este diferența dintre aria discului și aria poligonului regulat.

	Aria suprafeței materialului pierdut	Procentul
Triunghi	$\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{4}$	$\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4\pi} \cdot 100\% \approx 58,65\%$
Pătrat	$\pi R^2 - 2 \cdot R^2 = (\pi - 2)R^2$	$\frac{\pi - 2}{\pi} \cdot 100\% \approx 36,3\%$
Hexagon	$\pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{2}$	$\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi} \cdot 100\% \approx 17,30\%$

Exprimarea procentuală arată că, în cazul hexagonului, se pierde cel mai puțin material.

## B. Calculul distanțelor, în situații practice, folosind relații metrice

### Aplicația 1:

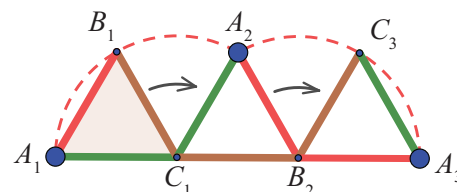
Triunghiul echilateral  $ABC$  are latura 10 cm. Rostogolim triunghiul, fără alunecare, pe dreapta  $AB$ . Calculați lungimea arcelor parcurse de punctul  $A$ . Desenați pe caiete traiectoria parcursă de punctul  $A$  până ajunge din nou pe dreapta  $AB$ .

*Soluție:* Considerăm  $A_1B_1C_1$  poziția inițială a triunghiului echilateral dat.

Acesta s-a rotit în jurul lui  $C_1$  cu  $120^\circ$ . Punctul  $A_1$  descrie arcul  $\widehat{A_1B_1A_2}$ , care are lungimea egală cu o treime din lungimea cercului de rază 10 cm

(corespunde unui unghi la centru de  $120^\circ$  care este o treime din unghiul de  $360^\circ$ ).

Astfel, punctul  $A$  ajunge din poziția  $A_1$  în poziția  $A_2$ . Triunghiul continuă rostogolirea, rotindu-se cu un unghi de  $120^\circ$  în jurul punctului  $B_2$ , iar  $A$  descrie arcul  $\widehat{A_2C_2A_3}$ , congruent cu primul arc. Așadar, lungimea arcelor parcurse de punctul  $A$  de pe „roata triunghi” este  $2 \cdot \frac{2\pi \cdot R}{3} = \frac{4\pi \cdot R}{3} = \frac{40\pi}{3}$ .

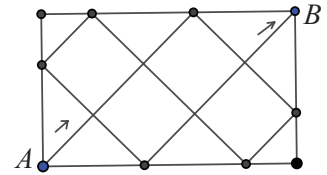


**Temă de portofoliu**

Formulați și rezolvați aceeași cerință pentru „roata” pătrat sau hexagon.

**Aplicația 2**

O masă dreptunghiulară de biliard are dimensiunile în raportul 3 : 5. Arătați că dacă lansez o bilă din unul din colțuri la un unghi de  $45^\circ$  față de laturile mesei, acesta având o reflexie perfectă cu marginile mesei în cele șase puncte, va ajunge exact în colțul opus. Găsiți raportul dintre lungimea traseului parcurs de bilă și perimetrul mesei.



*Soluție:* Notând dimensiunile dreptunghiului cu  $3L$  și  $5L$  avem perimetrul  $16L$  iar triunghiurile pe ipotenuza cărora merge bila sunt dreptunghice isoscele, având, în această ordine, dimensiunile:

$3\sqrt{2}L, 2\sqrt{2}L, \sqrt{2}L, 3\sqrt{2}L, \sqrt{2}L, 2\sqrt{2}L, 3\sqrt{2}L$  adică lungimea parcursă de bilă este  $15\sqrt{2}L$ . Raportul dintre lungimea traseului parcurs de bilă și perimetrul mesei este  $\frac{15\sqrt{2}}{16}$ .



**Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm**

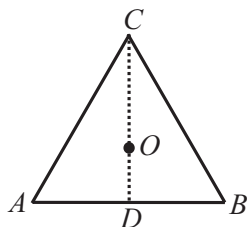
- 1** Fie triunghiul  $ABC$  cu  $\sphericalangle A = 90^\circ$ .
  - a) Dacă  $AB = 4$  cm și  $\sphericalangle B = 60^\circ$ , aflați  $\sphericalangle C$ ,  $AC$ ,  $BC$ .
  - b) Dacă  $AC = 12$  cm și  $\sin B = 0,6$ , aflați  $AB$ ,  $BC$  și  $\operatorname{tg} B$ .
  - c) Dacă  $AB = 3 \cdot AC$  și  $BC = \sqrt{10}$  cm, aflați  $\sin B$  și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.
- 2**  $AD$  este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei triunghiului  $ABC$ ,  $AD = 18$  cm și  $\operatorname{tg} \sphericalangle ACB = 2$ . Calculați  $AC$ ,  $AB$  și  $\sin \sphericalangle ABC$ .
- 3** Se consideră triunghiul dreptunghic  $ABC$  cu  $\sphericalangle B = 90^\circ$ . Calculați lungimile laturilor triunghiului, măsurile unghiurilor și înălțimea corespunzătoare ipotenuzei, în următoarele situații:
  - a)  $\sphericalangle A = \sphericalangle C$  și  $AC = 12\sqrt{2}$  cm;
  - b)  $AB = 8$  cm și  $\operatorname{tg} C = \sqrt{3}$ ;
  - c)  $BC = 2\sqrt{3}$  și  $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = 2\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.
- 4**  $ABCD$  este un dreptunghi,  $M$  este mijlocul laturii  $CD$ , iar  $N \in BC$ , astfel încât  $\sphericalangle DAM = \sphericalangle CMN = u$ .
  - a) Arătați că triunghiul  $AMN$  este dreptunghic.
  - b) Dacă  $u = 30^\circ$  și  $AB = 2\sqrt{3}$  cm, calculați raportul dintre aria triunghiului  $AMN$  și aria dreptunghiului.
- 5** În triunghiul  $DEF$ ,  $\sphericalangle D = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle E = 60^\circ$  și  $DF = 3\sqrt{2}$  cm.
  - a) Calculați  $FM$ , înălțimea corespunzătoare laturii  $DE$ .
  - b) Calculați perimetrul triunghiului  $FME$ .
  - c) Arătați că latura  $DE$  are lungimea mai mare de 4,7 cm.
- 6** Fie triunghiul  $ABC$  cu  $AB = 30$  cm,  $BC = 24$  cm,  $CA = 18$  cm și  $P$  mijlocul laturii  $AB$ . Aflați  $n = \sin \sphericalangle ACP + \sin \sphericalangle BCP$ .
- 7** În triunghiul  $ABC$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle C = 15^\circ$  și  $AD$  este înălțimea triunghiului.
  - a) Desenați mediana  $AM$  a triunghiului  $ABC$  și determinați măsurile unghiurilor triunghiului  $ADM$ .
  - b) Dacă  $BC = 4a$ , exprimați lungimile segmentelor  $AM$  și  $MD$  în funcție de  $a$ .
  - c) Demonstrați că  $4 \cdot AD^2 = AC \cdot AB$ .
- 8** Punctele  $A, B, C$  sunt coliniare în această ordine,  $AB = 2$  cm,  $BC = 8$  cm și  $DB \perp AC$ ,  $DB = 4$  cm.
  - a) Calculați  $\sin \sphericalangle ADB + \sin \sphericalangle BDC$ .
  - b) Aflați perimetrul triunghiului  $ADC$ .
- 9** În triunghiul oarecare  $TRI$  se știe că  $\sphericalangle R = 60^\circ$ ,  $TR = 8$  cm,  $RI = 12$  cm, iar  $TA \perp RI$ ,  $A \in RI$ .
  - a) Aflați lungimile segmentelor  $AR$  și  $TI$ .
  - b) Punctul  $B$  este simetricul punctului  $R$  față de mijlocul segmentului  $AI$ . Demonstrați că triunghiul  $BTR$  este dreptunghic.

**10**  $ABCD$  este un romb cu  $AB = 24$  cm și  $AC \cap BD = \{O\}$ . Știind că  $\frac{AO}{BO} = \sqrt{3}$ , calculați lungimile diagonalelor rombului.

**11** În trapezul dreptunghic  $ABEF$ ,  $AB \parallel EF$ ,  $\sphericalangle A = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle B = 60^\circ$ ,  $AB = 15$  cm și  $BF$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle ABE$ .

- Calculați lungimea bazei mici a trapezului.
- Dacă  $C$  este mijlocul diagonalei  $BF$ , aflați perimetrul triunghiului  $ACE$ .

**12** În figura alăturată,  $ABC$  este un triunghi echilateral și  $O$  este centrul cercului circumscris.



Precizați segmentul a cărui lungime reprezintă:

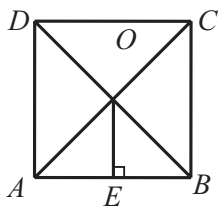
- raza cercului circumscris;
- raza cercului înscris;
- apotema triunghiului.

**13** În tabelul următor  $l$ ,  $R$ ,  $a$ ,  $\mathcal{P}$  și  $\mathcal{A}$  reprezintă latura, raza cercului circumscris, apotema, perimetrul și aria unui triunghi echilateral (dimensiunile sunt date în cm, respectiv  $\text{cm}^2$ ).

	$l$	$R$	$a$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{A}$
a)	18				
b)		$4\sqrt{3}$			
c)			$3\sqrt{3}$		
d)					$36\sqrt{3}$

Copiați pe caiete și completați spațiile libere, efectuând calculele necesare.

**14** În figura alăturată,  $ABCD$  este un pătrat și  $O$  este punctul de intersecție a diagonalelor. Precizați segmentul a cărui lungime reprezintă:

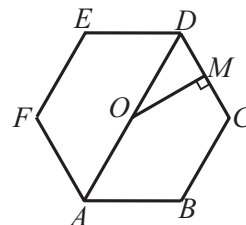


- diametrul cercului circumscris;
- raza cercului înscris;
- apotema pătratului.

**15** În tabelul următor  $l$ ,  $R$ ,  $a$ ,  $\mathcal{P}$  și  $\mathcal{A}$  reprezintă latura, raza cercului circumscris, apotema, perimetrul și aria unui pătrat (cm, respectiv  $\text{cm}^2$ ). Copiați pe caiete și completați spațiile libere, efectuând calculele necesare.

	$l$	$R$	$a$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{A}$
a)	8				
b)		$10\sqrt{2}$			
c)			5		
d)					3,24

**16** În figura alăturată  $ABCDEF$  este un hexagon regulat și  $O$  este centrul cercului circumscris. Precizați segmentul a cărui lungime reprezintă:



- raza cercului circumscris;
- raza cercului înscris;
- apotema.

**17** În tabelul următor  $l$ ,  $R$ ,  $a$ ,  $\mathcal{P}$  și  $\mathcal{A}$  reprezintă latura, raza cercului circumscris, apotema, perimetrul și aria unui hexagon regulat. Completați spațiile libere efectuând calculele necesare.

	$l$	$R$	$a$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{A}$
a)				36	
b)		3			
c)			$\sqrt{3}$		
d)					$144\sqrt{3}$

**18** Fie  $ABCDEF$  un hexagon regulat cu latura de 24 cm. Calculați:

- Măsurile unghiurilor  $\sphericalangle ACB$  și  $\sphericalangle BDF$ .
- Raza cercului circumscris hexagonului.
- Perimetrul triunghiului  $ADE$ .
- Aria patrulaterului  $ACDF$ .

**19** Aflați latura unui triunghi echilateral știind că diferența dintre raza cercului circumscris și apotemă este de 2 cm.

**20** În cercul  $\mathcal{C}(O, R)$ ,  $R = \sqrt{11}$  cm, sunt înscrise un triunghi echilateral, un pătrat și un hexagon regulat. Notând  $l_3$ ,  $l_4$  respectiv  $l_6$  lungimile laturilor acestor poligoane, calculați

$$l_3^{-2} + l_4^{-2} + l_6^{-2}$$



**Evaluare sumativă**

Se acordă 10 puncte din oficiu.

**I.** La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p	1. Lungimea diagonalei unui pătrat cu aria de $200 \text{ cm}^2$ este: A. 30 cm                      B. 24 cm                      C. 20 cm                      D. 15 cm
5p	2. Un triunghi isoscel are laturile congruente de 15 cm și înălțimea corespunzătoare bazei de 9 cm. Baza triunghiului are lungimea: A. 24 cm                      B. 20 cm                      C. 28 cm                      D. 32 cm
5p	3. În triunghiul dreptunghic $ABC$ , $\sphericalangle A = 90^\circ$ , $AD$ este înălțime, $BD = 3 \text{ cm}$ , iar $CD = 12 \text{ cm}$ . Segmentul $AD$ are lungimea: A. 8 cm                      B. 9 cm                      C. 10 cm                      D. 6 cm
5p	4. Un sector de cerc are aria o optime din aria discului din care provine. Măsura unghiului la centru este: A. $30^\circ$ B. $45^\circ$ C. $60^\circ$ D. $15^\circ$
5p	5. Triunghiul $ABC$ are $AB = 6 \text{ cm}$ , $BC = 8 \text{ cm}$ , $AC = 10 \text{ cm}$ . Proiecția segmentului $AB$ pe dreapta $AC$ are lungimea: A. 3,2 cm                      B. 2,4 cm                      C. 6,3 cm                      D. 3,6 cm
5p	6. În trapezul isoscel $ABCD$ , $AB \parallel CD$ , $AB = 17 \text{ cm}$ , $CD = 5 \text{ cm}$ și $\cos \sphericalangle BAD = 0,75$ . Laturile neparalele au lungimea de: A. 8 cm                      B. 10 cm                      C. 12 cm                      D. 16 cm
5p	7. Un triunghi dreptunghic are înălțimea corespunzătoare ipotenuzei de $6\sqrt{2} \text{ cm}$ și proiecția unei catete pe ipotenuză de 6 cm. Aria triunghiului este: A. $36\sqrt{2}$ B. $18\sqrt{2}$ C. $54\sqrt{2}$ D. $48\sqrt{2}$
5p	8. Distanța de la centrul de greutate al unui triunghi echilateral la una dintre laturi este 2 cm. Raza cercului circumscris triunghiului are lungimea: A. 2 cm                      B. 4 cm                      C. 1 cm                      D. 6 cm

**II.** La problemele următoare se cer rezolvări complete.

5p	1. În dreptunghiul $ABCD$ , cu $AB < BC$ , diagonalele se intersectează în punctul $O$ , iar $BO = 10 \text{ cm}$ . Punctul $P$ este proiecția punctului $B$ pe diagonala $AC$ și $AP - CP = 12 \text{ cm}$ .	
10p	a) Realizați un desen care să corespundă datelor problemei.	
10p	b) Calculați lungimile segmentelor $AC$ și $BP$ .	
10p	c) Aflați tangenta unghiului format de diagonalele dreptunghiului.	
10p	2. În figura alăturată, linia punctată reprezintă schița unui circuit de motociclism viteză. Pista circuitului înconjoară un teren compus din hexagonal regulat $ABHIJK$ , pătratele $BCDE$ , $EFGH$ și triunghiul echilateral $BEH$ . Se știe că $AB = 450 \text{ m}$ , iar lungimea pistei este cu 20% mai mare decât perimetrul terenului înconjurat de pistă.	
15p	a) Calculați lungimea pistei exprimând rezultatul în km. b) În timpul competițiilor, o camera video aeriană se deplasează pe un cablu, pe traseul $EM$ și transmite imagini de la cursele de motociclism. Arătați $EM < 1,3 \text{ km}$ .	

**1** Efectuați următoarele calcule cu numere reale:

a)  $1 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}$     b)  $10 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}$     c)  $\sqrt{64 + 3 \cdot \sqrt{144}}$   
 d)  $\sqrt{306 + 2 \cdot \sqrt{33 + 3 \cdot \sqrt{256}}}$     e)  $\frac{1}{2}\sqrt{64} + \frac{1}{3}\sqrt{81} + \frac{1}{4}\sqrt{144}$     f)  $0, (7) \cdot \sqrt{36} - 2,5 \cdot \sqrt{400}$   
 g)  $\sqrt{25^{n+1} \cdot 5^{2n}}$     h)  $\sqrt{2^{2n+1} + 3 \cdot 4^n + 4^{n+1}}$     i)  $\sqrt{(-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2}$ .

**2** a) Arătați că numărul  $A = \frac{\sqrt{24,01} + \sqrt{37,21}}{\sqrt{4,84} + \sqrt{10,89}}$  este număr natural.

b) Arătați că numărul  $B = \sqrt{146,41} : (-\sqrt{1,21})$  este număr întreg.

**3** Scrieți prin enumerarea elementelor mulțimea  $M = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{0, (4)} < x < \sqrt{1 + 4, (4)}\}$ .

**4** Determinați numerele naturale  $n$  pentru care numerele următoare sunt raționale.

a)  $\sqrt{\frac{16}{n}}$ ,  $n < 20$ ;    b)  $\sqrt{\frac{5-n}{n}}$ ;    c)  $\sqrt{\frac{100-n^2}{81}}$ ;    d)  $\sqrt{\frac{1}{50-n^2}}$ .

**5** Reprezentați pe axa numerelor punctele  $A(-2)$ ,  $B(\sqrt{2})$ ,  $C(4 - \sqrt{2})$ ,  $D(5)$ . Determinați lungimile segmentelor  $AB$  și  $CD$ . Stabiliți care dintre ele este mai mare. Justificați răspunsul dat.

**6** Se consideră numerele  $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-1} + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^{-3}$  și  $b = \left(\frac{2}{\sqrt{27} - \sqrt{3}}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$ .

Aflați numărul  $c = |1 + a| + |7 - \sqrt{6} \cdot b|$ .

**7** Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor  $x$  și  $y$ , știind că

$$\sqrt{(x - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(y - 2\sqrt{2})^2} \leq 0.$$

**8** Rezolvați următoarele sisteme de ecuații liniare:

a) 
$$\begin{cases} 2 \cdot (x - 2) + 3 \cdot \left(y - \frac{1}{3}\right) = 2 \\ 5 - \left(y + \frac{1}{3}\right) = 4 \cdot (x - 1) - \frac{1}{3} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x - \frac{x - y + 1}{3} = y \\ y - \frac{y - x + 4}{2} = x - 3y \end{cases}$$

**9** La o librărie s-au vândut într-o zi 200 de caiete de matematică și dictando, obținându-se suma de 588 de lei. Știind că un caiet de matematică costă 3,60 lei, iar unul dictando costă 2,40 lei, determinați numărul caietelor de matematică vândute în acea zi.

**10** Dreptunghiul din desenul alăturat este împărțit, prin drepte paralele cu laturile, în patru regiuni, având ariile înscrise în interioarele lor.

a) Precizați numărul dreptunghiurilor din imagine.  
 b) Determinați aria dreptunghiului mare.

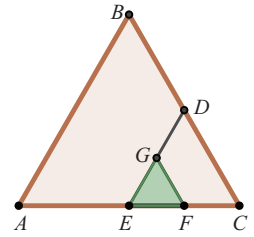
16 cm <sup>2</sup>	
12 cm <sup>2</sup>	27 cm <sup>2</sup>

**11** Pătratul  $EFGH$  are vârfulurile pe un cerc  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar distanța de la centrul cercului la una dintre laturi este  $4\sqrt{2}$  cm. Calculați raza și lungimea cercului în care este înscris pătratul  $EFGH$ , apoi calculați aria discului mărginit de acest cerc.

**12** Fie  $ABCD$  un patrulater convex și  $M$  un punct pe diagonala  $AC$  a patrulaterului. Se construiește  $ME \parallel AB$ ,  $E \in BC$  și  $MF \parallel CD$ ,  $F \in AD$ .

a) Arătați că  $AF \cdot BC = BE \cdot AD$ .

b) Dacă  $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EB}$ , demonstrați că  $M$  este mijlocul diagonalei  $AC$ .



**13** În desenul din figura alăturată, triunghiurile  $ABC$  și  $EFG$  sunt echilaterale,  $A_{ABC} = 144 \text{ cm}^2$ ,  $AE \equiv EC$  și  $DG \equiv GE$ . Calculați aria patrulaterului  $CDGF$ .

**14** Dreptunghiul  $ABCD$  este înscris într-un cerc de centru  $O$  și  $AC = 2 \cdot BC$ .

a) Demonstrați că  $O$  este punctul în care se intersectează diagonalele dreptunghiului;

b) Aria triunghiului  $AOD$  este  $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ; calculați lungimea cercului și aria discului delimitat de acest cerc.

**15** Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB = AC = 12 \text{ cm}$ ,  $BC = 12\sqrt{2} \text{ cm}$  și  $BM$  mediană a triunghiului. Determinați  $\cos \sphericalangle AMB$ .

**16** Într-un trapez isoscel baza mare are lungimea de 30 cm, linia mijlocie este de 27 cm și înălțimea este de 4 cm.

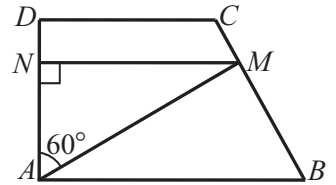
a) Calculați perimetrul și lungimea diagonalelor trapezului.

b) Calculați distanța de la un vârf al bazei mari la latura neoparalelă careia nu-i aparține.

**17** Se consideră  $ABCD$  un trapez dreptunghic, cu  $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$  și  $M$  un punct pe latura  $BC$  astfel încât  $BM = 3 \cdot CM$ .

a) Calculați distanța de la punctul  $M$  la dreapta  $AD$ , în funcție de lungimile bazelor,  $AB = x$  și  $CD = y$ ,  $x > y$ .

b) Dacă  $AD = 22 \text{ cm}$  și  $\sphericalangle DAM = 60^\circ$ , aflați  $AM$ .



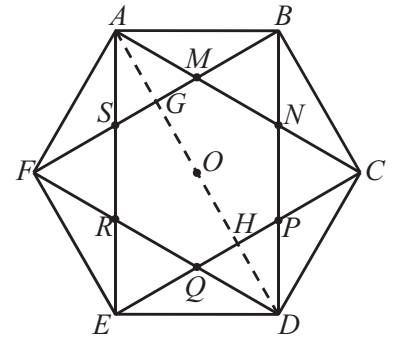
**18** Fie triunghiul  $ABC$  cu laturile  $AB = 6 \text{ cm}$ ,  $AC = 4 \text{ cm}$  și  $\sphericalangle A = 60^\circ$ . Aflați aria, perimetrul și lungimea înălțimii din  $A$  a triunghiului.

**19** Hexagonul regulat  $ABCDEF$  are latura de 1 dm. Diagonalele  $AC$ ,  $BD$ ,  $CE$ ,  $DF$ ,  $EA$  și  $FB$  se intersectează câte două și determină hexagonul  $MNPQRS$  (figura alăturată), iar dreapta  $AD$  intersectează  $BF$  în punctul  $G$  și  $CE$  în punctul  $H$ .

a) Demonstrați că  $MNPQRS$  este un hexagon regulat.

b) Calculați lungimile segmentelor  $AG$ ,  $GH$ ,  $HD$ .

c) Aflați raportul dintre apotemele celor două hexagoane.



**20** Fie  $ABCD$  un patrulater convex și  $M$  un punct pe diagonala  $AC$  a patrulaterului.

Se construiește  $ME \parallel AB$ ,  $E \in BC$  și  $MF \parallel CD$ ,  $F \in AD$ .

Arătați că  $\frac{AF}{AD} + \frac{CE}{BC} = 1$ .

**21** Pe latura  $CD$  a dreptunghiului  $ABCD$ , se consideră punctele  $E$  și  $F$  astfel încât  $DE = \frac{CD}{4}$  și  $CF = \frac{CD}{3}$ .

Fie  $AE \cap BF = \{M\}$  și  $MT \perp CD$ ,  $T \in CD$ . Aflați valoarea raportului  $\frac{ET}{TF}$ .



# Teste finale și răspunsuri

## T1 Test final 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

- I. Copiați pe caiete, apoi completați în căsuța alăturată fiecărui enunț litera **A**, dacă propoziția este adevărată și litera **F**, dacă propoziția este falsă:

5p	1. Rezultatul calculului $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}$ este $\sqrt{5}$ .
5p	2. Soluția, număr negativ, a ecuației $(x + 3)^2 = 25$ este $-4$ .
5p	3. Dacă $x > 0$ , $y < 0$ și $x^2 = 5$ , $y^2 = 20$ , atunci $\frac{1}{2} \cdot x \cdot y = -5$ .
5p	4. Linia mijlocie a unui trapez cu bazele de 6 cm și 14 cm are lungimea de 9 cm.
5p	5. Un pătrat are aria de $64 \text{ cm}^2$ . Mărind perimetrul pătratului cu 32 cm, aria devine $256 \text{ cm}^2$ .
5p	6. Distanța dintre punctele $A(1, 3)$ și $B(5, 0)$ este 10 (u.m.).

- II. În triunghiul dreptunghic  $ABC$  cu  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = 24 \text{ cm}$  și  $\sin C = \frac{4}{5}$ , segmentele  $AD$  și  $AM$  sunt înălțimea, respectiv mediana corespunzătoare ipotenuzei. Asociați fiecare cifră corespunzătoare cerințelor din coloana **A**, cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

	<b>A</b>	<b>B</b>
5p	1. $BC =$	a. 18 cm
5p	2. $AC =$	b. 14,4 cm
5p	3. $AD =$	c. 4,4 cm
5p	4. $DM =$	d. 12 cm
		e. 30 cm
		f. 14,2 cm

- III. La problemele următoare se cer rezolvări complete.

	1. Se consideră numărul $a = \sqrt{6} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \sqrt{3} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \right) - \sqrt{2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{3}{2\sqrt{3}} \right)$ .
10p	a) Efectuați calculele și stabiliți dacă $a \in \mathbb{Q}$ sau $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ .
10p	b) Comparați numărul $a$ cu numărul $b = \left  \left( -\frac{5}{6} \right)^{-1} \right $ .
	2. O bucată de carton are forma unei suprafețe dreptunghiulare cu dimensiunile 20 cm și 30 cm.
10p	a) Calculați diagonala dreptunghiului.
10p	b) Determinați numărul minim de suprafețe pătratice în care poate fi împărțită bucata de carton, având latura de aceeași lungime, exprimată în centimetri, printr-un număr natural.

**T2** Test final 2

Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. La cerințele următoare alegeți litera care indică varianta corectă; doar un răspuns este corect.

5p	1. Fie $A = \left\{ 0, (8); \sqrt{0}, (1); \sqrt{3}; \frac{\sqrt{25}}{5}; 4, (123) \right\}$ . Numărul elementelor mulțimii $A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ este: A. 2                                      B. 1                                      C. 3                                      D. 4
5p	2. Calculând $(2\sqrt{10} + \sqrt{2}) : \sqrt{2} - \frac{10}{\sqrt{5}}$ , se obține: A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1                                      D. $\sqrt{5}$
5p	3. Dacă $n = -2\sqrt{7}$ și $p = -4\sqrt{2}$ , atunci: A. $n > p$ B. $n = p$ C. $n = -p$ D. $n < p$
5p	4. Un triunghi dreptunghic are lungimile catetelor direct proporționale cu numerele 8 respectiv 15 și ipotenuza de 17 cm. Perimetrul triunghiului este: A. 60 cm                                      B. 50 cm                                      C. 40 cm                                      D. 30 cm
5p	5. Apotema unui triunghi echilateral este de $2\sqrt{3}$ cm. Latura triunghiului are lungimea: A. 8 cm                                      B. 12 cm                                      C. 15 cm                                      D. 6 cm
5p	6. Raportul măsurilor arcului mic și a arcului mare $\widehat{AB}$ situate pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ este $\frac{1}{7}$ . Măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ este: A. $30^\circ$ B. $45^\circ$ C. $60^\circ$ D. $90^\circ$
5p	7. Soluția sistemului $\begin{cases} x + y = 11 \\ -x + 11y = 1 \end{cases}$ este: A. $S = \{(1; 10)\}$ B. $S = \{(10; 1)\}$ C. $S = \{(-1; 10)\}$ D. $S = \{(1; -10)\}$
5p	8. În cercul $C(O, r)$ cu $r = 5$ cm, se consideră coardele paralele $AB = 8$ cm, $CD = 2\sqrt{21}$ cm. Distanța dintre $AB$ și $CD$ este: A. 4 cm                                      B. 5 cm                                      C. 6 cm                                      D. 8 cm

II. La problemele următoare se cer rezolvări complete.

20p	1. Numerele naturale $x, y, z$ verifică egalitățile $\sqrt{x+2} = 3$ și $\sqrt{y \cdot (z+3)} = 2$ . Calculați $x, y, z$ și $\sqrt{x+y+z}$ .
10p	2. Trapezul dreptunghic $ABCD$ , $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^\circ$ , are baza mare $AB = 20$ cm și linia mijlocie $MN$ de 14 cm, $M \in AD$ , $N \in BC$ . Știind că $CN = 10$ cm se cer:
10p	a) Lungimea bazei mici a trapezului.
10p	b) Aria trapezului.
10p	c) Tangenta unghiului $\sphericalangle BAC$ .

**1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE**

**1.1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional pozitiv**

**I.** 1. C; 2. D; 3. C; 4. D; 5. C; 6. C; 7. B; 8. D;

**II.** 1. a) -8; b) 4; c) 0,(1). 2.  $a = 2, b = 0,5$ .

3. 271 m.

**1.3. Scoaterea factorilor de sub radical.**

**Introducerea factorilor sub radical**

**I.** 1. A. 2. F. 3. A. 4. F. **II.** 1. D. 2. B. 3. A. 4. C.

5. A. 6. A. 7. D. **III.**  $1 - b; 2 - a; 3 - c; 4 - e; 5 - d; 6 - f$ . **IV.**  $B = \{1, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{21}, 2\sqrt{7}, 6, \sqrt{45}\}$ .

**1.4. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, prin aproximări. Compararea și ordonarea numerelor reale. Modulul unui număr real.**

**I.** 1. C. 2. A. 3. A; D. 4. B. 5. C. 6. D. 7. D.

**II.** a) negativ; b) pozitiv.

**III.** 1. 10. 2. a)  $\sqrt{10}$ ; b) 2.

**1.5. Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorilor de forma  $a\sqrt{b}$**

**I.** 1. B. 2. A. 3. C. 4. D. 5. A. 6. C. 7. C. 8.

D. **II.** 1. a) -3; b)  $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}$ , apoi se compară pătratele numerelor.

2.  $E(\sqrt{5}) = -10, E(-\sqrt{5}) = 10$ , nul.

**1.6. Media aritmetică ponderată a  $n$  numere reale,  $n \geq 2$ . Media geometrică a două numere reale pozitive.**

**I.** 1. C; 2. A; 3. B; 4. B; 5. C; 6. C; 7. D; 8. A.

**II.** 1. a)  $a = 1, b = 3$ ; b)  $a = 1, b = 9$ ; c) 3,24.

2. a)  $x = 2\sqrt{3}, y = 6\sqrt{3}$ ; b)  $<$ .

**1.7. Ecuații de forma  $x^2 = a, a \in \mathbb{R}$ .**

**I.** 1. C; 2. B; 3. D; 4. A; 5. B; 6. C. **II.** 1.  $(x + 25)^2 = 5625, x = 50$ . 2. a) 27 m; b)  $L = 81$  m,  $l = 27$  m;

c) 216 m. 3.  $x \in \mathbb{N}$  este latura posterului,  $x^2 > 6 \cdot 2,4 : 4 = 3,6$  și  $x < 2,4$ . Obținem  $x = 2$ .

**2. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE**

**2.2. Ecuații de forma  $a \cdot x + b = 0$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente**

**I.** 1. D; 2. A; 3. D; 4. C; 5. A; 6. B.

**II.** 1. a) 7; b) -4; c) -4; d) sunt echivalente b și c. 2. a)  $u(3a + 19) \in \{0, 5\} \Rightarrow u(a) \in \{7, 2\} \Rightarrow u(2a + 9) = 5$ ; b)  $a = 67$ .

**2.3. Sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute. Rezolvarea prin metoda substituției și/sau reducerii**

**I.** 1. C; 2. B; 3. C; 4. A; 5. A; 6. B.

**II.** 1.  $x = -3 \Rightarrow y = -1; y = -1 \Rightarrow x = -3;$

$x = 0,6 \Rightarrow y = 1,7; y = 1,4 \Rightarrow x = 0,2;$

$x = 1 + 4\sqrt{2} \Rightarrow y = 2 + 3\sqrt{2};$

2.  $x = 3, y = -2$ . 3.  $a = 5, b = 24$ .

**2.4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare**

**I.** 1. B; 2. A; 3. D; 4. C. **II.** 1.  $\frac{x}{y}$  este fracția inițială,  $x = y - 4, 2x = y + 1, x^y = 5, y = 9$ .

2.  $m + \frac{a}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5a}{12}, a + \frac{m}{10} = \frac{9m}{10} + 96,$

$a = 120, b = 30$ . 3.  $x + y = \frac{5}{6}, x - y = \frac{1}{6}, x = \frac{1}{2},$

$y = \frac{1}{3}$ .

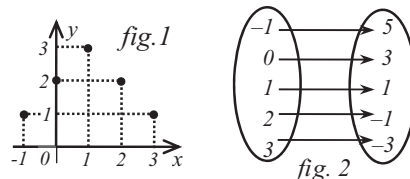
**3. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR**

**3.2. Dependente funcționale**

**I.** 1. B; 2. A; 3. D; 4. C; 5. C; 6. A; 7. C; 8. D.

**II.** 1. vezi figura 1; 2. 5 cm  $\rightarrow$  25 km; 20 km  $\rightarrow$  4 cm; 7,5 cm  $\rightarrow$  37,5 km; 350 km  $\rightarrow$  70 cm; 12 cm  $\rightarrow$  60 km. 3. a) vezi figura 2; b) vezi figura 3.

4. a)  $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$ ; b)  $y = 5 - x$



**4. PATRULATERUL**

**4.2. Paralelogramul: proprietăți. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului**

**I.** 1. C; 2. D; 3. A; 4. B; 5. C; 6. D; 7. B; 8. C;

**II.** 1. a)  $\sphericalangle ABO \equiv \sphericalangle ODC$ ; b)  $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$  (L.L.L.)

2.  $\sphericalangle MBC + \sphericalangle MCB = 90^\circ$ . 3.  $\sphericalangle IBC \equiv \sphericalangle BCL \Rightarrow IB \parallel LC$ ;  $\sphericalangle ICB \equiv \sphericalangle CBL \Rightarrow IC \parallel BL$ .

4. a)  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle C = 60^\circ$ ,  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 120^\circ$ ; b)  $AD = 8$  cm,  $P = 24$  cm; c)  $CE = 8$  cm,  $CF = 24$  cm.

#### 4.3 Paralelograme particulare: dreptunghi, romb, pătrat

I. 1 B; 2. C; 3. D; 4. B; 5. B; 6. A; 7. D; 8. C;

II.1 a)  $\sphericalangle DBC = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle GBF = 45^\circ$ ;

b)  $CF \perp BF$ ,  $DB \perp BF \Rightarrow BD \parallel CF$ ;

c)  $MO \parallel BF$ ,  $AO \parallel BF$ .

2.  $\sphericalangle DMA = 120^\circ = \sphericalangle EMF$ ,  $\sphericalangle BNC = 120^\circ = \sphericalangle ENF$ ,  $\sphericalangle E = \sphericalangle F = 60^\circ$ ,  $DM = MA$ ,  $DF = AE \Rightarrow MF = AE$ . 3.  $8x + 14y = 30$ ,  $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2, y = 1, h \geq 7$  (m).

#### 4.4 Trapezul: clasificare, proprietăți. Linia mijlocie în trapez

I. 1 A; 2. C; 3. B; 4. C. II. 1. b; 2. c; 3. a;

4. d. III. 1. a)  $\sphericalangle BCE = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle BEC = 60^\circ$ ;  $\sphericalangle AED = \sphericalangle EBF = 60^\circ$ ; b)  $BF = EF$  și

$BF = FC$ . 2. a)  $MN$  linie mijlocie și  $NP = MN \Rightarrow MP \parallel AB$ ,  $MP = AB$ ; b)  $DN$  linie mijlocie în  $\triangle AMP$ ;  $DN \parallel AM$ ,  $DN < AM$ ,  $\sphericalangle AMP = 90^\circ$ ;

c)  $BMCP$  este paralelogram.

#### 4.5 Perimetre și arii

I. 1 C; 2. D; 3. D; 4. B; 5. C; 6. B; 7. A; 8. C;

II. 1. a)  $AM = 48$  cm,  $AT = 24$  cm,  $A = 576$  cm<sup>2</sup>;

b) 75%. 2.  $\triangle COP \equiv \triangle EOQ \Rightarrow CP \equiv QE$ ,

$PO \equiv QO$ , apoi  $\mathcal{P}_{CPOF} = \mathcal{P}_{EQOD}$ .

3. a)  $\mathcal{A}_{ABNP} = 22$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_{CDPN} = 18$  cm<sup>2</sup>.

b)  $\mathcal{A}_{CMP} = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AMP} - \mathcal{A}_{BMC} - \mathcal{A}_{CDP} = 14$  cm<sup>2</sup>.

#### 5. CERCUL

##### 5.2 Poligoane regulate, înscrise într-un cerc

I. 1 C; 2. A; 3. B; 4. D; 5. B; 6. D; 7. C; 8. B;

II. 1. b)  $\mathcal{A}_e = 40\pi$  cm<sup>2</sup>; c)  $\mathcal{A}_a = \frac{295\pi}{8}$  cm<sup>2</sup>;

d)  $l = \frac{29}{2}\pi$  cm.

2.  $\triangle AMQ \equiv \triangle BNM \equiv \triangle CPN \equiv \triangle DQP \Rightarrow MN \equiv NP \equiv PQ \equiv QM$ ;  $\sphericalangle NMQ = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ$ . 3. Fiecare unghi are măsura de  $120^\circ$ ; b)  $AB < BC$ ; nu este poligon regulat.

#### 6. ASEMĂNAREA TRIUNGHURIILOR

I. 1 b; 2. e; 3. c; 4. d. II. 1. A; 2. D; 3. B; 4. C.

III. 1. a)  $BD = 4$  cm; b)  $CI = CA = 6$  cm;

c)  $AB = 15$  cm.

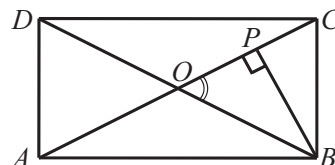
2. a)  $\triangle ADE \sim \triangle PBE$  (U.U.); b)  $\frac{EO}{BD} = \frac{1}{6}$ ;

c)  $\frac{AE}{EP} = \frac{AF}{FC} = 2$ .

#### 7. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGIUL DREPTUNGHIIC

I. 1. C; 2. A; 3. D; 4. B; 5. D; 6. A; 7. C; 8. B.

II. a) vezi desenul de mai jos;



b)  $AC = 2OA = 2OB = 20$ ;  $AP - CP = 12$  și  $AP + CP = 20$ ;  $AP = 16$ ,  $CP = 4$ ; din teorema înălțimii în triunghiul  $ABC \Rightarrow BP = 8$ ;

c)  $\operatorname{tg} \sphericalangle POB = \frac{PB}{PO} = \frac{4}{3}$ .

III. a)  $0,45 \cdot 11 \cdot 1,2 = 5,94$  km;

b)  $EM = 2 \cdot 0,45 + \frac{0,45 \cdot \sqrt{3}}{2} < 1,3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,45 \cdot \sqrt{3} < 0,8$  (A)

#### Test final 1

I. 1 A; 2. F; 3. A; 4. F; 5. A; 6. F. II. 1. 1e, 2a,

3b, 4c. III. 1. a)  $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ; b)  $a < b$ .

2. a)  $10\sqrt{13}$ ; b) 6.

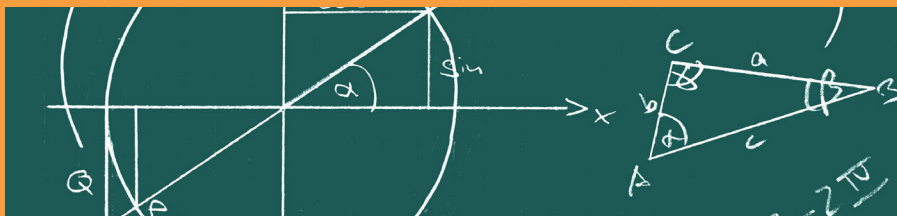
#### Test final 2

I. 1 B; 2. C; 3. A; 4. C; 5. B; 6. B; 7. B; 8. B.

II. 1.  $x = 7, y = 1, z = 1$ ; 2. a)  $CD = 8$  cm;

b)  $\mathcal{A}_{ABCD} = 224$  cm<sup>2</sup>; c) 2.

Programa școlară poate fi accesată la adresa:  
<http://programe.ise.ro>.



*Manualul este prezentat  
în variantă tipărită  
și în variantă digitală.*

*Varianta digitală are un  
conținut similar celei tipărite.*

*În plus, cuprinde o serie de  
activități multimedia interactive  
de învățare (exerciții interactive,  
jocuri educaționale, animații,  
filme, simulări).*

Tradiție din 1989

 [www.litera.ro](http://www.litera.ro)

ISBN 978-606-33-3992-9



9 786063 339929