MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

art

Marius Perianu
Cătălin Stănică
Ștefan Smărăndoiu

matematică

clasa a V-a

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației Naționale prin ordinul de ministru nr. 5294 din 05.10.2017.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de patru ani școlari, începând din anul școlar 2017 – 2018.

Inspectoratul Școlar . . . .

Școala / Colegiul / Liceul . . . .

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*			
				format tipărit		format digital	
				la primire	la predare	la primire	la predare
1							
2							
3							
4							

* *Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni:* ***nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.***
• Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
• Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți științifici:
• conf. univ. dr. Eugen Păltănea, Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea Transilvania din Brașov
• prof. Dorin Irinel Popa, Liceul cu Program Sportiv Slatina

Coordonator editorial: Roxana Jeler
Redactor: Mihaela Preda
Tehnoredactor: Crenguța Rontea
Corectori: Theodor Zamfir, Adrian Crețu
Ilustrații: Alexandra Gabor
Copertă: Alexandru Daș
Credite foto: Dreamstime

Activități digitale interactive și platformă e-learning: Learn Forward Ltd. Website: https://learnfwd.com
Înregistrări și procesare sunet: ML Sistems Consulting
Actori: Mircea Dragoman
Credite video: Dreamstime
Animații: Cristina Dandu, Krogen Creative Studios

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
PERIANU, MARIUS
Matematică : manual pentru clasa a V-a / Marius Perianu, Cătălin Stănică, Ștefan Smărăndoiu. - București : Art, 2017
ISBN 978-606-710-496-7

I. Stănică, Cătălin
II. Smărăndoiu, Ștefan

51

Grupul Editorial ART
C.P. 4, O.P. 83, cod 062650, sector 6, București
tel.: 021 224 01 30, 0744 300 870, 0721 213 576, 0784 594 626; fax: 021 369 31 99
Comenzi online: www.editura-art.ro

Cuvânt-înainte

Matematica este limba în care a fost scris Universul. Și, dacă în clasele primare am învățat *alfabetul matematicii*, clasa a V-a ne învață să construim *cuvinte, propoziții*, să dezvoltăm *idei*, să imaginăm lumi, astfel încât, în final, să scriem propria poveste matematică a universalității noastre.

Și, pentru că matematica este limbajul pe care îl poate înțelege oricare dintre noi, ca parte a Universului, am dorit să prezentăm acest manual folosind o exprimare prietenoasă, apropiată de cititor, apelând la simțul practic și la intuiție, ca forme de cunoaștere imediată a adevărului, concret sau abstract. Nu trebuie să fii matematician ca să simți numerele; ele sunt peste tot în jurul nostru și tot ce ne înconjoară e făcut din numere.

Introducerea conceptelor matematice se face plecând de la exemple din realitatea imediată, de la experiențele de zi cu zi. Matematica apare astfel ca o lume deschisă, vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie și să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

Matematica nu constă doar în rezolvarea de probleme și găsirea răspunsurilor la întrebări; adevărata lecție a matematicii este arta de a pune corect o întrebare, indiferent dacă se referă la o problemă practică sau una pur științifică. Doar pentru că nu putem găsi o soluție la o problemă, nu înseamnă că nu există una; rămâne să descoperim calea corectă de abordare. Manualul oferă, la fiecare pas, momente de investigație, de reflecție, ocazii de a pune întrebări și de a corela răspunsurile posibile cu datele situațiilor analizate.

Matematica este ceea ce spiritul vieții scrie cu litere de mână în conștiința umană. Umanitatea are nevoie de matematică, pentru că tot ceea ce există în Univers nu este doar descris de matematică, ci este construit din matematică.

Acest manual este primul pas pentru a descoperi miracolul matematicii.

Autorii

Ce propune acest manual

Manualul cuprinde:
Varianta tipărită

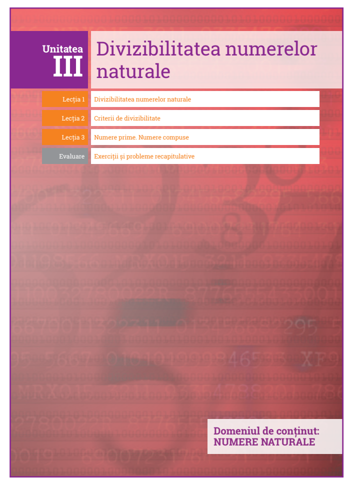
+

Varianta digitală (similară cu cea tipărită, care cuprinde, în plus, peste 150 AMII, activități multimedia interactive de învățare)

Manualul propune o viziune inspirată dintr-o pedagogie deschisă, conform căreia matematica este o lume vie, dinamică, în strânsă legătură cu toate domeniile de activitate, capabilă să formuleze, să descrie și să explice situații, probleme, fenomene sau procese.

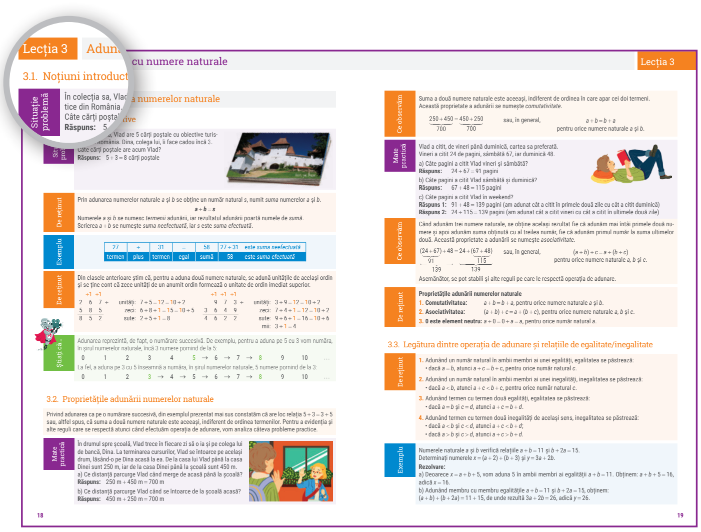
În acest context, matematica nu constă doar în rezolvarea de probleme și găsirea răspunsurilor la întrebări; adevărata lecție a matematicii este arta de a pune corect o întrebare, indiferent dacă se referă la o problemă practică sau la una pur științifică.

Structura manualului



Structura unei unități de învățare

Fiecare unitate de învățare cuprinde teme de predare-învățare și o fișă de recapitulare/evaluare, în care se evidențiază aspecte semnificative.



Structura unei lecții de predare

Situație-problemă – problemă practică pe baza căreia se introduc noile concepte.

De reținut – secvență în care sunt teoretizate *conținuturile noi* aflate în substratul situației-problemă propuse.

Exemple – completarea informațiilor științifice.

Mate practică – activități de învățare pentru formarea/dezvoltarea competențelor specifice și valorificarea experienței concrete a elevului în raport cu cotidianul.

Probleme reprezentative – reintegrarea conținuturilor noi, uneori rezolvate în mai multe moduri pentru a permite analogii și diferențieri.

Probleme propuse – aplicații de natură teoretică sau practic-aplicativă.

Gândire critică – încurajarea activităților de grup, a independenței în gândire și dezvoltarea încrederii în sine.

Cum este organizat manualul

Manualul este împărțit în șapte unități de învățare care acoperă integral cele trei domenii de conținut prevăzute de programa școlară: *Operații cu numere naturale* • *Metode aritmetice de rezolvare a problemelor* • *Divizibilitatea numerelor naturale* • *Fracții ordinare* • *Fracții zecimale* • *Elemente de geometrie* • *Unități de măsură*.

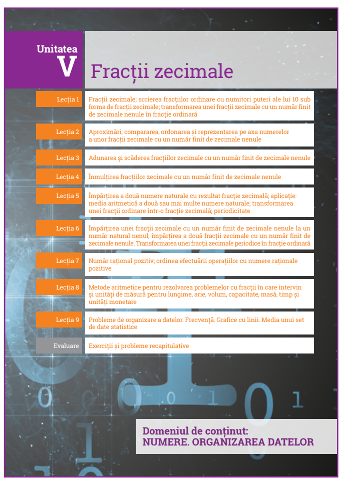
Fiecare unitate se deschide printr-o scurtă prezentare a unei personalități sau a unui eveniment din istoria matematicii, precum și printr-o prezentare a structurii respectivei unități, care, prin crearea de așteptări, asigură conștientizarea relațiilor intradisciplinare.

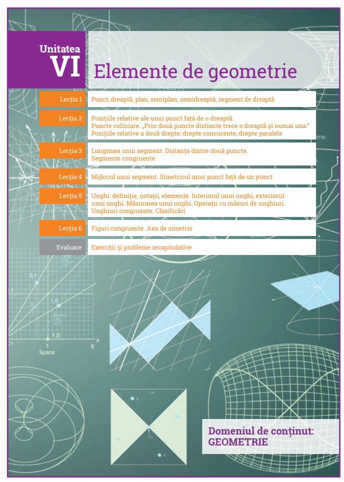
Marcarea activităților multimedia

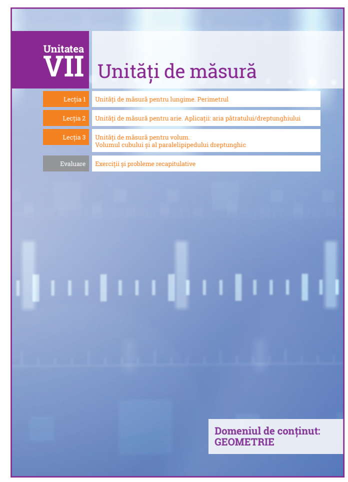

Activitate statică


Activitate animată


Activitate interactivă



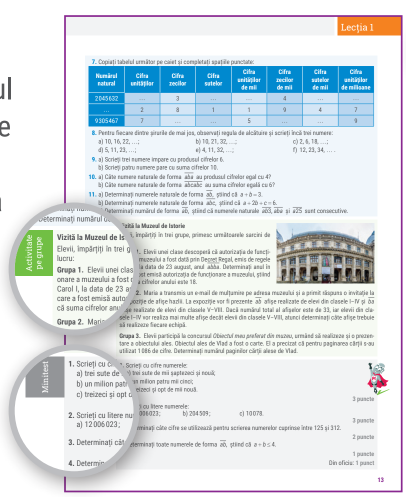




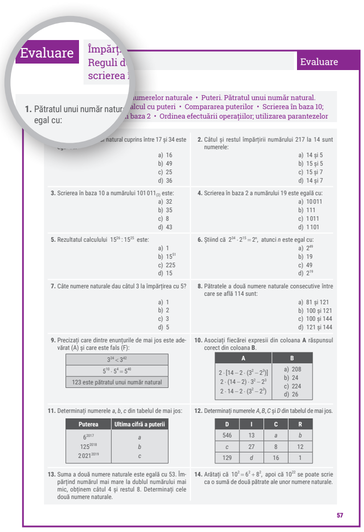
Componenta de evaluare

Pe parcursul unei unități de învățare sunt propuse **instrumente complementare de evaluare** (proiecte, portofolii, investigații, jocuri etc.), care au un grad ridicat de relevanță/aplicabilitate în viața de zi cu zi.

Fiecare lecție se încheie cu un **minitest**, care conține un set de 3–4 itemi cu un grad ridicat de relevanță, ceea ce permite profesorilor să identifice rapid gradul de înțelegere de către elevi a conținuturilor predate în respectiva lecție.



La finalul fiecărei unități de învățare (după o succesiune mai consistentă de lecții) este propusă o fișă de **evaluare**, care se realizează prin forme și instrumente diversificate, axate pe formarea și dezvoltarea competențelor matematice.



Exercițiile și problemele propuse pot constitui și suport pentru lecțiile de recapitulare, acoperind întreaga gamă a tipologiei itemilor (obiectivi, semiobiectivi și subiectivi).

Sumar

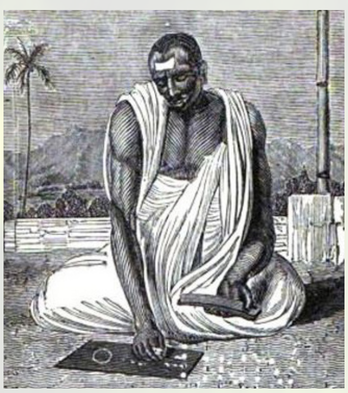
Competențe

COMPETENȚE GENERALE

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar.
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale.
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice.
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată.
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date.
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii.

COMPETENȚE SPECIFICE

1.1. Identificarea numerelor naturale în contexte variate.
1.2. Identificarea fracțiilor ordinare sau zecimale în contexte variate.
1.3. Identificarea noțiunilor geometrice elementare și a unităților de măsură în diferite contexte.
2.1. Efectuarea de calcule cu numere naturale, folosind operațiile aritmetice și proprietățile acestora.
2.2. Efectuarea de calcule cu fracții folosind proprietăți ale operațiilor aritmetice.
2.3. Utilizarea instrumentelor geometrice pentru a măsura sau pentru a construi configurații geometrice.
3.1. Utilizarea regulilor de calcul pentru efectuarea operațiilor cu numere naturale și pentru divizibilitate.
3.2. Utilizarea de algoritmi pentru efectuarea operațiilor cu fracții ordinare sau zecimale.
3.3. Determinarea perimetrelor, a ariilor (pătrat, dreptunghi) și a volumelor (cub, paralelipiped dreptunghic) și exprimarea acestora în unități de măsură corespunzătoare.
4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor proprietăți referitoare la comparări, aproximări, estimări și ale operațiilor cu numere naturale.
4.2. Utilizarea limbajului specific fracțiilor/procentelor în situații date.
4.3. Transpunerea în limbaj specific a unor probleme practice referitoare la perimetre, arii, volume, utilizând transformarea convenabilă a unităților de măsură.
5.1. Analizarea unor situații date în care intervin numere naturale, pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule.
5.2. Analizarea unor situații date în care intervin fracții pentru a estima sau pentru a verifica validitatea unor calcule.
5.3. Interpretarea prin recunoașterea elementelor, a măsurilor lor și a relațiilor dintre ele, a unei configurații geometrice dintr-o problemă dată.
6.1. Modelarea matematică, folosind numere naturale, a unei situații date, rezolvarea problemei obținute prin metode aritmetice și interpretarea rezultatului.
6.2. Reprezentarea matematică, folosind fracțiile, a unei situații date, în context intra- și interdisciplinar (geografie, fizică, economie etc.).
6.3. Analizarea unor probleme practice care includ elemente de geometrie studiate, cu referire la unități de măsură și la interpretarea rezultatelor.



Brahmagupta (aprox. 598 — 665 d.H.) a fost un matematician și astronom indian. Lucrarea sa *Brahmasphuta-siddhanta* (*Deschiderea Universului*), scrisă în anul 628, este considerată o bornă în dezvoltarea matematicii, întrucât este primul text în care se introduce numărul 0 și se explică sistemul numeric zecimal indo-arab. În anul 770, matematicienii islamici au cunoscut acest sistem dintr-o traducere a textului original, transformându-l în ceea ce numim astăzi *numere arabe*.

Leonardo Pisano Bogollo (1170 — 1250), cunoscut și sub numele de **Leonardo Fibonacci,** a fost un matematician italian considerat de unii drept *cel mai talentat matematician* european din Evul Mediu.

În cartea sa *Liber Abaci* (*Cartea abacului*), scrisă în 1202 și actualizată în 1254, Fibonacci a dat importanță cifrei *zero*, a introdus cifrele indo-arabe în Europa și a arătat importanța practică a sistemului de numărare pozițional, în care numerele sunt scrise cu cifre de la 0 la 9.

Unitatea I

Operații cu numere naturale

Lecția 1	Scrierea și citirea numerelor naturale
Lecția 2	Reprezentarea pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor naturale; aproximări, estimări
Lecția 3	Adunarea numerelor naturale
Lecția 4	Scăderea numerelor naturale
Lecția 5	Înmulțirea numerelor naturale
Lecția 6	Factor comun
Evaluare	Exerciții și probleme recapitulative
Lecția 7	Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale
Lecția 8	Împărțirea cu rest a numerelor naturale
Lecția 9	Puterea cu exponent natural a unui număr natural. Pătratul unui număr natural
Lecția 10	Reguli de calcul cu puteri
Lecția 11	Compararea puterilor
Lecția 12	Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2
Lecția 13	Ordinea efectuării operațiilor; utilizarea parantezelor: rotunde, pătrate și acolade
Evaluare	Exerciții și probleme recapitulative

Domeniul de conținut: NUMERE NATURALE

Lecția 1 Scrierea și citirea numerelor naturale

Mate practică

În vizită la Muzeul de Istorie, ghidul le prezintă elevilor mai multe manuscrise ce conțin scrieri vechi, ca în imaginile date.

El le precizează elevilor că semnele: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 se numesc cifre arabe,

iar semnele: I II III IV V VI VII VIII IX se numesc cifre romane.

Cifrele arabe provin din cultura indiană și au fost preluate de arabi. La început, arabii utilizau pentru cifrele de la 0 la 9 semnele: ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ,

iar matematicienii indieni utilizau semnele: ० १ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ .

În prezent, cel mai des se utilizează cifrele arabe.

De reținut

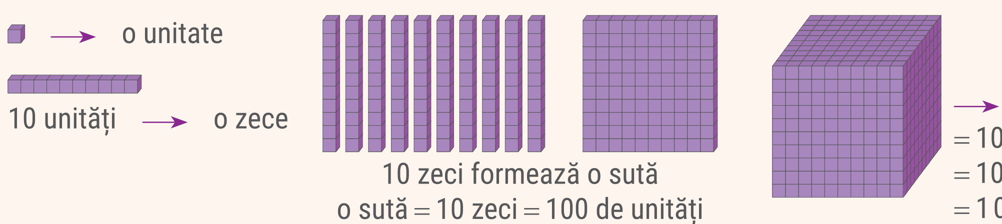
Numerele naturale au apărut din necesități practice de numărare și ordonare a unor lucruri, obiecte, ființe.
Pentru scrierea unui număr natural, se folosesc unul sau mai multe din următoarele zece simboluri, numite *cifre arabe*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Fiecare număr natural se scrie ca o succesiune de cifre, care se pot repeta, prima cifră a unui număr natural de cel puțin două cifre fiind diferită de 0. De asemenea, fiecare succesiune de cifre reprezintă un număr natural.

Acest mod de scriere a unui număr natural se numește *scriere în sistem zecimal* sau *scriere în baza zece*, **pentru că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat mai mare**.

Ne reamintim și din clasa a IV-a:



În scrierea oricărui număr natural, poziția ocupată de fiecare cifră reprezintă un anumit ordin:
- ordinul 1 este ordinul unităților (prima cifră din dreapta);
- ordinul 2 este ordinul zecilor (a doua cifră din dreapta);
- ordinul 3 este ordinul sutelor (a treia cifră din dreapta);
- ordinul 4 este ordinul unităților de mii (a patra cifră din dreapta) etc.

Pentru a citi un număr natural, grupăm cifrele câte trei de la dreapta spre stânga. Aceste grupe se numesc clase. Fiecare clasă se compune din trei ordine consecutive: unități, zeci și sute. Zece unități de un anumit ordin formează a unitate de ordin superior.

În ordine, de la dreapta la stânga avem: clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanelor, clasa miliardelor etc.

Din acest motiv, scrierea numerelor în baza zece este o scriere *pozițională*, deoarece fiecare cifră are o anumită valoare după locul unde este scrisă.

Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
Ordinul sutelor de milioane	Ordinul zecilor de milioane	Ordinul unităților de milioane	Ordinul sutelor de mii	Ordinul zecilor de mii	Ordinul unităților de mii	Ordinul sutelor	Ordinul zecilor	Ordinul unităților
9	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**

Exemplu:
În numărul 23 472 508 216, cifra 2 apare de trei ori, de la dreapta spre stânga, și are următoarele valori: sute, milioane, respectiv zeci de miliarde.

sute de miliarde	zeci de miliarde	unități de miliarde	sute de milioane	zeci de milioane	unități de milioane	sute de mii	zeci de mii	unități de mii	sute	zeci	unități
	2	3	4	7	2	5	0	8	2	1	6
clasa *miliardelor*			clasa *milioanelor*			clasa *miilor*			clasa *unităților*		

Numărul se citește de la stânga la dreapta, citind mai întâi cifrele fiecărei clase, apoi numele clasei, astfel: două zeci și trei de miliarde patru sute șapte zeci și două de milioane cinci sute opt mii două sute șaisprezece.

Observații

1. **Descompunerea zecimală.** Orice număr natural de două sau mai multe cifre se scrie în mod unic sub forma unei sume de produse între fiecare cifră din scrierea numărului și numărul ce indică ordinul cifrei respective (1, 10, 100, 1 000 etc.).

   Exemple: **1.** $37 = 3 \cdot 10 + 7$; $\overline{ab} = 10 \cdot a + b$.
   2. $275 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5$; $\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$.
   3. $8086 = 8 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6$; $\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$.

2. **Numere pare, numere impare.** Numerele naturale în scrierea cărora ultima cifră (cifra unităților) este 0, 2, 4, 6 sau 8 se numesc numere naturale pare, iar cele în scrierea cărora ultima cifră este 1, 3, 5, 7 sau 9 se numesc numere naturale impare.

   Exemple: **1.** Numerele 21, 35, 129 și 3 457 sunt impare, deoarece au ultima cifră 1, 5, 9, respectiv 7.
   2. Numerele 54, 128, 3 526, 1 372 sunt pare, deoarece au ultima cifră 4, 8, 6, respectiv 2.

3. **Șirul numerelor naturale.** Scrierea $0, 1, 2, 3, \ldots, 23, 24, 25, \ldots, n, n+1, n+2, \ldots$ se numește *șirul numerelor naturale*. Orice două sau mai multe numere alăturate din șirul numerelor naturale se numesc numere naturale consecutive.

   Exemple: **1.** 17 și 18 sunt două numere naturale consecutive.
   2. 45, 46, 47 sunt trei numere naturale consecutive.
   3. Dacă n este un număr natural oarecare, atunci numerele n, $n+1$ și $n+2$ sunt numere naturale consecutive.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați cifrele a, b și c, știind că $789 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.

Rezolvare:
$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = \overline{abc}$ și obținem $789 = \overline{abc}$.
În concluzie, $a = 7, b = 8$ și $c = 9$.

2. a) Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 80 de pagini?
b) Pentru numerotarea paginilor unui manual de matematică s-au folosit 468 de cifre.
Câte pagini are manualul?

Rezolvare:
a) De la 1 la 9 s-au folosit 9 cifre.
De la 10 la 80 sunt $80 - 10 + 1 = 71$ de numere de două cifre, deci s-au folosit $71 \cdot 2 = 142$ de cifre.
Pentru numerotarea cărții s-au folosit $9 + 142 = 151$ de cifre.

b) De la 1 la 9 s-au folosit 9 cifre. Au mai rămas $468-9=459$ de cifre utilizate.
De la 10 la 99 s-au utilizat 180 de cifre. Au mai rămas $459-180=279$ de cifre utilizate. Cele 279 de cifre provin de la numere de trei cifre, adică de la primele $279:3=93$ de numere de trei cifre.
Manualul are $100+93-1=192$ de pagini.

3. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $a+2b=11$.

Rezolvare:
Vom studia cazuri după valorile lui *b*, deoarece observăm că pentru $b\geq 6$ avem $a+2b>11$.
Cazul I: Pentru $b=5$, obținem $a=1$.
Cazul II: Pentru $b=4$, obținem $a=3$.
Cazul III: Pentru $b=3$, obținem $a=5$.
Cazul IV: Pentru $b=2$, obținem $a=7$.
Cazul V: Pentru $b=1$, obținem $a=9$.
Cazul VI: Pentru $b=0$, obținem $a=11$ care nu este cifră.
Numerele cerute sunt 15, 34, 53, 72 și 91.

Probleme propuse

1. Scrieți cu litere numerele naturale:
a) 843 027; b) 500 002; c) 5 017; d) 11 111;
e) 21 005; f) 403 067; g) 120 004; h) 20 305 023.

2. Copiați tabelul de mai jos pe caiet și completați spațiile punctate:

Numărul natural	Cifra numărului natural	Ordinul cifrei	Clasa cifrei
1 234 567	3	zeci	mii
54 678	7	…	…
23 456 981	9	sute	…
1 234 567	2	…	…
23 456 981	4	…	mii

3. Scrieți cu cifre, într-un tabel după modelul dat, numerele naturale de mai jos:
a) douăzeci și șapte; b) trei sute cincizeci și opt de mii;
c) cinci mii opt; d) nouă mii șapte sute cinci;
e) două milioane opt sute treizeci și șapte de mii doi; f) șapte milioane trei mii șase sute cinci.

Clasa milioanelor			Clasa miilor			Clasa unităților		
S	Z	U	S	Z	U	S	Z	U

4. Câte numere cuprinse între 30 și 60 conțin:
a) cifra 4; b) două cifre identice; c) cifrele 1 sau 8?

5. a) Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc}=3\cdot 100+7\cdot 10+9$.
b) Determinați cifrele *a*, *b*, *c*, știind că $324=a\cdot 100+b\cdot 10+c$.
c) Determinați cifrele *a*, *b*, *c*, *d*, știind că $\overline{a3c4}=5\cdot 1\,000+b\cdot 100+7\cdot 10+d$.

6. a) Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărți cu 320 de pagini?
b) Pentru numerotarea paginilor unei cărți s-au folosit 612 cifre. Câte pagini are cartea?

7. Copiați tabelul următor pe caiet și completați spațiile punctate:

Numărul natural	Cifra unităților	Cifra zecilor	Cifra sutelor	Cifra unităților de mii	Cifra zecilor de mii	Cifra sutelor de mii	Cifra unităților de milioane
2045632	...	3	...	...	4	...	...
...	2	8	1	1	9	4	7
9305467	7	...	...	5	...	...	9

8. Pentru fiecare dintre șirurile de mai jos, observați regula de alcătuire și scrieți încă trei numere:
a) 10, 16, 22, ...; b) 10, 21, 32, ...; c) 2, 6, 18, ...;
d) 5, 11, 23, ...; e) 4, 11, 32, ...; f) 12, 23, 34, ...

9. a) Scrieți trei numere impare cu produsul cifrelor 6.
b) Scrieți patru numere pare cu suma cifrelor 10.

10. a) Câte numere naturale de forma $\overline{aba}$ au produsul cifrelor egal cu 4?
b) Câte numere naturale de forma $\overline{abcabc}$ au suma cifrelor egală cu 6?

11. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $a+b=3$.
b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $a+2b+c=6$.
c) Determinați numărul de forma $\overline{ab}$, știind că numerele naturale $\overline{ab3}$, $\overline{aba}$ și $\overline{a25}$ sunt consecutive.

Activitate pe grupe

Vizită la Muzeul de Istorie

Elevii, împărțiți în trei grupe, primesc următoarele sarcini de lucru:

Grupa 1. Elevii unei clase descoperă că autorizația de funcționare a muzeului a fost dată prin Decret Regal, emis de regele Carol I, la data de 23 august, anul $\overline{abba}$. Determinați anul în care a fost emisă autorizația de funcționare a muzeului, știind că suma cifrelor anului este 18.

Grupa 2. Maria a transmis un e-mail de mulțumire pe adresa muzeului și a primit răspuns o invitație la o expoziție de afișe hazlii. La expoziție vor fi prezente $\overline{ab}$ afișe realizate de elevi din clasele I–IV și $\overline{ba}$ afișe realizate de elevi din clasele V–VIII. Dacă numărul total al afișelor este de 33, iar elevii din clasele I–IV vor realiza mai multe afișe decât elevii din clasele V–VIII, atunci determinați câte afișe trebuie să realizeze fiecare echipă.

Grupa 3. Elevii participă la concursul *Obiectul meu preferat din muzeu*, urmând să realizeze și o prezentare a obiectului ales. Obiectul ales de Vlad a fost o carte. El a precizat că pentru paginarea cărții s-au utilizat 1 086 de cifre. Determinați numărul paginilor cărții alese de Vlad.

Minitest

1. Scrieți cu cifre numerele:
a) trei sute de mii șaptezeci și nouă;
b) un milion patru mii cinci;
c) treizeci și opt de mii nouă.

3 puncte

2. Scrieți cu litere numerele:
a) 12 006 023; b) 204 509; c) 10 078.

3 puncte

3. Determinați câte cifre se utilizează pentru scrierea numerelor cuprinse între 125 și 312.

2 puncte

4. Determinați toate numerele de forma $\overline{ab}$, știind că $a+b\le 4$.

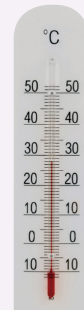
1 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 2 Reprezentarea pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor naturale; aproximări, estimări

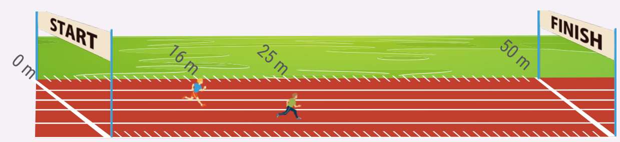
2.1. Reprezentarea pe axa numerelor

Situații problemă



1. Dimineața, Dina observă că termometrul indică 22 de grade. La întoarcerea de la școală, la ora 14, termometrul indică 28 de grade.
Este mai cald la ora 14 decât dimineața?
Răspuns: Este mai cald, deoarece pe scara termometrului $28 > 22$.

2. Vlad și Dina se antrenează pe o pistă de 50 de metri. După plecarea din punctul *O*, marcat pe pistă cu 0 metri, la un moment dat, Vlad se află în punctul *T* al pistei, la marcajul de 25 de metri, iar Dina în punctul *Q* al pistei, la marcajul de 16 metri.
Cine este mai aproape de START și cine este mai aproape de FINISH?



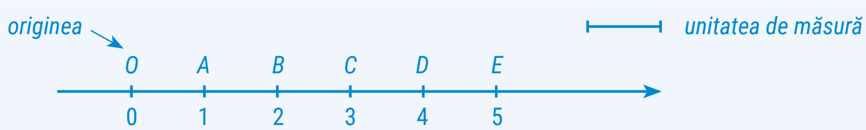
Răspuns: $16 < 25$, deci Vlad este mai aproape de FINISH.
$25 > 16$, deci Dina este mai aproape de START.

De reținut

O dreaptă pe care se fixează un punct numit *origine*, un sens de parcurgere de la stânga la dreapta, indicat de o săgeată, numit *sens pozitiv*, și un segment numit *unitate de măsură* se numește *axa numerelor*.

Fiecărui număr natural îi corespunde, pe axa numerelor, un punct. Numărul respectiv se numește *coordonata punctului*. Originea are coordonata 0 (zero).

Exemplu



Pe axa numerelor de mai sus sunt reprezentate punctele *O*(0), *A*(1), *B*(2), *C*(3), *D*(4) și *E*(5).
Citim: „punctul *O* de coordonată 0", „punctul *A* de coordonată 1", „punctul *D* de coordonată 4" etc.

2.2. Compararea și ordonarea numerelor naturale

De reținut

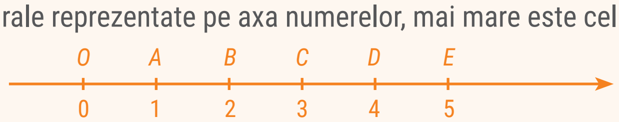
Dintre două numere naturale care au un număr diferit de cifre, este mai mare numărul care are mai multe cifre. Dintre două numere naturale care au același număr de cifre, numărul mai mare este cel la care întâlnim prima cifră mai mare când comparăm cifrele de același ordin de la stânga la dreapta. Semnele folosite în compararea numerelor sunt: $=, <, >, \leq, \geq$.

Exemple

1. $546 < 1\,234$, deoarece 1 234 are 4 cifre, iar 546 are 3 cifre.
2. $9\,999 < 10\,001$, deoarece 10 001 are 5 cifre, iar 9 999 are 4 cifre.
3. $123 < 193$, deoarece numerele au același număr de cifre și $2 < 9$.
4. $540 > 440$, deoarece numerele au același număr de cifre și $5 > 4$.
5. $1\,234 < 1\,237$, deoarece au același număr de cifre și $4 < 7$.

Observații

Dintre două numere naturale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este cel aflat în dreapta celuilalt.



3 este mai mic decât 4, deoarece punctul *D*(4) se află poziționat pe axa numerelor în dreapta punctului *C*(3).

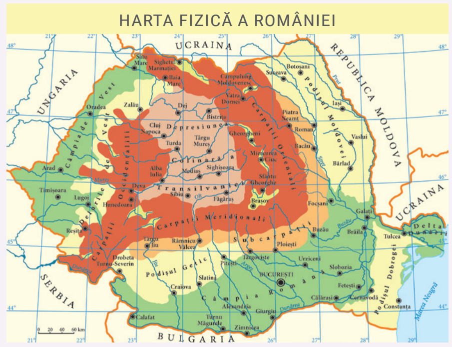
2.3. Aproximări, rotunjiri, estimări

Situație problemă

Aflați într-o tabără internațională, Dina și Vlad trebuie să prezinte câteva date despre țara noastră. Ei știu că în 2011, la ultimul recensământ oficial, populația României era de 20 121 641 de locuitori.

Dina: *Având în vedere modificările intervenite între timp în evoluția populației, este posibil ca acest număr să se fi schimbat.*

Vlad: *Ai dreptate, pentru a forma o imagine cât mai apropiată de realitate și a oferi un număr ușor de reținut, vom spune că populația României este de aproximativ 20 de milioane de locuitori.*



De reținut

Atunci când, în locul unui număr natural dat, utilizăm un alt număr apropiat de el, se spune că am folosit o aproximare a numărului respectiv. Există trei tipuri de aproximări: prin lipsă, prin adaos și prin rotunjire.

Aproximarea prin lipsă a unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este cel mai mare număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.) mai mic sau egal cu numărul respectiv.

Aproximarea prin adaos a unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este cel mai mic număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.) strict mai mare decât numărul respectiv.

Rotunjirea unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este aproximarea, prin lipsă sau prin adaos, la ordinul considerat cel mai apropiat de numărul respectiv. În cazul în care cele două aproximări sunt la fel de apropiate de număr, pentru rotunjire se ia în considerare aproximarea prin adaos.

Exemple

	Aproximarea la ordinul zecilor prin ...			Aproximarea la ordinul sutelor prin ...		
Numărul	**lipsă**	**adaos**	**rotunjire**	**lipsă**	**adaos**	**rotunjire**
2 537	2 530	2 540	2 540	2 500	2 600	2 500
782	780	790	780	700	800	800
263 005	263 000	263 010	263 010	263 000	263 100	263 000

Observații

1. Aproximarea prin lipsă a unui număr natural la ordinul zecilor se obține înlocuind ultima cifră a numărului (cifra unităților) cu zero, aproximarea prin lipsă la ordinul sutelor se face înlocuind ultimele două cifre ale numărului cu 0 (zero) etc.

2. Un număr natural este mai mare sau egal cu orice aproximare a sa prin lipsă (de orice ordin) și strict mai mic decât orice aproximare prin adaos.

3. Diferența dintre aproximarea prin adaos la ordinul zecilor (respectiv ordinul sutelor, miilor etc.) și aproximarea prin lipsă la același ordin este egală cu 10 (respectiv 100, 1 000 etc.).

Situație problemă

Prețul unui kilogram de mere în luna iulie este de 7 lei. Având în vedere că în toamnă intră pe piață noua recoltă, o firmă de băuturi răcoritoare estimează că în luna septembrie prețul unui kilogram de mere va fi mai mic cu 2 lei. În toamnă, prețul unui kilogram de mere a fost de 4 lei.
A fost utilă estimarea?

Răspuns: Estimarea a fost utilă, cu toate că ea nu a coincis întocmai realității. În dorința de a avea un buget pentru achiziționarea unei cantități mari de mere, estimarea a ajutat, apropiindu-se de prețul corect.

De reținut

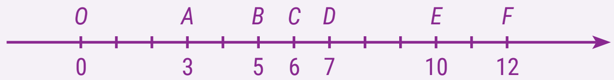
A estima înseamnă a evalua cu aproximație, a aprecia mărimea, valoarea, pe baza unor date incomplete. Estimarea are un rol informativ și este utilizată în planificarea diferitelor activități curente realizate de oameni, dar nu corespunde întotdeauna adevărului matematic. O estimare bună este cea care se apropie, în timp, de realitate.

I Operații cu numere naturale

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Reprezentați pe axa numerelor: 3, 5, 6, 7, 10, 12.

Rezolvare:
Se scrie $A(3)$, $B(5)$, $C(6)$, $D(7)$, $E(10)$, $F(12)$.



2. Scrieți toate numerele naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu cifrele 6, 1 și 3, apoi ordonați-le crescător.

Rezolvare:
Numerele care se pot forma sunt următoarele: 613, 631, 136, 163, 316, 361.
Ordinea crescătoare a numerelor este: 136, 163, 316, 361, 613, 631.

3. Alegeți cifrele a și b astfel încât numărul $A = \overline{353a17}$ să fie mai mare decât numărul $B = \overline{3b4739}$. Câte soluții are problema?

Rezolvare:
Dacă $b > 5$, atunci $A < B$, indiferent de alegerea lui a.
Dacă $b = 5$, atunci $B = 354\,739$. Primele două cifre ale numerelor A și B sunt egale. A treia cifră a numărului B este 4, mai mare decât a treia cifră a lui A, care este 3. În acest caz, $A < B$.
Dacă $b \leq 4$, atunci $A > B$, indiferent de valorile pe care le ia cifra a. Cifra b poate lua 5 valori (0, 1, 2, 3 sau 4), iar cifra a poate lua 10 valori $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. Oricare dintre cele 5 valori ale lui b se poate asocia cu oricare dintre cele 10 valori ale lui a, deci sunt $5 \cdot 10 = 50$ de posibilități diferite de alegere a cifrelor a și b.

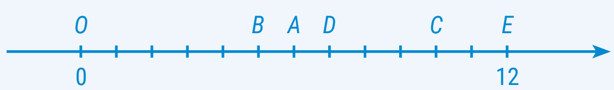
4. Fie numărul 269 317. Plasați cifra 5 între două cifre ale numărului pentru a obține cel mai mare și, respectiv, cel mai mic număr posibil.

Rezolvare:
Plasând cifra 5 între două cifre ale numărului 269 317, obținem numerele: 2 569 317, 2 659 317, 2 695 317, 2 693 517, 2 693 157.
Cel mai mare număr posibil este: 2 695 317.
Cel mai mic număr posibil este: 2 569 317.

Probleme propuse

1. Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 12.

2. Determinați coordonatele punctelor A, B, C și D din reprezentarea de mai jos.

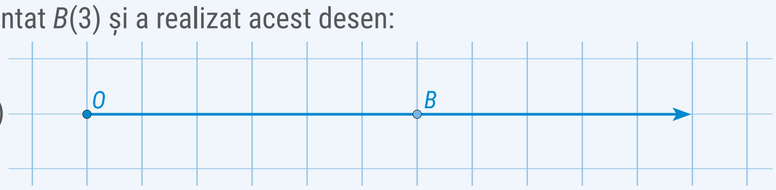


3. Scrieți în ordine descrescătoare numerele: 1 234, 1 342, 2 314, 2 143, 4 321.

4. Vlad a avut de reprezentat $A(6)$ și a realizat acest desen:

a) 

Eliza a avut de reprezentat $B(3)$ și a realizat acest desen:

b) 

Sunt corecte cele două reprezentări? Justificați răspunsul.

5. Scrieți în ordine crescătoare numerele naturale:

a) mai mici decât 12; b) cuprinse între 17 și 25; c) impare, cuprinse între 14 și 38.

6. Comparați numerele:
a) 23 456 și 23 546; b) 236 780 și 236 800; c) 123 456 și 23 456.

7. a) Aproximați numărul 124 367, prin lipsă, la zeci, sute, mii și, respectiv, sute de mii.
b) Aproximați numărul 892 524, prin adaos, la zeci, sute, mii și, respectiv, sute de mii.
c) Aproximați numărul 587 321 la ordinul zecilor, sutelor, miilor și, respectiv, al sutelor de mii, prin lipsă și prin adaos.
d) Rotunjiți numărul 89 276 la ordinul zecilor, sutelor, miilor și, respectiv, al sutelor de mii.

8. Rotunjiți, prin aproximare la ordinul sutelor, următoarele numere: 2 367, 3 129, 1 087, 98 109, 63 987, 13 817, 56 257, 56 275, 80 978, 80 789.

9. Determinați următoarele numere naturale:
a) cel mai mic număr natural de trei cifre nenule distincte;
b) cel mai mare număr natural format cu patru cifre distincte;
c) cel mai mare număr care se scrie cu trei cifre pare și două impare, toate distincte;
d) cel mai mic număr de forma $\overline{a2b3c4}$, cu toate cifrele distincte.

10. a) Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor pare cuprinse între 7 și 19. Câte puncte ați obținut?
b) Reprezentați pe axa numerelor punctele corespunzătoare numerelor impare cuprinse între 0 și 14. Câte puncte ați obținut?

11. Scrieți câte patru numere naturale cuprinse între 13 025 și 13 983, care, rotunjite la ordinul sutelor, ar fi egale cu:
a) 13 000; b) 13 500; c) 14 000.

12. a) Fie numărul 658 234. Plasați cifra 7 între cifrele sale, astfel încât numărul obținut să fie cel mai mic posibil.
b) Fie numărul 852 374. Ștergeți o cifră a acestui număr, astfel încât numărul rămas să fie cel mai mare posibil.

13. Scrieți 6 numere naturale cuprinse între 23 427 și 23 482, care se pot rotunji la:
a) 23 500; b) 23 400; c) 23 480.

14. Câte numere naturale de trei cifre se pot rotunji la ordinul sutelor, astfel încât să se obțină numărul 400?

15. Determinați perechile (b, d) care lipsesc din spațiile punctate din tabelul dat, pentru care $a < b \leq c \leq d < e$:

a	*b*	*c*	*d*	*e*
12	...	19	...	22

16. Determinați cel mai mic număr natural de cinci cifre diferite care este mai mare decât 30 000 și are suma cifrelor sale mai mare decât 21.

17. Asociați fiecare cifră din coloana **A** cu o literă din coloana **B**, pentru a obține predecesorul sau succesorul numărului din coloana **A**.

A	B
1. 327	a) 327
2. 329	b) 328
3. 330	c) 329
4. 332	d) 330
	e) 331

18. Ordonați descrescător numerele naturale a, b, c, d, e, știind că:
$c > e$, $c < a$, $d > a$ și $b > d$.

19. a) Scrieți numerele pare cuprinse între $\overline{ab2}$ și $\overline{ab8}$.
b) Scrieți numerele impare cuprinse între $\overline{a13}$ și $\overline{a28}$.

20. a) De câte ori se folosește cifra 3 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 100?
b) De câte ori se folosește cifra 1 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 1 000?

Minitest

1. Comparați numerele: a) 12 435 și 12 345; b) 20 099 și 2 999.

2 puncte

2. a) Aproximați numărul 324 567, prin lipsă, la zeci, sute, mii și, respectiv, sute de mii.
b) Aproximați numărul 182 323, prin adaos, la zeci, sute, mii și, respectiv, sute de mii.

2 puncte

3. Determinați toate numerele $\overline{ab}$, știind că $\overline{a4b} > 846$.

3 puncte

4. Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $200 < \overline{abc} < 400$ și $c = a + b + 3$.

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 3 Adunarea numerelor naturale

3.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

În colecția sa, Vlad are 5 cărți poștale cu obiective turistice din România. Dina, colega lui, îi face cadou încă 3. Câte cărți poștale are acum Vlad?
Răspuns: $5+3=8$ cărți poștale

De reținut

Prin adunarea numerelor naturale *a* și *b* se obține un număr natural *s*, numit *suma* numerelor *a* și *b*.

$$a+b=s$$

Numerele *a* și *b* se numesc *termenii* adunării, iar rezultatul adunării poartă numele de *sumă*.
Scrierea $a+b$ se numește *suma neefectuată*, iar *s* este *suma efectuată*.

Exemplu

27	+	31	=	58	27 + 31 este *suma neefectuată*
termen	plus	termen	egal	sumă	58 este *suma efectuată*

De reținut

Din clasele anterioare știm că, pentru a aduna două numere naturale, se adună unitățile de același ordin și se ține cont că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

```
  +1 +1
 2  6  7 +
 5  8  5
 8  5  2
```

unități: $7+5=12=10+2$
zeci: $6+8+1=15=10+5$
sute: $2+5+1=8$

```
    +1 +1 +1
    9  7  3 +
 3  6  4  9
 4  6  2  2
```

unități: $3+9=12=10+2$
zeci: $7+4+1=12=10+2$
sute: $9+6+1=16=10+6$
mii: $3+1=4$

Știați că...

Adunarea reprezintă, de fapt, o numărare succesivă. De exemplu, pentru a aduna pe 5 cu 3 vom număra, în șirul numerelor naturale, încă 3 numere pornind de la 5:

0 1 2 3 4 5 → 6 → 7 → 8 9 10 …

La fel, a aduna pe 3 cu 5 înseamnă a număra, în șirul numerelor naturale, 5 numere pornind de la 3:

0 1 2 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 9 10 …

3.2. Proprietățile adunării numerelor naturale

Privind adunarea ca pe o numărare succesivă, din exemplul prezentat mai sus constatăm că are loc relația $5+3=3+5$ sau, altfel spus, că suma a două numere naturale este aceeași, indiferent de ordinea termenilor. Pentru a evidenția și alte reguli care se respectă atunci când efectuăm operația de adunare, vom analiza câteva probleme practice.

Mate practică

În drumul spre școală, Vlad trece în fiecare zi să o ia și pe colega lui de bancă, Dina. La terminarea cursurilor, Vlad se întoarce pe același drum, lăsând-o pe Dina acasă la ea. De la casa lui Vlad până la casa Dinei sunt 250 m, iar de la casa Dinei până la școală sunt 450 m.

a) Ce distanță parcurge Vlad când merge de acasă până la școală?
Răspuns: 250 m + 450 m = 700 m

b) Ce distanță parcurge Vlad când se întoarce de la școală acasă?
Răspuns: 450 m + 250 m = 700 m

Ce observăm

Suma a două numere naturale este aceeași, indiferent de ordinea în care apar cei doi termeni. Această proprietate a adunării se numește *comutativitate*.

$\underbrace{250+450}_{700}=\underbrace{450+250}_{700}$ sau, în general, $a+b=b+a$ pentru orice numere naturale a și b.

Mate practică

Vlad a citit, de vineri până duminică, cartea sa preferată.
Vineri a citit 24 de pagini, sâmbătă 67, iar duminică 48.

a) Câte pagini a citit Vlad vineri și sâmbătă?
Răspuns: $24+67=91$ pagini

b) Câte pagini a citit Vlad sâmbătă și duminică?
Răspuns: $67+48=115$ pagini

c) Câte pagini a citit Vlad în weekend?
Răspuns 1: $91+48=139$ pagini (am adunat cât a citit în primele două zile cu cât a citit duminică)
Răspuns 2: $24+115=139$ pagini (am adunat cât a citit vineri cu cât a citit în ultimele două zile)

Ce observăm

Când adunăm trei numere naturale, se obține același rezultat fie că adunăm mai întâi primele două numere și apoi adunăm suma obținută cu al treilea număr, fie că adunăm primul număr la suma ultimelor două. Această proprietate a adunării se numește *asociativitate*.

$\underbrace{\underbrace{(24+67)}_{91}+48}_{139}=\underbrace{24+\underbrace{(67+48)}_{115}}_{139}$ sau, în general, $(a+b)+c=a+(b+c)$ pentru orice numere naturale a, b și c.

Asemănător, se pot stabili și alte reguli pe care le respectă operația de adunare.

De reținut

Proprietățile adunării numerelor naturale

1. **Comutativitatea:** $a+b=b+a$, pentru orice numere naturale a și b.
2. **Asociativitatea:** $(a+b)+c=a+(b+c)$, pentru orice numere naturale a, b și c.
3. **0 este element neutru:** $a+0=0+a=a$, pentru orice număr natural a.

3.3. Legătura dintre operația de adunare și relațiile de egalitate/inegalitate

De reținut

1. Adunând un număr natural în ambii membri ai unei egalități, egalitatea se păstrează:
   • dacă $a=b$, atunci $a+c=b+c$, pentru orice număr natural c.
2. Adunând un număr natural în ambii membri ai unei inegalități, inegalitatea se păstrează:
   • dacă $a<b$, atunci $a+c<b+c$, pentru orice număr natural c.
3. Adunând termen cu termen două egalități, egalitatea se păstrează:
   • dacă $a=b$ și $c=d$, atunci $a+c=b+d$.
4. Adunând termen cu termen două inegalități de același sens, inegalitatea se păstrează:
   • dacă $a<b$ și $c<d$, atunci $a+c<b+d$;
   • dacă $a>b$ și $c>d$, atunci $a+c>b+d$.

Exemplu

Numerele naturale a și b verifică relațiile $a+b=11$ și $b+2a=15$.
Determinați numerele $x=(a+2)+(b+3)$ și $y=3a+2b$.

Rezolvare:
a) Deoarece $x=a+b+5$, vom aduna 5 în ambii membri ai egalității $a+b=11$. Obținem: $a+b+5=16$, adică $x=16$.
b) Adunând membru cu membru egalitățile $a+b=11$ și $b+2a=15$, obținem:
$(a+b)+(b+2a)=11+15$, de unde rezultă $3a+2b=26$, adică $y=26$.

Gândire critică. Suma primelor *n* numere naturale nenule

De reținut

Pentru orice număr natural $n \geq 1$ are loc egalitatea:

$1 + 2 + \ldots + n = n \cdot (n+1) : 2.$

Demonstrație: Notând cu S suma primelor n numere naturale nenule, avem:

$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$

$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$

Adunând membru cu membru cele două relații, obținem:

$2 \cdot S = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \ldots + (n-1+2) + (n+1),$

adică $2 \cdot S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ paranteze}} = n \cdot (n+1)$, de unde rezultă: $S = n \cdot (n+1) : 2$.

Exemple

1. Suma primelor zece numere naturale nenule este:
$1 + 2 + \ldots + 10 = 10 \cdot 11 : 2 = 110 : 2 = 55.$

2. Suma numerelor naturale de la 1 la 100 este:
$1 + 2 + \ldots + 100 = 100 \cdot 101 : 2 = 10\,100 : 2 = 5\,050.$

Observație

Sumele de tipul celei din exemplul anterior se numesc sume Gauss, după numele marelui matematician german Karl Friedrich Gauss, despre care se spune că, în clasele primare, a primit ca pedeapsă de la profesorul său J.G. Büttner să calculeze suma numerelor de la 1 la 100. Procedând ca în demonstrația de mai sus, el a reușit să determine rezultatul în câteva secunde, spre uimirea profesorului și a asistentului acestuia.

Studiu individual

Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) a fost un matematician, fizician și astronom german, considerat unul dintre cei mai mari oameni de știință germani.

Folosind ca sursă un dicționar de personalități științifice ori site-uri de internet recomandate de profesorul vostru, documentați-vă despre contribuția lui Gauss la dezvoltarea științei.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Folosind asociativitatea și comutativitatea adunării, calculați mai rapid sumele:

a) $S = 22 + 23 + 24 + 100 + 76 + 77 + 78$; b) $S = (24 + 36) + 73 + 22 + 87 + (88 + 44) + 66$.

Rezolvare:

a) $S = 22 + 23 + 24 + 100 + 76 + 77 + 78 = (22 + 78) + (23 + 77) + (24 + 76) + 100 =$
$= 100 + 100 + 100 + 100 = 400$;

b) $S = (24 + 36) + 73 + 22 + 87 + (88 + 44) + 66 = (24 + 36) + (73 + 87) + (22 + 88) + (44 + 66) =$
$= 60 + 160 + 110 + 110 = 220 + 220 = 440$.

2. Calculați rapid, înlocuind unul dintre termenii adunării cu o sumă neefectuată, după modelul:

$529 + 780 = 509 + 20 + 780 = 509 + (20 + 780) = 509 + 800 = 1\,309$;

a) $675 + 388$; b) $937 + 677$.

Rezolvare:

a) $675 + 388 = 675 + (25 + 363) = (675 + 25) + 363 = 700 + 363 = 1\,063$;

b) $937 + 677 = (900 + 37) + (600 + 77) = (900 + 600) + (37 + 77) = 1\,500 + 114 = 1\,614$.

3. Știind că $x + 2y + 13 = 24$, determinați numerele $a = 18 + 2y + x$ și $b = 2x + 77 + 4y$.

Rezolvare:

$a = 18 + 2y + x = (x + 2y + 13) + 5 = 24 + 5 = 29$

$b = 2x + 77 + 4y = x + x + 2y + 2y + 77 = (x + 2y + 13) + (x + 2y + 13) + 51 = 99.$

4. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care are loc egalitatea $\overline{17ab}+\overline{ab57}=5191$.

Rezolvare:

Metoda 1. Scriem termenii din sumă unul sub altul:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 7 & a & b\ + \\ a & b & 5 & 7 \\ \hline 5 & 1 & 9 & 1 \end{array}$$

Suma dintre b și 7 are ultima cifră 1, deci $b=4$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 7 & a & 4\ + \\ a & 4 & 5 & 7 \\ \hline 5 & 1 & 9 & 1 \end{array}$$

Ultima cifră a sumei dintre a, 5 și 1 este 9, deci $a=3$. Deci $\overline{ab}=34$, iar egalitatea este $1734+3457=5191$, adevărată.

Metoda 2. Folosind scrierea zecimală, avem:

$\overline{17ab}+\overline{ab57}=1700+\overline{ab}+\overline{ab00}+57=1757+\overline{abab}$, deci $1757+\overline{abab}=5191$.

Rezultă că $\overline{abab}=5191-1757=3434$, de unde $\overline{ab}=34$.

5. Fie $n\geq 3$ un număr natural. Ordonați crescător numerele $2n+8$, $4n+3$, $n+10$.

Rezolvare:

Adunând numărul natural $n+7$ la fiecare dintre membrii inegalității $n\geq 3$, obținem $2n+7\geq n+10$, deci $n+10\leq 2n+7<2n+8$. Apoi, adunând membru cu membru inegalitățile $n\geq 3$ și $n\geq 3$, obținem $2n\geq 6$. Adunând acum $2n+3$ în ambii membri, obținem $4n+3\geq 2n+9>2n+8$. Așadar, $n+10<2n+8<4n+3$.

Probleme propuse

1. Calculați:

a) $241+347$; b) $127+234$; c) $6453+1200$; d) $678+5438$;
e) $4539+496$; f) $134+739$; g) $1020+3057+59$; h) $219908+1005+12$;
i) $42008+21007+674$; j) $378+324+5002$; k) $92367+195+6792$; l) $210+2011+20012$.

2. Folosind asociativitatea și comutativitatea adunării, calculați sumele:

a) $S=3+12+45+97+17+83+55+88+100$;
b) $S=200+175+113+37+25+87+163$;
c) $S=19+32+58+91+42+81+55+9+100$.

3. Calculați:

a) $24+68+76+32$; b) $224+29+32+76+71+24$; c) $90+900+100+10$;
d) $450+327+550+673$; e) $444+999+556+1$; f) $25+58+175+142$.

4. Calculați următoarele sume:

a) $1+2+3+\ldots+30$; b) $2+3+4+\ldots+30$; c) $9+10+11+\ldots+30$.

5. a) Suma a două numere naturale consecutive este 43. Determinați numerele.
b) Suma a trei numere naturale consecutive este 48. Determinați numerele.
c) Suma a două numere naturale pare consecutive este 26. Determinați numerele.
d) Suma a trei numere impare consecutive este 57. Determinați numerele.

6. a) Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{7ab}+\overline{ab2}=977$.
b) Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{4ab}+\overline{ba9}=852$.

7. Efectuați:

a) $\overline{a105}+\overline{3b3}$; b) $\overline{a00d}+\overline{b00}+60$; c) $\overline{ab0000}+\overline{cd00}+\overline{ef}$.

8. Dacă a este un număr par și b este un număr impar, precizați care dintre următoarele afirmații sunt cu siguranță adevărate și care sunt cu siguranță false:

a) $a+b+11$ este un număr par; b) $a+b+12$ este un număr par;
c) $a+4+b+9$ este un număr impar; d) $50+a+b+36$ este un număr impar.

9. a) Dacă n este cea mai mare cifră pară, atunci determinați numerele pare cuprinse între $n+11$ și $n+24$.
b) Dacă n este cea mai mare cifră impară, atunci determinați numerele impare cuprinse între $n+17$ și $n+39$.

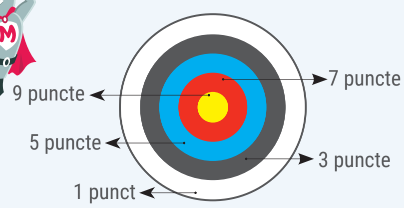
10. Dina și Vlad folosesc computerul pentru a crea un program care să citească datele de intrare și să producă datele de ieșire cerute. Identificați rezultatele greșite și indicați răspunsurile corecte, după model:

	Date de intrare	Valoare	Date de ieșire	Valoare	Verificare rezultate
a)	$5+3a+2b$	22	$2b+3a+45$	62	*corect*
b)	$2a+4b+19$	51	$60+4b+15+2a$	701	*incorect*/rezultatul *corect* este 107
c)	$5a+3b+99$	158	$34+10a+78+6b$	230	…
d)	$3a+5b$	26	$7a+8b$	35	…
	$4a+3b$	20			
e)	$a+2b$	25	$5a+9b+7$	122	…
	$2a+3b$	40			

11. Reconstituiți adunările, scriind toate variantele posibile.

a) $\begin{array}{r} 1*6+ \\ 2* \\ \hline *13 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} **3*+ \\ 794* \\ \hline 13783 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 4*+ \\ 5*2 \\ \hline *29 \end{array}$

12. În tabăra medievală, Luca și Dina trag la țintă cu arcul. Desemnați câștigătorul concursului, știind că punctajul final al fiecărui concurent se calculează însumând punctele de pe fiecare zonă.



Nr. săgeți / Concurent	Galben	Roșu	Albastru	Negru	Alb
Dina	2	3	4	5	1
Luca	3	1	5	4	2

Jocuri

1. Vlad scrie pe tablă numărul 19 și îi propune Dinei să taie cu creta numărul 19 și să scrie în locul lui două numere naturale nenule a căror sumă să fie 19. Apoi, Vlad scrie fiecare număr ales de Dina ca o sumă de două numere naturale nenule. Când jocul se oprește, ce numere sunt pe tablă?

2. Mă gândesc la un număr de două cifre. Adun la numărul meu cifra unităților, apoi cifra zecilor. Obțin numărul 79. Care este numărul la care m-am gândit?

3. Determinați numărul natural n, știind că poate fi scris doar în 7 moduri ca sumă de două numere naturale nenule, a și b, astfel încât a este mai mic decât b.

4. Identificați regula și determinați numărul care lipsește.

7158	91910	…	132714

5. Vlad spune un număr de două cifre. Dacă este mai mic decât 50, Dina adună 3. Dacă este mai mare decât 50, Dina adună 4. Apoi Vlad face același lucru. Câștigă cel care obține primul un număr de 3 cifre. Dacă Vlad începe jocul cu numărul 39, atunci cine câștigă jocul?

Minitest

1. Efectuați, aplicând o metodă de calcul rapid:
a) $11+3+9+27$; b) $998+97+2+11+3+89$.

2 puncte

2. a) Dacă $\overline{ab}+\overline{a3}=85$, atunci calculați $\overline{ab}+\overline{ba}$.
b) Dacă $\overline{a1}+\overline{3b}=55$, atunci calculați $\overline{ab}+\overline{ba}$.

2 puncte

3. Dacă $1+2+3+\ldots+11=a$ și $9+10+11+\ldots+18=b$, atunci calculați $a+b$.

2 puncte

4. Pe o tablă sunt numerele 7, 4 și 10. Orice elev poate scrie pe tablă suma a două numere aflate pe tablă. Prezentați o modalitate de calcul pentru ca pe tablă să fie scris numărul 63.

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 4 Scăderea numerelor naturale

4.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

În colecția sa, Vlad are 27 de bancnote din diferite țări de pe glob. El dorește să completeze un clasor întreg, care este format din 40 de bancnote.
Câte bancnote îi mai sunt necesare?

Analiză:
Pentru a rezolva problema, ar trebui să aflăm un număr care adunat cu 27 dă 40. Un astfel de număr există, deoarece 40 se află după 27 în șirul numerelor naturale sau, altfel spus, deoarece 40 este mai mare decât 27. Vom numi acest număr diferența numerelor 40 și 27.

Răspuns: $40 - 27 = 13$ bancnote îi sunt necesare lui Vlad

De reținut

Fie a și b două numere naturale, cu $a \geq b$. Numărul natural d cu proprietatea că $a = b + d$ se numește *diferența* numerelor a și b.

Operația prin care din numerele naturale a și b se obține diferența lor, $a - b$, se numește *scădere*.

Se notează: $d = a - b$.
Numerele a și b se numesc *termenii* scăderii; a se numește *descăzut*, iar b se numește *scăzător*.

Scrierea $a - b$ se numește *diferența neefectuată*, iar d este *diferența efectuată*.

Exemplu

534	–	319	=	215	534 – 319	este *diferența neefectuată*
descăzut	minus	scăzător	egal	diferență	215	este *diferența efectuată*

Regulă

Pentru a scădea două numere naturale, se scad unitățile de același ordin și, dacă nu sunt suficiente unități la descăzut, se ia o unitate de ordin imediat superior și se transformă în zece unități de ordin imediat inferior.

Exemple

Exemplul 1:

$$\begin{array}{rrr} -1 & & \\ 6 & 5 & 4\ - \\ 2 & 7 & 3 \\ \hline 3 & 8 & 1 \end{array}$$

unități: $4 - 3 = 1$
zeci: $5 + 10 - 7 = 8$
sute: $6 - 1 - 2 = 3$

Exemplul 2:

$$\begin{array}{rrrr} -1 & -1 & -1 & \\ 5 & 4 & 6 & 1\ - \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ \hline 1 & 6 & 9 & 2 \end{array}$$

unități: $1 + 10 - 9 = 2$
zeci: $6 - 1 + 10 - 6 = 9$
sute: $4 - 1 + 10 - 7 = 6$
mii: $5 - 1 - 3 = 1$

Știați că...

Scăderea, fiind operația inversă adunării, reprezintă o numărare succesivă, în sens descrescător. De exemplu, pentru a scădea din 9 pe 6, vom număra, în sens descrescător, 6 numere pornind de la 9:

0 1 2 3 ← 4 ← 5 ← 6 ← 7 ← 8 ← 9 10 ...

Privind scăderea astfel, constatăm de ce este necesar ca scăzătorul să fie cel mult egal cu descăzutul[1].

[1] În clasa a VI-a vom învăța cum putem scădea dintr-un număr natural a un număr natural $b > a$. Evident, rezultatul unei astfel de scăderi nu este număr natural. Pentru a putea efectua scăderea, este nevoie să *inventăm* noi numere, numite *numere întregi negative*, aflate pe axa numerelor la stânga lui 0, pe care să le putem număra descrescător.

Mate practică

1. Autostrada A1 București – Pitești are lungimea de 112 km, iar autostrada A2 București – Constanța are lungimea de 202 km. Ce distanță trebuie să parcurgă un automobilist care dorește să meargă de la Pitești la Constanța, pe autostrăzile A1 și A2?
   Răspuns: 112 km + 202 km = 314 km
2. Mergând pe autostrăzile A1 București – Pitești și A2 București – Constanța, de la Constanța la Pitești sunt 314 km. Știind că lungimea autostrăzii A2 București – Constanța este de 202 km, aflați ce lungime are autostrada A1.
   Răspuns: 314 km – 202 km = 112 km
   Scăderea este operația inversă adunării.
   În general, dacă $a+b=s$, atunci $\begin{cases} a=s-b \\ b=s-a \end{cases}$.

Ce observăm

Proba adunării se efectuează prin scădere, astfel:
- suma – un termen = celălalt termen.

Proba scăderii se efectuează fie printr-o altă scădere, fie printr-o adunare, astfel:
- descăzutul – diferența = scăzătorul (proba scăderii prin altă scădere);
- descăzutul = scăzătorul + diferența (proba scăderii prin adunare).

4.2. Legătura dintre operația de scădere și relațiile de egalitate/inegalitate

De reținut

1. Scăzând un număr natural din ambii membri ai unei egalități, egalitatea se păstrează:
   - dacă $a=b$, atunci $a-c=b-c$, pentru orice număr natural $c \le a$.
2. Scăzând un număr natural din ambii membri ai unei inegalități, inegalitatea se păstrează:
   - dacă $a \le b$, atunci $a-c \le b-c$, pentru orice număr natural $c \le a$.
3. Egalitatea se păstrează când se scad două egalități termen cu termen:
   - dacă $a=b$, $c=d$ și $a \ge c$, atunci $a-c=b-d$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. La nașterea lui Luca, tatăl său avea 28 de ani. Determinați:
   a) Ce vârstă va avea Luca când tatăl său va avea 40 de ani?
   b) Câți ani va avea tatăl atunci când Luca va împlini 18 ani?
   Rezolvare: a) 40 – 28 = 12, deci Luca va avea 12 de ani
   b) 18 + 28 = 46, deci tatăl va avea 46 de ani

2. Determinați numărul cu 176 mai mic decât suma numerelor 98 și 99.
   Rezolvare:
   Suma este 98 + 99 = 197, iar numărul căutat este 197 – 176 = 21.
3. Aflați diferența dintre cel mai mare și cel mai mic dintre numerele naturale care se scriu folosind câte patru cifre diferite.
   Rezolvare:
   Cel mai mare număr care se scrie folosind patru cifre diferite este 9 876, iar cel mai mic este 1 023. Diferența lor este 9 876 – 1 023 = 8 853.
4. Vlad și Luca au împreună 794 de lei. Luca și Bianca au împreună 676 de lei. Cei trei au împreună 1 250 de lei. Aflați ce sumă are fiecare.

Rezolvare:
1 250 lei – 794 lei = 456 lei are Bianca (din suma tuturor am scăzut cât au Vlad și Luca)
1 250 lei – 676 lei = 574 lei are Vlad (din suma tuturor am scăzut cât au Luca și Bianca)
794 lei – 574 lei = 220 lei are Luca (din suma lui Vlad și Luca am scăzut cât are Vlad)

Probleme propuse

1. Calculați:
a) $2\,537 - 1\,322$; b) $6\,795 - 3\,063$; c) $3\,172 - 2\,183$; d) $2\,105 - 1\,537$;
e) $25\,002 - 7\,279$; f) $40\,010 - 17\,073$; g) $23\,002 - 8\,792$; h) $20\,030 - 15\,086$.

2. Calculați diferența dintre:
a) cel mai mare și cel mai mic număr de patru cifre identice;
b) cel mai mare și cel mai mic număr de trei cifre diferite;
c) cel mai mare număr de patru cifre diferite și cel mai mic număr de trei cifre identice;
d) cel mai mic număr par de patru cifre identice și cel mai mare număr impar de trei cifre identice.

3. Aflați, în fiecare caz, termenul necunoscut, știind că:
a) dacă îl adunăm pe x cu 577, obținem 867; b) adunând pe 529 cu un număr natural x, obținem 630;
c) dacă îl adunăm pe x cu 1 286, se obține 5 875; d) suma dintre x și 44 561 este 894 552.

4. Determinați termenul necunoscut:
a) $247 + x = 783$; b) $x + 318 = 2\,467$; c) $735 - x = 517$;
d) $x - 482 = 267$; e) $23\,536 - x = 10\,039$; f) $4\,357 + x + 937 = 6\,251$;
g) $873 - x = 243$; h) $x - 215 = 772$; i) $7\,815 - x + 737 = 3\,511$.

5. Calculați, ținând cont de folosirea parantezelor.
a) $(789 - 542) - 15$; b) $1\,299 - (234 - 199)$;
c) $16\,801 - [5\,622 - (1\,240 - 559)]$; d) $78\,952 - (568 - 422) - (4\,587 - 2\,559)$.

6. Suma a două numere este 98, iar diferența lor este 82. Aflați cele două numere.

7. Un autocar parcurge 349 de kilometri în prima zi, cu 52 de kilometri mai puțin în a doua zi, iar în cea de-a treia zi, parcurge cu 276 de kilometri mai puțin decât în primele două zile la un loc. Ce lungime are traseul parcurs de autocar în cele trei zile la un loc?

8. Suma a trei numere naturale este 2 002. Dacă din fiecare se scade același număr, atunci se obțin numerele: 175, 318, 723. Care sunt numerele inițiale?

9. Se consideră numerele naturale x, y, z.
a) Știind că $x + 2y = 24$ și $x + y = 19$, determinați y.
b) Știind că $3x + 2y = 18$ și $2x + 2y = 14$, determinați x.
c) Știind că $x + 2y + z = 17$ și $x + y = 10$, determinați $y + z$.

10. Se consideră numerele naturale a, b, c.
a) Dacă $a - b = 215$ și $b - c = 132$, determinați $a - c$.
b) Dacă $a - c = 138$ și $b - c = 129$, calculați $a - b$.
c) Dacă $a - b = 72$ și $(a - c) - (b + c) = 18$, determinați numărul c.

11. Efectuați:
a) $10 + 15 + 20 + \ldots + 2\,010 - 9 - 13 - 17 - \ldots - 1\,609$;
b) $10 + 20 + 30 + \ldots + 2\,020 - 9 - 18 - 27 - \ldots - 1\,818$;
c) $400\,000 + 40\,000 + 4\,000 + 400 + 40 + 4 - 3 - 30 - 300 - 3\,000 - 30\,000 - 300\,000$.

12. Determinați câte numere de forma $\overline{abcd}$ verifică egalitatea următoare:

$$\overline{abcd} - \overline{b53} - 7\,000 = 2\,000$$

Gândire critică

Sarcină de grup

Rezolvați problema în două moduri.

Având în portofel suma de 250 de lei, Vlad cumpără mai întâi o carte de 45 de lei, apoi un joc video de 125 de lei. Determinați suma de bani care i-a rămas lui Vlad.

Rezolvare 1: 250 lei – 45 lei = 205 lei (mai avea după ce a cumpărat cartea)
205 lei – 125 lei = 80 lei (i-au rămas lui Vlad)

Rezolvare 2: 45 lei + 125 lei = 170 lei (a cheltuit Vlad pe cele două produse)
250 lei – 170 lei = 80 lei (i-au rămas lui Vlad)

Ce observăm?
Cele două rezolvări de mai sus arată că are loc egalitatea: $250 - 45 - 125 = 250 - (45 + 125)$.

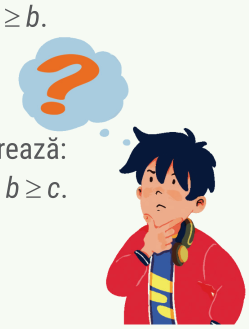
1. Analizând cele două moduri de rezolvare ale problemei de mai sus, comentați și argumentați afirmația: *Dacă dintr-un număr natural a se scad succesiv mai multe numere naturale b, c, d etc., se obține același rezultat ca atunci când din a se scade suma numerelor respective.*
Lucrând pe echipe, compuneți o problemă asemănătoare și prezentați colegilor rezolvarea acesteia.

2. Analizați următoarele modalități de a efectua scăderea atunci când scăzătorul este o sumă sau o diferență de numere scrisă într-o paranteză. Arătați că egalitățile scrise în stânga sunt adevărate și verificați, prin exemple proprii, valabilitatea afirmațiilor scrise în dreapta.
a) $97 - (31 + 25) = 97 - 31 - 25$ → dacă $a \geq b + c$, atunci $a - (b + c) = a - b - c$;
b) $20 - (15 - 5) = 20 - 15 + 5$ → dacă $a \geq b \geq c$, atunci $a - (b - c) = a - b + c$.

Calcul mental

1. Mărind descăzutul și scăzătorul cu același număr natural, diferența se păstrează:
$a - b = (a + c) - (b + c)$, pentru orice numere naturale a, b, c, cu $a \geq b$.

Exemple: $67 - 39 = (67 + 1) - (39 + 1) = 68 - 40 = 28$
$854 - 256 = (854 + 4) - (256 + 4) = 858 - 260 = 598$



2. Micșorând descăzutul și scăzătorul cu același număr natural, diferența se păstrează:
$a - b = (a - c) - (b - c)$, pentru orice numere naturale a, b, c, cu $a \geq b \geq c$.

Exemple: $131 - 83 = (131 - 3) - (83 - 3) = 128 - 80 = 48$
$572 - 106 = (572 - 6) - (106 - 6) = 566 - 100 = 466$

Încercați și voi, prin alte exemple!

Joc

Înlocuiți steluțele cu cifrele de la 0 la 9, folosind fiecare cifră o singură dată, astfel încât scăderea să fie corectă.

```
* * * * –
  * * *
-------
  * * *
```

Minitest

1. Efectuați scăderile în care:
a) descăzutul este 328 și scăzătorul 103;
b) descăzutul este 582 și scăzătorul 270.

2 puncte

2. Comparați numerele $n = 45 + (75 - 18)$ și $m = (45 + 75) - 18$.

2 puncte

3. Un tată a avut 29 de ani la nașterea fiului său. Câți ani va avea fiul când tatăl va avea 52 de ani? Câți ani va avea tatăl când fiul va avea 28 de ani?

2 puncte

4. Suma a trei numere naturale este 163. Scăzând al treilea număr din suma primelor două numere, obținem 67. Scăzând primul număr din suma ultimelor două numere, obținem 37. Determinați cele trei numere.

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 5 Înmulțirea numerelor naturale

5.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

Într-o cutie de bomboane de ciocolată se află 24 de bomboane.
Câte bomboane se găsesc în 6 cutii?

Răspuns: $\underbrace{24+24+24+24+24+24}_{6 \text{ termeni}}=144$ de bomboane.

Analiză:
În rezolvarea problemei propuse, am avut de efectuat o adunare cu 6 termeni, fiecare termen fiind egal cu 24. Cu alte cuvinte, l-am adunat pe 24 cu el însuși de 6 ori.

De reținut

Produsul numărului natural a cu numărul natural $b \geq 2$ este un număr natural p obținut prin adunarea lui a cu el însuși de b ori, sau, altfel spus, prin adunarea unui număr de b termeni, fiecare dintre aceștia egal cu a.
Operația prin care din numerele naturale a și b se obține produsul lor $a \cdot b$ se numește *înmulțire*.

$$p = a \cdot b = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{b \text{ termeni}}.$$

Numerele a și b se numesc *factorii* înmulțirii; a se numește *deînmulțit*, b se numește *înmulțitor*.
Scrierea $a \cdot b$ se numește *produs neefectuat*, iar p este *produsul* numerelor a și b.

Prin convenție, $a \cdot 1 = a$ și $a \cdot 0 = 0$, pentru orice număr natural a.
Observăm că au loc relațiile: $0 \cdot a = \underbrace{0+0+\ldots+0}_{a \text{ termeni}} = 0$ și $1 \cdot a = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{a \text{ termeni}} = a$.

Exemplu

5	·	14	=	70	$5 \cdot 14$ este *produsul neefectuat*
factor	ori	factor	egal	produs	70 este *produsul efectuat*

Regulă

Pentru a înmulți două numere naturale, înmulțim fiecare cifră a primului factor cu al doilea factor, obținând produse parțiale a căror sumă este rezultatul înmulțirii.

$$\begin{array}{r} 267\,\cdot \\ 32 \\ \hline 534 \\ 801 \\ \hline 8544 \end{array}$$

$267 \cdot 2 = 534$ → produs parțial
$267 \cdot 3 = 801$ → produs parțial
$534 + 8010 = 8544$ → suma produselor parțiale

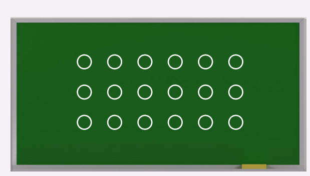
$$\begin{array}{r} 273\,\cdot \\ 649 \\ \hline 2457 \\ 1092 \\ 1638 \\ \hline 177177 \end{array}$$

5.2. Proprietățile înmulțirii

Pentru a pune în evidență diferitele reguli care se respectă atunci când efectuăm operația de înmulțire, reguli pe care le vom numi *proprietăți*, vom rezolva câteva probleme practice, urmând, de fiecare dată, câte două metode de rezolvare.

Mate practică

Profesorul de matematică cere elevilor să afle câte cercuri sunt desenate pe tabla din figura alăturată. În justificarea răspunsului, profesorul le cere să folosească operația de înmulțire.



Vlad: *Fiind 3 rânduri, fiecare a câte 6 cercuri, pe tablă sunt* $3 \cdot 6 = 18$ *cercuri*.
Dina: *Fiind 6 coloane, fiecare a câte 3 cercuri, în total sunt* $6 \cdot 3 = 18$ *cercuri*.

Ce observăm

Am obținut același rezultat în două moduri: $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$.

Produsul a două numere naturale este același, indiferent de ordinea în care apar cei doi termeni. Această proprietate a înmulțirii se numește *comutativitate*.

În general, $a \cdot b = b \cdot a$, pentru orice numere naturale a și b.

Mate practică

O miniatură a unei mașini de curse costă 10 lei. Un set cuprinde 4 mașinuțe.
Ce sumă trebuie să cheltuim pentru a cumpăra 5 seturi?

Vlad: *Mai întâi, aflăm câte mașinuțe sunt în 5 seturi:* $5 \cdot 4 = 20$ de mașinuțe.
Pentru a cumpăra 5 seturi, vom cheltui: $20 \cdot 10 = 200$ lei.

Dina: *Mai întâi, aflăm cât costă un set:* $4 \cdot 10 = 40$ lei.
Pentru a cumpăra 5 seturi, vom cheltui: $5 \cdot 40 = 200$ lei.

Ce observăm

Am obținut același rezultat în două moduri:

$$(5 \cdot 4) \cdot 10 = 5 \cdot (4 \cdot 10).$$

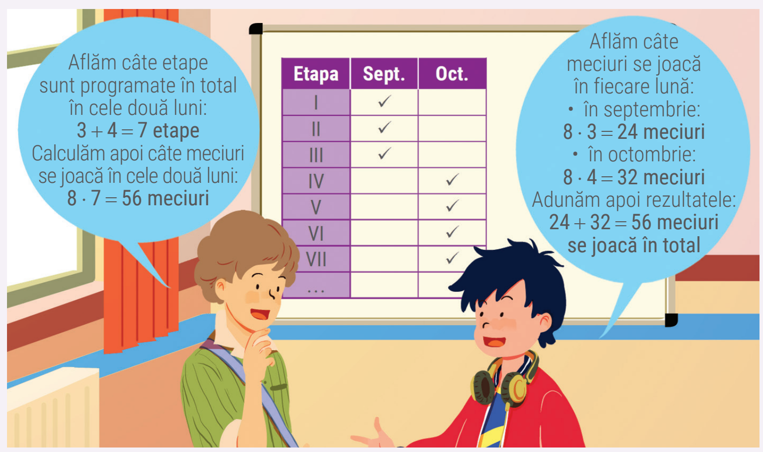
Când înmulțim trei numere naturale, se obține același rezultat fie că produsul primelor două numere se înmulțește cu al treilea, fie că primul număr se înmulțește cu produsul ultimelor două. Această proprietate a înmulțirii se numește *asociativitate*.

În general, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pentru orice numere naturale a, b și c.

Mate practică

În fiecare etapă a campionatului național de handbal se joacă 8 meciuri.

În septembrie sunt programate 3 etape, iar în octombrie sunt programate 4 etape. Câte meciuri se joacă în campionat în septembrie și octombrie?



Ce observăm

Am obținut același rezultat în două moduri: $8 \cdot (3 + 4) = 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4$.

Când înmulțim o sumă cu un număr, se obține același rezultat ca atunci când adunăm produsele dintre fiecare termen al sumei cu acel număr. Această proprietate se numește *distributivitatea înmulțirii față de adunare*.

În general, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, pentru orice numere naturale a, b și c

De reținut

1. Înmulțirea numerelor naturale este comutativă:
$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ pentru orice numere naturale } a \text{ și } b.$$
2. Înmulțirea numerelor naturale este asociativă:
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ pentru orice numere naturale } a, b \text{ și } c.$$
3. Numărul natural 1 este element neutru la înmulțirea numerelor naturale:
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \text{ pentru orice număr natural } a.$$
4. Înmulțirea numerelor naturale este distributivă față de adunare și față de scădere:
Pentru orice numere naturale a, b, c, avem:
a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$;
b) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
$(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$, dacă $b \geq c$.
5. Dacă unul dintre factorii unui produs este 0, atunci produsul este 0:
$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0, \text{ pentru orice număr natural } a.$$

5.3. Legătura dintre operația de înmulțire și relațiile de egalitate/inegalitate

De reținut

1. Înmulțind ambii membri ai unei egalități cu un număr natural, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$, pentru orice număr natural c.

2. Înmulțind ambii membri ai unei inegalități cu un număr natural nenul, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$, atunci $a \cdot c < b \cdot c$, pentru orice număr natural nenul c.

3. Înmulțind termen cu termen două egalități, egalitatea se păstrează:
- dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $a \cdot c = b \cdot d$.

4. Înmulțind termen cu termen două inegalități de același sens, inegalitatea se păstrează:
- dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a \cdot c < b \cdot d$;
- dacă $a > b$ și $c > d$, atunci $a \cdot c > b \cdot d$.

Exemplu

Într-un produs de două numere naturale, primul factor este cuprins între 8 și 15, iar celălalt între 16 și 23. Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare posibilă a acestui produs.

Rezolvare:
Notăm cu a și b cei doi factori. Dacă numărul natural a este cuprins între 8 și 15, atunci $9 \le a \le 14$; la fel, dacă b este cuprins între 16 și 23, atunci $17 \le b \le 22$. Înmulțind termen cu termen cele două inegalități, obținem $9 \cdot 17 \le a \cdot b \le 14 \cdot 22$, adică $153 \le a \cdot b \le 308$.
Așadar, cea mai mică valoare posibilă a produsului este 153, iar cea mai mare valoare este 308.

Observație:
Înmulțind termen cu termen inegalitățile $8 < a < 15$ și $16 < b < 23$, se obține relația $128 < a \cdot b < 345$. Am putea fi tentați să credem că cea mai mică valoare a produsului este 129, ceea ce nu este adevărat, întrucât, deși inegalitatea $128 < a \cdot b < 345$ este adevărată, produsul $a \cdot b$ nu poate fi egal cu 129 pentru nicio valoare a numerelor a și b care să respecte enunțul.

5.4. Paritatea produsului. Ultima cifră a unui produs de numere

De reținut

1. Dacă cel puțin un factor al unei înmulțiri este număr par, atunci și produsul este număr par.
Exemplu: Produsul $3 \cdot 4 \cdot 5$ este par, deoarece factorul 4 este par.
Produsul a două sau mai multe numere naturale impare este un număr impar.
Exemplu: Produsul $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 123$ este impar, deoarece toți factorii sunt impari.
Produsul a două numere naturale consecutive este un număr par.

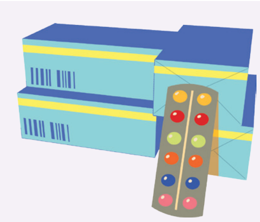
2. Ultima cifră a unui produs este ultima cifră a produsului obținut prin înmulțirea ultimelor cifre ale fiecărui factor.
Exemplu: Ultima cifră a produsului $1\,234 \cdot 567$ este ultima cifră a produsului $4 \cdot 7$, adică 8.

Știați că...

Produsul primelor n numere naturale nenule se notează $n!$ și se citește „n factorial". Prin convenție, $0! = 1$.
Exemple: $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 120$, $7! = 5\,040$
$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Într-un flacon de medicamente sunt 7 folii cu comprimate. Fiecare folie conține 12 comprimate. Flacoanele sunt ambalate câte 10 într-o cutie. Determinați numărul de comprimate existente în 15 cutii.



Rezolvare: Un flacon conține $7 \cdot 12 = 84$ de comprimate.
O cutie conține $84 \cdot 10 = 840$ de comprimate.
15 cutii conțin $840 \cdot 15 = 12\,600$ de comprimate.

2. Determinați numerele naturale x și y, știind că $(x+2)\cdot(y+1)=15$.

Rezolvare:

Perechile de numere naturale cu produsul 15 sunt (1,15), (3,5), (5,3) și (15,1).

Deoarece $x+2>1$, sunt posibile trei cazuri:

- dacă $x+2=3$ și $y+1=5$, atunci $x=1, y=4$;
- dacă $x+2=5$ și $y+1=3$, atunci $x=3, y=2$;
- dacă $x+2=15$ și $y+1=1$, atunci $x=13, y=0$.

3. Produsul a două numere naturale este 405. Mărind unul dintre termeni cu 5, produsul numerelor devine 450. Determinați cele două numere naturale.

Rezolvare:

Notând cele două numere cu a și b, condițiile din enunț se scriu $a\cdot b=405$ și $(a+5)\cdot b=450$.

Întrucât $(a+5)\cdot b=a\cdot b+5\cdot b=405+5\cdot b$, obținem $405+5\cdot b=450$, adică $b=9$, de unde $a=45$.

Probleme propuse

1. Calculați:
a) $12\cdot 35$; b) $35\cdot 25$; c) $128\cdot 45$;
d) $324\cdot 15$; e) $128\cdot 204$; f) $305\cdot 207$.

2. Calculați:
a) $11\cdot 17\cdot 19$; b) $13\cdot 25\cdot 8$; c) $40\cdot 28\cdot 17$;
d) $13\cdot 14\cdot 15$; e) $37\cdot 35\cdot 12$; f) $16\cdot 26\cdot 14$.

3. Folosind asociativitatea și comutativitatea înmulțirii, efectuați:
a) $2\cdot 37\cdot 5$; b) $2\cdot 25\cdot 17\cdot 5\cdot 4$; c) $250\cdot 2\cdot 4\cdot 579\cdot 5$.

4. Efectuați:
a) $104\cdot 52-179$; b) $49\cdot 28-31\cdot 14$; c) $567\cdot 3+45\cdot 11$;
d) $2107-11\cdot 12+91\cdot 13$; e) $3021-113\cdot 19+74\cdot 86$; f) $67\cdot 34-24\cdot 25+22\cdot 11$.

5. Calculați, după modelul prezentat:

$$12\cdot 99=12\cdot(100-1)=12\cdot 100-12\cdot 1=1200-12=1188$$

a) $35\cdot 99$; b) $27\cdot 101$; c) $15\cdot 102$;
d) $31\cdot 98$; e) $4\cdot 999$; f) $5\cdot 1004$

6. a) Știind că $x=4$, determinați produsul $p=(x+1)\cdot(2x+11)\cdot(3x-7)$.
b) Știind că $y=9$, determinați produsul $p=(y+5)\cdot(2y-4)\cdot(3y+3)$.

7. Un biciclist parcurge un traseu în 4 zile astfel: în prima zi 19 kilometri, în a doua zi de 4 ori mai mulți kilometri decât în prima zi, în a treia zi se întoarce 11 kilometri, iar în ultima zi parcurge de 5 ori mai mulți kilometri decât a parcurs în a treia zi. Determinați lungimea traseului.

8. Într-un penar sunt 9 pixuri, 5 creioane, două radiere și o ascuțitoare. Penarul gol a costat 12 lei, un pix a costat 5 lei, un creion 3 lei, o radieră 2 lei și ascuțitoarea 7 lei. Determinați prețul penarului cu rechizitele achiziționate.

9. Unul dintre factorii unei înmulțiri de doi factori este cuprins între 9 și 17, iar celălalt factor între 11 și 22. Determinați cea mai mică și cea mai mare valoare posibilă a acestui produs.

10. Determinați cea mai mare valoare posibilă a produsului a două numere naturale cu suma 9.

11. Determinați numerele naturale x și y, știind că $(x-1)\cdot(y+4)=20$.

12. Produsul a două numere naturale este 414. Mărind unul dintre factori cu 10, produsul numerelor devine 644. Determinați cele două numere naturale.

13. Determinați numerele care lipsesc din spațiile punctate:
a) 5; 15; 25; ...; ...; ... b) 7; 14; 21; ...; ...; ... c) 15; 30; 90; ...; ...; ...
d) 122; 3124; 5306; ...; ...; ... e) 122; 3412; 4520; ...; ...; ... f) 3; 4; 12; 48; ...; ....; ...

14. Determinați în câte zerouri se termină produsul primelor 57 de numere naturale nenule.

15. Dacă produsul a două numere naturale a și b este 72, atunci care dintre următoarele afirmații este cu siguranță falsă:

a) a și b pot fi numere naturale pare; b) a și b sunt numere naturale impare;
c) a și b pot avea parități diferite; d) a și b pot fi numere naturale formate din două cifre.

16. Dacă a este un număr par și b este un număr impar, atunci care dintre următoarele afirmații sunt cu siguranță adevărate și care sunt cu siguranță false:

a) $a \cdot b \cdot 23$ este un număr impar; b) $a \cdot b \cdot 24$ este un număr par;
c) $a \cdot b + 4b$ este un număr impar; d) $a \cdot b \cdot 5$ are ultima cifră 5.

17. Folosiți paranteze pentru a obține enunțuri corecte:

a) $13 + 2 \cdot 5 = 25 \cdot 3$; b) $19 - 5 \cdot 3 - 2 = 6$; c) $19 - 5 \cdot 3 - 2 = 14$.

18. Înlocuiți casetele cu unul dintre semnele $+$, $-$ sau $\cdot$ pentru a obține enunțuri corecte:

a) $15 \square 7 \square 2 = 1$; b) $128 \square 22 \square 4 \square 38 = 2$; c) $24 \square 5 \square 3 \square 2 = 7$.

19. Determinați cifrele lipsă din următoarele înmulțiri:

a)
$$\begin{array}{r} 4\,7\,2\ \cdot \\ *\,* \\ \hline 1\,4\,1\,6 \\ 9\,4\,4\ \ \\ \hline *\,*\,*\,*\,* \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 3\,6\,2\ \cdot \\ *\,* \\ \hline *\,*\,* \\ 3\,*\,*\,8\ \ \\ \hline *\,*\,3\,*\,4 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 4\,5\,*\,6\ \cdot \\ *\,2\,* \\ \hline *\,*\,1\,4\,4 \\ 9\,*\,7\,*\ \ \\ 1\,3\,*\,0\,8\ \ \ \ \\ \hline 1\,*\,6\,9\,*\,6\,* \end{array}$$

20. Determinați numerele naturale a și b, știind că suma lor este 431 și $2 \cdot a + 5 \cdot b = 1\,696$.

21. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{2x34}$, știind că produsul cifrelor sale este 24.
b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{2xy4}$, știind că produsul cifrelor sale este 48.

22. a) Arătați că ultima cifră a produsului a două numere naturale consecutive poate fi 0, 2 sau 6.
b) Există numere naturale n astfel încât $n \cdot (n + 1) = 2017$? Justificați răspunsul.

Calcul mental

$32 \cdot 11$

❶ 32 → 3 … 2

❷ 3 + 2 → 3 5 2

$32 \cdot 11 = 352$

$87 \cdot 11$

❶ 87 → 8 … 7

❷ 8 + 7 → 15 → 8 … 7

❸ 87 → 9 5 7
(8 + 1)

$87 \cdot 11 = 957$

$2\,536 \cdot 11$

2 + 5 + 3 + 6 → 2 7 8 9 6

$2\,536 \cdot 11 = 27\,896$

Calculați:

a) $45 \cdot 11$; b) $123 \cdot 11$; c) $708 \cdot 11$; d) $1\,958 \cdot 11$; e) $2\,174 \cdot 11$.

Minitest

1. Efectuați, aplicând procedee de calcul rapid: a) $2 \cdot 78 \cdot 5$; b) $5 \cdot 235 \cdot 5 \cdot 4$.

2 puncte

2. a) Scrieți numărul 11 ca produs de trei numere naturale.
b) Scrieți numărul 8 ca produs de trei numere naturale distincte.

2 puncte

3. Determinați ultima cifră a produsului $32 \cdot 34 \cdot 36$.

3 puncte

4. Dina are 7 cutii. În fiecare cutie sunt 12 borcane. Fiecare borcan conține 9 bile. Determinați numărul de bile din cele 7 cutii.

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 6 Factor comun

Situație problemă

Lotul de volei al școlii, format din 12 jucători, are nevoie de echipamente noi, compuse din șort și tricou. Un tricou costă 80 de lei, iar un șort 50 de lei. Câți bani sunt necesari pentru a cumpăra noile echipamente?

Vlad: *Ideea mea este să calculăm cât costă tricourile, apoi cât costă șorturile, după care să adunăm rezultatele:*

$12 \cdot 80$ *lei* $= 960$ *de lei costă tricourile*

$12 \cdot 50$ *lei* $= 600$ *de lei costă șorturile*

960 *lei* $+ 600$ *lei* $= 1\,560$ *de lei costă noile echipamente*

Dina: *Ar fi mai bine să aflăm mai întâi cât costă echipamentul pentru un jucător, după care să calculăm costul pentru toată echipa:*

80 *lei* $+ 50$ *lei* $= 130$ *de lei costă un set compus dintr-un șort și un tricou*

$12 \cdot 130$ *lei* $= 1\,560$ *de lei costă tot echipamentul*

Are loc egalitatea $12 \cdot 80\ lei + 12 \cdot 50\ lei = 12 \cdot (80\ lei + 50\ lei)$.

Observații

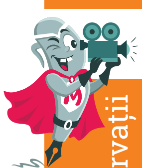
Deși am obținut același rezultat, metoda Dinei este mai rapidă și mai ușoară, deoarece necesită doar două operații, în timp ce Vlad are nevoie de trei operații.

În lecția anterioară am învățat următoarele proprietăți:
- distributivitatea înmulțirii față de adunare: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
- distributivitatea înmulțirii față de scădere: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

De reținut

În suma de doi termeni $a \cdot b + a \cdot c$ numărul a este factor la fiecare produs, de aceea îl vom numi *factor comun*. Același lucru se observă și în cazul diferenței. Prin urmare, scriind egalitățile de mai sus sub forma: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$ sau $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, spunem că am scos pe a factor comun.

Avantajul scoaterii factorului comun este că, în loc să efectuăm trei operații în membrul stâng (două înmulțiri și o adunare sau o scădere), efectuăm numai două operații în membrul drept (o adunare/scădere și o înmulțire).



Observații

1. Se poate scoate factor comun și în cazul unei sume/diferențe de mai multe produse:
$$m \cdot a + m \cdot b + m \cdot c - m \cdot d = m \cdot (a + b + c - d).$$
2. În unele situații, pentru a scoate factor comun, putem înlocui numărul m cu produsul neefectuat $m \cdot 1$:
$$m \cdot a + m = m \cdot a + m \cdot 1 = m \cdot (a + 1);$$
$$m \cdot a - m \cdot b - m = m \cdot a - m \cdot b - m \cdot 1 = m \cdot (a - b - 1).$$

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Scrieți fiecare dintre următoarele numere ca produs de două numere naturale, apoi calculați:

a) $A = 125 \cdot 14 + 125 \cdot 19 - 125 \cdot 25$;

b) $B = 2017 \cdot 188 - 2017 \cdot 89 + 2017$;

c) $C = 63 \cdot 78 - 63 \cdot 33 + 45 \cdot 39 - 45 \cdot 15$.

Rezolvare: a) $A = 125 \cdot 14 + 125 \cdot 19 - 125 \cdot 25 = 125 \cdot (14 + 19 - 25) = 125 \cdot 8 = 1\,000$;

b) $B = 2017 \cdot 188 - 2017 \cdot 89 + 2017 = 2017 \cdot (188 - 89 + 1) = 2017 \cdot 100 = 201\,700$;

c) $C = 63 \cdot 78 - 63 \cdot 33 + 45 \cdot 39 - 45 \cdot 15 = 63 \cdot (78 - 33) + 45 \cdot (39 - 15) =$
$= 63 \cdot 45 + 45 \cdot 24 = 45 \cdot 63 + 45 \cdot 24 = 45 \cdot (63 + 24) = 45 \cdot 87 = 3\,915$.

2. Știind că $a = 7$, $b + c = 18$ și $c - d = 11$, calculați:

a) $ab + 2ac - ad$; b) $a + 2ab + 5ac - 3ad$.

Rezolvare: a) $ab + 2ac - ad = a(b + 2c - d) = a(b + c + c - d) = 7 \cdot (18 + 11) = 7 \cdot 29 = 203$;

b) $a + 2ab + 5ac - 3ad = a + 2ab + 2ac + 3ac - 3ad = a + 2a(b + c) + 3a(c - d) =$
$= 7 + 7 \cdot 2 \cdot 18 + 7 \cdot 3 \cdot 11 = 7 \cdot (1 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 11) = 7 \cdot 70 = 490$.

Probleme propuse

1. Efectuați utilizând factorul comun:

a) $3 \cdot 45 + 3 \cdot 15$; b) $20 \cdot 48 + 20 \cdot 2$; c) $28 \cdot 521 - 28 \cdot 21$;
d) $23 \cdot 718 - 162 \cdot 23$; e) $15 \cdot 38 + 15 \cdot 162$; f) $702 \cdot 65 + 35 \cdot 702$;
g) $2\,413 \cdot 1\,001 - 2\,413$; h) $2\,029 \cdot 599 + 2\,029$; i) $1\,289 \cdot 337 + 1\,289 \cdot 663$.

2. Efectuați utilizând factorul comun:

a) $12 \cdot 13 + 12 \cdot 15 + 12 \cdot 72$; b) $125 \cdot 234 - 125 \cdot 28 + 125 \cdot 194$;
c) $702 \cdot 256 - 702 \cdot 55 + 702 \cdot 799$; d) $1\,000 \cdot 372 + 259 \cdot 1\,000 - 153 \cdot 1\,000$.

3. Dacă $x = 5$ și $a + b = 13$, calculați:

a) $3 \cdot x + 7 \cdot a + 7 \cdot b$; b) $x \cdot a + x \cdot b - 50$;
c) $10 \cdot x + (4 \cdot a + 4 \cdot b)$; d) $(4 \cdot a + 4 \cdot b - 2 \cdot x) \cdot (2 \cdot a + 2 \cdot b + x)$.

4. Calculați:

a) $ab + ac$, știind că $b + c = 50$ și $a = 2$; b) $xy + xz + 15$, știind că $x = 9$ și $y + z = 11$;
c) $ab - ac$, știind că $a = 7$ și $b - c = 100$; d) $5xy + 5xz + 21$, știind că $x = 4$ și $y + z = 100$.

5. Determinați numărul x, știind că $a - b = 6$ și:

a) $x + 3 \cdot a - 3 \cdot b = 20$; b) $x \cdot a - x \cdot b + 9a - 9b = 654$;
c) $7 \cdot a - 7 \cdot b + x = 55$; d) $13 + x - (5 \cdot a - 5 \cdot b) = 2011$.

6. Dați factor comun, apoi calculați:

a) $10 + 20 + 30 + \ldots + 800$; b) $13 + 26 + 39 + \ldots + 715$;
c) $21 + 42 + 36 + \ldots + 1\,890$; d) $101 + 202 + 303 + \ldots + 909 + 1\,010 + \ldots + 9\,898 + 9\,999$.

Indicație:

a) Folosim factorul comun și faptul că suma primelor n numere naturale este egală cu $n(n+1) : 2$.
$10 + 20 + 30 + \ldots + 800 = 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + \ldots + 10 \cdot 80 = 10 \cdot (1 + 2 + \ldots + 80) = 10 \cdot 80 \cdot 81 : 2 = 32\,400$.

7. Determinați numerele de forma $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab21} + \overline{7ab} - \overline{3ab5} = 3\,904$.

Joc

Elevii unei clase joacă *Identifică greșeala*. Fiecare elev primește un cartonaș pe care sunt scrise relațiile de mai jos:

1. $43 \cdot 5 + 43 \cdot 4 + 43 = 43 \cdot (5 + 4) = 43 \cdot 9 = 387$
2. $28 \cdot 7 + 28 \cdot 12 - 19 \cdot 18 = 28 \cdot (7 + 12 - 19) = 0$
3. $121 \cdot 9 - 121 + 121 \cdot 2 = 121 \cdot (9 + 2) = 121 \cdot 11 = 1\,331$

Câștigă concursul elevul care identifică primul greșelile din fiecare relație și efectuează corect cele trei calcule.

Minitest

1. Efectuați:

a) $762 \cdot 65 + 35 \cdot 762$; b) $15 \cdot 348 - 288 \cdot 15$;
c) $825 \cdot 175 - 25 \cdot 825 - 825 \cdot 50$; d) $33 \cdot 672 - 33 \cdot 322 - 250 \cdot 33$.

2 puncte

2. a) Dacă $a + b = 20$ și $b + c = 30$, calculați $3 \cdot a + 7 \cdot b + 4 \cdot c$.
b) Dacă $a + b = 33$ și $a + c = 11$, calculați $5 \cdot a + 3 \cdot b + 2 \cdot c$.

2 puncte

3. a) Produsul a două numere este 624. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul devine 864. Determinați cele două numere.
b) Produsul a două numere este 3 450. Micșorând unul dintre ele cu 20, produsul devine 1 950. Determinați cele două numere.

4 puncte

4. Determinați numerele naturale a, b, c, știind că $a < b < c$ și că $9 \cdot a + 9 \cdot b + 9 \cdot c = 72$.

1 punct

Din oficiu: **1 punct**

Evaluare

Scrierea și citirea numerelor naturale • Compararea și ordonarea numerelor naturale • Adunarea și scăderea numerelor naturale • Înmulțirea numerelor naturale • Factor comun

1. Scrierea în baza 10 a numărului două sute patru mii cinci sute opt este:

a) 240 508
b) 204 580
c) 200 458
d) 204 508

2. Aproximarea numărului 4 567, prin adaos, la sute este:

a) 4 600
b) 4 000
c) 4 500
d) 5 000

3. Rezultatul calculului $47\,596 + 219\,847$ este egal cu:

a) 256 333
b) 267 443
c) 695 807
d) 684 707

4. Rezultatul calculului $7\,456 - 567$ este egal cu:

a) 8 023
b) 1 786
c) 6 889
d) 7 913

5. Suma numerelor de forma $\overline{a4b}$ cu produsul cifrelor 24 este egală cu:

a) 787
b) 1 372
c) 585
d) 1 030

6. Știind că $a \cdot b + a \cdot c = 100$ și $b + c = 20$, atunci a este egal cu:

a) 4
b) 200
c) 5
d) 80

7. Care dintre următoarele două numere au suma egală cu 72?

a) 20 și 52
b) 34 și 43
c) 7 și 2
d) 45 și 29

8. Care dintre următoarele două numere au produsul cu ultima cifră 4:

a) 32 și 16
b) 44 și 54
c) 86 și 94
d) 47 și 48

9. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (A) și care este fals (F):

$1\,234 < 1\,229$
Ultima cifră a produsului $69 \cdot 58$ este 2
Dacă $\overline{abc} = 3 \cdot 100 + 9$, atunci $a + b + c = 12$

10. Asociați fiecărei expresii din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**.

A	B
$5 \cdot 23 - 5 \cdot 3$	a) 2 700
$27 + 27 \cdot 99$	b) 400
$35 \cdot 12 - 35 \cdot 2$	c) 100
	d) 350

11. Tabelul alăturat prezintă oferta unei librării pentru câteva produse.

Calculați cât costă un set de rechizite format din: 4 radiere, 7 pixuri și 3 capsatoare.

Produs	Preț
Radieră	2 lei
Pix	15 lei
Agendă	18 lei
Capsator	44 lei

12. Determinați numerele A, B, C și D din tabelul de mai jos.

$5x + 3y = 27$	$A = 100 + 10x + 6y$
$4 + 2x + 7y = 15$	$B = 20 + 10x + 35y$
$x + 5y = 23$	$C = 3x + 15y - 42$
$3x - 2y - 4 = 18$	$D = 12x - 8y$

13. Determinați numărul natural de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{1a5b} + \overline{a3b7} = 3\,590$.

14. Se consideră numărul $A = 1234567 \ldots 9899100$. Determinați numărul cifrelor numărului A.

Lecția 7 Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale

7.1. Noțiuni introductive

Situație problemă

Pentru cercul de lectură, Vlad are de citit o carte de 60 de pagini. Poate termina cartea citind câte 15 pagini pe zi?
Câte zile îi sunt necesare?

Rezolvare 1:
Vlad citește în prima zi 15 pagini și mai are $60-15=45$ de pagini de citit. A doua zi citește încă 15 pagini și rămâne cu $45-15=30$ de pagini de citit. A treia zi citește încă 15 pagini și rămâne cu $30-15=15$ pagini de citit. În a patra zi citește ultimele 15 pagini și îi rămân $15-15=0$ pagini, adică termină cartea. Așadar, îi sunt necesare patru zile.

Observăm că $60-15-15-15-15=0$ sau că 15 *se cuprinde* de 4 ori în 60. Spunem că 60 dă *câtul* 4 la *împărțirea* cu 15.

Rezolvare 2:
Pentru a distribui cele 60 de pagini câte 15 pe zi, ar trebui să existe un număr natural care înmulțit cu 15 să dea 60. Întrucât $15 \cdot 4=60$, numărul căutat este 4. Așadar, 60 *se împarte* (*exact*) la 15, iar *câtul* împărțirii lui 60 la 15 este 4.

Răspuns: $60:15=4$ zile sunt necesare.

Observații

Deoarece $15 \cdot 4=60$ și $15 \cdot 5=75$, observăm că dacă acea carte ar fi avut, de exemplu, 65 de pagini, atunci repartizarea lor *în mod egal* în 4 zile nu ar fi fost posibilă. Într-adevăr, deoarece $15 \cdot 4=60<65<75$, nu există niciun număr natural care înmulțit cu 15 să dea 65. Acest fapt ne arată că 65 *nu se împarte exact* la 4.

Împărțirea (exactă) este operația inversă înmulțirii. A afla câtul împărțirii lui *a* la *b* înseamnă a afla un număr natural *c* care înmulțit cu *b* să dea *a*.

De reținut

Numărul natural *a* se *împarte exact* la numărul natural nenul *b* dacă există un număr natural *c* astfel încât $a=b \cdot c$.

Se notează: $a:b=c$.

Numerele care se împart se numesc *factori*; *a* se numește *deîmpărțit*, *b* se numește *împărțitor*, iar rezultatul împărțirii, adică *c*, se numește *cât*.

Știați că...

Împărțirea poate fi privită ca o scădere repetată. Operația de împărțire a numărului natural *a* la numărul natural $b \neq 0$ este transpunerea în limbaj matematic a activității de distribuire repetată a unei grămezi de *a* obiecte în părți formate din *b* obiecte până când distribuirea nu se mai poate efectua. Dacă la finalul distribuirii nu rămâne niciun obiect, se spune că *a se împarte exact la b*, iar împărțirea este *exactă* sau *cu rest zero*.

Numărul *a*, din care se scade, este *deîmpărțitul*, numărul *b*, care se scade (numărul de obiecte care se distribuie), este *împărțitorul*, iar numărul *c*, care ne arată de câte ori se poate efectua scăderea (de câte ori a avut loc acțiunea de distribuire), este *câtul*.

Observații

1. Împărțirea la 0 (zero) nu este posibilă, de aceea se pune condiția ca împărțitorul să fie nenul.
2. Câtul dintre 0 și orice număr natural nenul este 0, adică: $0:b=0$, pentru orice număr natural $b \neq 0$.
3. Proba împărțirii exacte se efectuează fie printr-o altă împărțire, fie printr-o înmulțire:
   - proba împărțirii prin înmulțire: împărțitor × cât = deîmpărțit;
   - proba împărțirii prin altă împărțire: deîmpărțit : cât = împărțitor.

Exemplu

112	:	8	=	14	Proba prin înmulțire: $8 \cdot 14=112$
deîmpărțit		împărțitor		cât	Proba prin împărțire: $112:14=8$

7.2. Împărțirea numerelor naturale când împărțitorul are două sau mai multe cifre

Să ne amintim cum se efectuează împărțirea când împărțitorul are o singură cifră (este un număr natural mai mic decât 10). Spre exemplu, dacă deîmpărțitul are trei cifre, atunci se împart la împărțitor mai întâi sutele, apoi zecile și în final unitățile deîmpărțitului.

Dacă la împărțirea sutelor rămâne rest, acesta se transformă în zeci, se adună la numărul de zeci ale deîmpărțitului, iar suma se împarte la împărțitor.

Dacă la împărțirea zecilor rămâne rest, acesta se transformă în unități, se adună la numărul de unități ale deîmpărțitului și suma obținută se împarte la împărțitor.

Cele trei câturi succesive dau cifrele câtului împărțirii. Dacă la împărțirea sutelor se obține câtul 0, această cifră nu se trece la câtul împărțirii.

```
8 2 8 | 6
6 ↓   | 1 3 8
2 2
1 8 ↓
= 4 8
  4 8
  = =
```

828 : 6 = 138

De reținut

Dacă împărțitorul are două (trei, patru, ...) cifre, prima cifră a câtului se află împărțind (prin cuprindere) numărul format de grupul primelor două (trei, patru, ...) cifre ale deîmpărțitului la împărțitor.

Restul obținut (dacă există) se transformă în unități de ordin imediat inferior ultimei cifre luate în grup și se adună cu unitățile de ordinul respectiv ale deîmpărțitului; se obține un nou număr care se împarte la împărțitor. Câtul obținut este a doua cifră a câtului împărțirii.

Pentru determinarea celorlalte cifre ale câtului se continuă în același fel.

Exemplu

```
5 9 3 4 | 2 3
4 6 ↓   | 2 5 8
1 3 3
1 1 5 ↓
= 1 8 4
  1 8 4
  = = =
```

5934 : 23 = 258

- 23 se cuprinde în 59 de câte ori se cuprinde 2 în 5, adică de două ori
- 59 : 23 = 2, rest 13 → prima cifră a câtului este 2

- 13 sute = 130 zeci; 130 + 3 = 133
- 23 se cuprinde în 133 de cel mult 6 ori (de câte ori se cuprinde 2 în 13)

  verificare: $23 \cdot 6 = 138 > 133$, deci 6 e prea mare
  $23 \cdot 5 = 115 < 133$, deci 5 este câtul parțial căutat
- 133 : 23 = 5, rest 18 → a doua cifră a câtului este 5

- 18 zeci = 180 unități; 180 + 4 = 184
- 23 se cuprinde în 184 cel mult de 9 ori (de câte ori se cuprinde 2 în 18)

  verificare: $23 \cdot 9 = 207 > 184$, deci 9 e prea mare
  $23 \cdot 8 = 184$, deci 8 este câtul parțial căutat
- 184 : 23 = 8, rest 0 → a treia cifră a câtului este 8

Observații

1. Urmărind săgețile din schemă, observăm că numărul obținut prin transformarea restului obținut la împărțirea sutelor în zeci și adunarea cu zecile deîmpărțitului (adică 133) se formează alăturând cifra zecilor deîmpărțitului (3) la restul respectiv (13). Grafic, se „coboară" cifra 3 lângă restul găsit (13). La fel, la pasul 3, se coboară cifra unităților (4) lângă restul obținut la împărțirea anterioară (18).
2. Dacă la prima împărțire se obține câtul 0, această cifră nu se trece la cât. Practic, dacă, spre exemplu, împărțitorul are două cifre, iar numărul format de primele două cifre este mai mic decât împărțitorul, prima cifră a câtului se găsește împărțind numărul format de grupul primelor trei cifre ale deîmpărțitului.

Exemplu

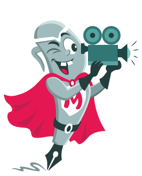
```
6 7 3 9 2 | 3 2 4
6 4 8     | 2 0 8
  2 5 9 2
  2 5 9 2
  = = = =
```

67 392 : 324 = 208

Numărul format de primele trei cifre ale deîmpărțitului se împarte la 324
- 673 : 324 = 2, rest 25 → prima cifră a câtului este 2

Se obține restul 25; se *coboară* cifra următoare (9) și se obține 259
- 259 : 324 = 0, rest 259 → a doua cifră a câtului este 0

Se obține restul 259; se *coboară* cifra următoare (2) și se obține 2 592
- 2 592 : 324 = 8, rest 0 → a treia cifră a câtului este 8



7.3. Legătura între împărțirea numerelor naturale și relațiile de egalitate/inegalitate

În egalitățile care urmează, vom presupune că toate împărțirile se efectuează exact (cu rest zero). Fie a, b și c trei numere naturale, cu $c \neq 0$, astfel încât a și b se împart exact la c. Atunci:

1. Împărțind ambii membri ai unei egalități cu un număr natural, egalitatea se păstrează:
dacă $a = b$, atunci $a : c = b : c$.
2. Împărțind ambii membri ai unei inegalități cu un număr natural, inegalitatea se păstrează:
dacă $a < b$, atunci $a : c < b : c$.
3. Împărțind termen cu termen două egalități, egalitatea se păstrează:
dacă $a = b$ și $c = d \neq 0$, atunci $a : c = b : d$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. În cadrul unui spectacol organizat pentru atragerea de fonduri în vederea dotării bibliotecii școlii, fiecare bilet costă 12 lei.

a) Câți spectatori ar trebui să participe pentru a se strânge suma de 2 688 de lei?
b) Câte cărți se pot adăuga la fondul de carte al bibliotecii, folosind suma obținută, știind că o carte costă 16 lei?
c) Impresionați de spectacol, membrii unei organizații caritabile se decid să doneze 13 560 de cărți tuturor celor 113 școli din județ. Câte cărți revin fiecărei școli?

Rezolvare:
a) $2\,688 : 12 = 224$ de spectatori;
b) $2\,688 : 16 = 168$ de cărți;
c) $13\,560 : 113 = 120$ de cărți.

2. La o fabrică de ciocolată, în fiecare pachet se pun câte 12 batoane de ciocolată, iar în fiecare cutie se ambalează câte 28 de pachete. Câte cutii se pot umple din producția zilnică de 107 520 de batoane?

Rezolvare:
metoda 1. Aflăm câte pachete se formează din producția zilnică: $107\,520 : 12 = 8\,960$.
Calculăm câte cutii sunt necesare pentru a pune pachetele: $8\,960 : 28 = 320$.

metoda 2. Aflăm câte batoane intră într-o cutie: $12 \cdot 28 = 336$.
Determinăm câte cutii sunt necesare: $107\,520 : 336 = 320$.

Ce observăm?
Din calculele de mai sus, a rezultat egalitatea: $107\,520 : 12 : 28 = 107\,520 : (12 \cdot 28)$.
În general, dacă împărțirile se efectuează exact, atunci $a : b : c = a : (b \cdot c)$.

Probleme propuse

1. Efectuați:
a) $624 : 4$; b) $258 : 3$; c) $549 : 9$; d) $324 : 6$; e) $240 : 12$; f) $1\,960 : 70$; g) $3\,115 : 35$; h) $55\,272 : 12$; i) $42\,000 : 100$; j) $6\,496 : 112$; k) $157\,541 : 257$; l) $174\,515 : 835$.

2. Efectuați următoarele împărțiri și apoi efectuați proba prin înmulțire:
a) $1\,560 : 65$; b) $735 : 35$; c) $864 : 18$; d) $2\,268 : 63$; e) $14\,700 : 210$; f) $14\,191 : 617$; g) $60\,606 : 481$; h) $457\,900 : 1\,900$.

3. Efectuați următoarele împărțiri și apoi efectuați proba prin împărțire:
a) $47\,160 : 72$; b) $6\,441 : 113$; c) $26\,136 : 99$; d) $17\,800 : 200$; e) $24\,624 : 81$; f) $1\,476 : 41$; g) $2\,010 : 30$; h) $2\,295 : 85$.

4. 4 860 kg de cartofi au fost puși în mod egal în 108 lăzi. Câte kg de cartofi sunt în fiecare ladă?

5. Un club de fotbal a cumpărat echipament sportiv pentru toți cei 78 de elevi înscriși și a plătit suma de 6 396 de lei. Care este prețul unui echipament?

6. La o cantină s-au cumpărat 18 kg salam pe care s-au plătit 414 lei. Cât costă un kilogram de salam?

7. În tabelul alăturat este prezentată oferta specială a unui magazin de carduri cu mesaje personalizate.

Denumirea produsului	Cantitatea	Preț total
Felicitare zi de naștere	225	900 lei
Felicitare „cel mai bun prieten"	120	360 lei
Carduri de mulțumire	96	384 lei
Card urări de sănătate	76	228 lei

Aflați cât costă fiecare tip de felicitare.

8. Verificați dacă au loc egalitățile:

a) $256 : 16 + 384 : 16 = (256 + 384) : 16$;
b) $646 : 19 + 361 : 19 = (646 - 361) : 19$;
c) $864 : 12 : 6 = 864 : (12 \cdot 6)$;
d) $1024 : 16 \cdot 4 = 1024 : (16 : 4)$;
e) $960 : 12 \cdot 5 = 960 : (12 \cdot 5)$;
f) $1274 : 14 : 7 = 1274 : 7 : 14$.

9. La o fabrică de lactate pachetele de unt se ambalează câte 28 într-o cutie. Într-o mașină sunt încărcate 40 de cutii. Pachetele de unt se distribuie apoi în mod egal la 35 de magazine. Câte pachete de unt primește fiecare magazin?

10. Determinați câtul și restul împărțirii numărului A la B, unde $A = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$ și $B = a + b + c$.

Activitate pe grupe

Pentru a determina cel mai mic număr natural de trei cifre și cel mai mare număr natural de trei cifre care se împarte exact la 35 se poate proceda astfel:

1. efectuăm înmulțiri ale lui 35 cu numere naturale pentru identificarea celui mai mic număr natural de trei cifre care se împarte exact la 35

$35 \cdot 2 = 70$ are două cifre, deci nu convine

$35 \cdot 3 = \mathbf{105}$ are trei cifre și este cel mai mic număr de trei cifre care se împarte exact la 35

2. pentru a obține cel mai mare număr natural de trei cifre care se împarte exact la 35 pornind de la observația că $35 \cdot 3 = 105$. Dacă înmulțim relația cu 10 obținem $35 \cdot 3 \cdot 10 = 1050$ sau $35 \cdot 30 = 1050$ care nu are 3 cifre. Scădem 35 din 1 050 și obținem 1 015 care va fi $35 \cdot 29$. Intuim imediat că numărul căutat va fi $1015 - 35 = 35 \cdot 28 = \mathbf{980}$.

Celor trei grupe de elevi li se propune să determine cel mai mic și cel mai mare număr natural de trei cifre care să se împartă exact la 36, 37, respectiv 38.

Minitest

1. Efectuați calculele:

a) $792 : 72$;
b) $792792 : 72$;
c) $792792 : 792$.

3 puncte

2. a) Ce număr împărțit la 121 dă câtul 21 și restul zero?
b) La ce număr trebuie împărțit 21 528 pentru a obține câtul 312 și restul zero?

2 puncte

3. Suma a două numere este 742. Determinați numerele, știind că unul dintre numere este câtul împărțirii dintre celălalt număr și 13.

2 puncte

4. Într-un depozit sunt 75 de cutii cu medicamente. Fiecare cutie conține 5 flacoane, iar fiecare flacon conține 18 pastile. Pastilele s-au împărțit în mod egal la 25 de farmacii.
a) Câte pastile primește fiecare farmacie?
b) Pot fi împărțite în mod egal flacoanele la cele 25 de farmacii?

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 8 Împărțirea cu rest a numerelor naturale

Situație problemă

Dina are o cutie cu 19 bomboane. Ea împarte colegilor din echipa ei câte 5 bomboane. Câți copii sunt în echipa Dinei? Câte bomboane îi rămân Dinei?

Rezolvare:

După ce servește primul coleg, mai sunt în cutie $19-5=14$ bomboane.
După ce servește al doilea coleg mai are în cutie $14-5=9$ bomboane.
După ce servește al treilea coleg mai sunt în cutie $9-5=4$ bomboane.
A rămas un număr insuficient de bomboane pentru un alt copil ($4<5$), deci Dina are 3 colegi în echipă, iar ei îi rămân 4 bomboane.

Ce observăm?

Are loc egalitatea: $19=3\cdot 5+4$ și $4<5$.

Mai general, considerând un număr de *a* obiecte (unde *a* este un număr natural), eliminăm succesiv câte *b* obiecte, unde *b* este un număr natural diferit de 0. Când operația de eliminare a obiectelor din colecție nu se mai poate efectua, numărul *r* de obiecte rămase este mai mic decât *b*. Notând cu *c* numărul care ne arată de câte ori am putut scoate câte *b* obiecte din colecție, are loc egalitatea $a=b\cdot c+r$.

De reținut

Pentru orice două numere naturale *a* și *b*, cu $b\neq 0$, există și sunt unice numerele naturale *c* și *r*, astfel încât:

$$a=b\cdot c+r \text{ și } r<b.$$

Scriem: $a:b=c$, rest r.

Operația prin care se obțin numerele *c* și *r* se numește *împărțirea cu rest a lui a la b*. Numărul natural *a* se numește *deîmpărțit*, *b* se numește *împărțitor*, *c* se numește *cât*, iar *r* se numește rest.

Proprietatea de mai sus este cunoscută sub numele de *teorema împărțirii cu rest*.

Exemple

1. Prin împărțirea lui 47 la 9, se obține câtul 5 și restul 2 deoarece: $47=9\cdot 5+2$ și $2<9$.
   Scriem $47:9=5$, rest 2.
2. Prin împărțirea lui 261 la 11, se obține câtul 23 și restul 8 deoarece: $261=11\cdot 23+8$ și $8<11$.
   Scriem $261:11=23$, rest 8.
3. Prin împărțirea lui 14 la 37, se obține câtul 0 și restul 14 deoarece: $14=37\cdot 0+14$ și $14<37$.
   Scriem $14:37=0$, rest 14.

Observații

1. Restul împărțirii unui număr natural la 2 poate fi 0 sau 1, deci un număr natural este fie de forma $2k$ (număr par), fie de forma $2k+1$ (număr impar), unde *k* este număr natural.
   Similar, cum restul împărțirii unui număr natural la 3 poate fi 0, 1 sau 2, un număr natural se poate scrie sub una din formele $3k$, $3k+1$ sau $3k+2$, unde *k* este număr natural.
   Mai general, deoarece prin împărțirea la un număr natural nenul *n* se poate obține unul din resturile $0, 1, 2, \ldots, n-1$, un număr natural poate avea una din formele $nk, nk+1, nk+2, \ldots, nk+n-1$.
2. Două numere naturale dau același rest prin împărțirea la *n* dacă diferența lor se împarte exact la *n*.
   Într-adevăr, dacă *a* și *b* dau restul *r* prin împărțirea la *n*, atunci există numerele naturale *x* și *y* astfel încât $a=n\cdot x+r$ și $b=n\cdot y+r$, deci $a-b=n(x-y)$, adică $a-b$ se împarte exact la *n*.
3. Pentru a determina câtul și restul împărțirii a două numere naturale, se utilizează același procedeu de la împărțirea exactă.

```
2 2 3 1 2 | 2 1 8
2 1 8     | 1 0 2
= = 5 1 2
    4 3 6
    = 7 6
```

$22\,312:218=102$, rest 76

Numărul format de primele trei cifre ale deîmpărțitului se împarte la 218
- $223:218=1$, rest 5 → prima cifră a câtului este 1

Se obține restul 5; se *coboară* cifra următoare (1) și se obține 51
- $51:218=0$, rest 51 → a doua cifră a câtului este 0

Se obține restul 51; se *coboară* cifra următoare (2) și se obține 512
- $512:218=2$, rest 76 → a treia cifră a câtului este 2 și restul este 76

I Operații cu numere naturale

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați numerele naturale care împărțite la 5 dau câtul 4.

Rezolvare:
Din teorema împărțirii cu rest avem $a = 5 \cdot 4 + r$ și $r < 5$. Numărul natural r poate lua valorile 0, 1, 2, 3, sau 4, deci a poate lua valorile 20, 21, 22, 23 sau 24.

2. Determinați cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 3 058.

Rezolvare:
Pentru a obține cel mic număr natural n cu suma cifrelor 3 058, este necesar ca n să aibă cât mai puține cifre; așadar, numărul căutat trebuie să aibă cât mai multe cifre egale cu 9.
Deoarece $3058 : 9 = 339$, rest 7, cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 3 058 este $7\underbrace{99...9}_{339 \text{ de } 9}$.

3. a) Suma a două numere naturale este 474. Împărțind unul dintre numere la celălalt, obținem câtul 21 și restul 12. Determinați cele două numere.
b) Diferența a două numere naturale este egală cu 56. Împărțind numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 5 și restul 8. Determinați cele două numere.

Rezolvare:
a) Notând cele două numere cu a și b, din enunț rezultă că $a + b = 474$ și $a = 21 \cdot b + 12$.
Obținem $21 \cdot b + 12 + b = 474$ sau $22 \cdot b = 462$, de unde $b = 21$ și $a = 453$.
b) Condițiile din enunț se scriu $a - b = 56$ și $a = 5b + 8$. Atunci $5b + 8 - b = 56$, egalitate din care obținem $b = 12$, de unde $a = 68$.

4. Suma a trei numere naturale este 121. Împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 10 și restul 5, iar împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 5 și restul 4. Determinați cele trei numere.

Rezolvare:
Notând cele trei numere cu a, b și c, din teorema împărțirii cu rest obținem $a = 10 \cdot c + 5$ și $b = 5 \cdot c + 4$.
Deoarece $a + b + c = 121$, înlocuind pe a și pe b rezultă $10 \cdot c + 5 + 5 \cdot c + 4 + c = 121$ sau $16 \cdot c = 112$.
Obținem $c = 7, a = 75$ și $b = 39$.

5. Verificați dacă există numere naturale care împărțite la 18 dau restul 14, iar împărțite la 6 dau restul 5.

Rezolvare:
Dacă un număr natural n dă restul 14 la împărțirea cu 18, atunci există un număr natural x astfel încât $n = 18x + 14$.
Deoarece putem scrie $n = 18x + 12 + 2 = 6 \cdot (3x + 2) + 2$ și $2 < 6$, rezultă că restul împărțirii lui n la 6 este 2, în contradicție cu enunțul care cere ca restul împărțirii la 6 să fie 5.
Datele problemei sunt contradictorii, deci nu există numere naturale care să verifice condițiile enunțului.

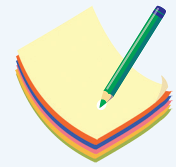
Probleme propuse

1. Determinați câtul și restul împărțirilor:

a) $104 : 5$; b) $235 : 7$; c) $566 : 9$; d) $1117 : 12$;
e) $2314 : 15$; f) $1325 : 18$; g) $2843 : 22$; h) $3785 : 45$;
i) $1726 : 11$; j) $5675 : 205$; k) $74928 : 123$; l) $10452 : 102$.

2. Verificați egalitățile scrise în coloana **A** a tabelului de mai jos și indicați valoarea de adevăr a concluziilor corespunzătoare scrise în coloana **B**. Aveți în vedere corectitudinea efectuării operației de împărțire cu rest!

	A	B
a)	$36 = 9 \cdot 4$	restul împărțirii lui 36 la 9 este 0
b)	$36 = 5 \cdot 7 + 1$	restul împărțirii lui 36 la 5 este 1
c)	$36 = 8 \cdot 3 + 12$	restul împărțirii lui 36 la 8 este 12
d)	$36 = 7 \cdot 4 + 8$	câtul împărțirii lui 36 la 7 este 4



3. a) Determinați numărul natural care dă câtul 36 și restul 28 la împărțirea cu 32.
b) Determinați numărul natural care dă restul 7 și câtul 29 la împărțirea cu 49.

4. a) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul 13.
b) Calculați suma numerelor naturale care împărțite la 8 dau câtul 5.
c) Determinați suma tuturor resturilor împărțirii numerelor de două cifre la 7.

5. Suma a trei numere naturale este 135. Împărțind primele două numere la al treilea obținem câturile 12 și 31, iar resturile 1 și respectiv 2. Determinați cele trei numere naturale.

6. Un număr este cu 72 mai mare decât alt număr. Împărțind suma lor la diferența lor obținem câtul 5 și restul 2. Determinați cele două numere.

7. a) Determinați toate numerele care împărțite la 13 dau restul egal cu câtul.
b) Aflați toate numerele care împărțite la 15 dau restul egal cu dublul câtului.
c) Determinați cel mai mare număr natural care împărțit la 2009 să dea un cât de 10 ori mai mic decât restul.

8. a) Determinați cel mai mare și cel mai mic număr natural de 3 cifre care dau restul 8 la împărțirea cu 11.
b) Aflați câte numere de trei cifre împărțite la 37 dau restul 9 și calculați suma acestor numere.

Indicație: Împărțind 100 la 11, obținem câtul 9 și restul 1, deci $100 = 11 \cdot 9 + 1$. Pentru a obține restul 8, vom aduna 7 în ambii membri ai acestei egalități. Obținem $107 = 11 \cdot 9 + 8$, deci cel mai mic număr de trei cifre care dă restul 8 la împărțirea cu 11 este 107.

9. a) Arătați că nu există numere naturale care împărțite la 6 să dea restul 3 și împărțite la 3 să dea restul 2.
b) Verificați dacă există numerele naturale *a*, *b*, *c* cu suma 42, astfel încât *a* împărțit la *b* să dea câtul *c* și restul 2, iar *b* împărțit la 5 să dea restul 3.

10. Fie *a* și *b* două numere naturale.
a) Determinați restul împărțirii numărului $A = 17a + 17b + 25$ la 17.
b) Determinați restul împărțirii numărului $B = 16a + 28b + 13$ la 4.

11. Restul obținut prin împărțirea numărului natural *x* la 30 este 8, iar restul obținut prin împărțirea numărului natural *y* la 35 este 34. Aflați restul împărțirii numărului $3x + 2y$ la 10.

12. Suma a trei numere naturale *a*, *b*, *c* este 232. Împărțind *a* la *b* obținem câtul 14 și restul 5, iar împărțind pe *b* la *c* obținem câtul 7 și restul 1. Determinați numerele.

13. Suma a trei numere naturale este 297. Împărțind primul număr la al doilea obținem câtul 2 și restul 25, iar împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 11 și restul 8. Determinați cele trei numere.

14. Diferența a două numere naturale este 139. Împărțind numărul mai mare la dublul numărului mai mic obținem restul 6 și câtul 10. Determinați numerele.

15. a) Aflați toate numerele naturale $\overline{abc}$ știind că împărțind $\overline{abc}$ la $\overline{bc}$ obținem câtul 5 și restul 4.
b) Câte numere naturale de forma $\overline{abad}$ dau restul 5 la împărțirea cu $\overline{ab}$?

16. a) Aflați câtul și restul împărțirii numărului $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 203 + 2003$ la 2002.
b) Găsiți câtul și restul împărțirii numărului $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 125 + 250$ la 126.

Indicație: a) Avem $2002 = 2 \cdot 1001 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, de unde deducem:
$N = 2002\,(1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 203 + 1) + 1$.
Câtul împărțirii lui *N* la 2002 este $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 203 + 1$, iar restul este 1.

Minitest

1. Efectuați: a) 138 : 7; b) 245 : 13; c) 1235 : 103.

3 puncte

2. Suma a două numere naturale este 70. Împărțind numărul mai mare la numărul mai mic obținem câtul 4 și restul 10. Determinați cele două numere naturale.

2 puncte

3. Determinați cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 2017.

2 puncte

4. Determinați toate numerele naturale care dau câtul 7 la împărțirea cu 6.

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 9 Puterea cu exponent natural a unui număr natural. Pătratul unui număr natural

9.1. Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Mate practică

Vlad citește o revistă de cultură generală în 5 zile. În prima zi citește două pagini, iar în fiecare din zilele următoare citește de două ori mai multe pagini decât în ziua anterioară. Determinați câte pagini citește Vlad în a cincea zi.

Rezolvare: În prima zi citește 2 pagini.
În a doua zi citește $2 \cdot 2 = 4$ pagini.
În a treia zi citește $2 \cdot 4 = 8$ pagini.
În a patra zi citește $2 \cdot 8 = 16$ pagini.
În a cincea zi citește $2 \cdot 16 = 32$ pagini.

Ce observăm?
Soluția problemei se obține efectuând calculul: $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ factori}} = 32.$

Acest calcul presupune o înmulțire cu 5 factori, fiecare dintre ei egal cu 2, sau, altfel spus, înmulțirea repetată a lui 2 cu el însuși de 5 ori. Se spune că l-am ridicat pe 2 la *puterea a cincea*.

De reținut

Fie *a* și *n* două numere naturale, cu $n \geq 2$.
Produsul a *n* factori egali cu *a* se numește puterea a *n*-a a numărului natural *a* și se notează a^n.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}.$$

Prin convenție, $a^1 = a$ și $a^0 = 1$, pentru orice număr natural $a \neq 0$. Nu are sens 0^0.
În scrierea a^n, *a* se numește *baza* puterii, iar *n* se numește *exponentul* puterii.

Exemple

1. $101^2 = 101 \cdot 101 = 10\,201$;
2. $11^3 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 1\,331$;
3. $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2\,401$;
4. $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3\,125$;
5. $3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$;
6. $2^7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$.

Știați că...

O veche legendă indiană povestește cum regele indian Shirham a oferit inventatorului jocului de șah, Sissa ben Dahir, o recompensă, la alegere, drept răsplată pentru minunata invenție.

Maiestate, nu vreau cine știe ce bogății lumești, dați-mi doar un bob de grâu pentru prima pătrățică a tablei de șah, două boabe pentru a doua, 4 boabe pentru a treia, 8 pentru a patra pătrățică... și tot așa, până ce toate cele 64 de pătrate ale tablei vor fi acoperite de grâu, a spus înțeleptul inventator.

Când au calculat câte boabe ar trebui să dea în total, vistiernicii regelui au văzut că nici într-o sută de ani în hambarele întregii Indii nu poate fi adunat atâta grâu!

Vi se pare imposibil?

Numărul de boabe de grâu pe care ar fi trebuit să îl plătească regele este $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$.

Acest număr se scrie în baza 10 cu 20 de cifre și este egal cu $18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

Deoarece 30 de boabe de grâu cântăresc aproximativ un gram, iar o tonă are un milion de grame, numărul de boabe de mai sus ar cântări peste 600 de miliarde de tone. Având în vedere că producția mondială de grâu este sub 600 de milioane de tone anual, numărul boabelor cerute de Sissa ben Dahir ar însemna grâul produs în întreaga lume, la nivelul actual de dezvoltare a agriculturii, timp de peste 1 000 de ani.

9.2. Ultima cifră a puterii unui număr natural

Să analizăm ultima cifră a primelor 12 puteri ale lui 2:

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$
$2^9 = 512$	$2^{10} = 1\,024$	$2^{11} = 2\,048$	$2^{12} = 4\,096$

Observăm că ultima cifră a puterilor nenule ale lui 2 se repetă din 4 în 4, iar pe fiecare coloană toate puterile au aceeași ultimă cifră. De exemplu, împărțind pe 1 234 la 4 obținem restul 2, deci numărul 2^{1234} se scrie în coloana a doua, iar ultima cifră a lui 2^{1234} este aceeași cu ultima cifră a lui 2^2, adică 4.

Întrucât ultima cifră a unui produs de numere este ultima cifră a produsului ultimelor cifre ale numerelor date, rezultă că:

1. Dacă ultima cifră a unui număr natural este 0, 1, 5 sau 6, prin ridicarea la o putere nenulă ultima cifră rămâne aceeași.

2. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 4 sau 9 se repetă din 2 în 2, mai exact:

a) numerele terminate în 4
- ridicate la puteri impare → se termină în 4
- ridicate la puteri pare nenule → se termină în 6

b) numerele terminate în 9
- ridicate la puteri impare → se termină în 9
- ridicate la puteri pare → se termină în 1

3. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 2, 3, 7 sau 8 se repetă din 4 în 4.

Exemple

1. Numerele 21^{42}, 71^{399}, 101^{2017} au ultima cifră 1, deoarece ultima cifră a bazei este, în fiecare caz, 1. Ultima cifră a fiecăruia dintre numerele 5^{27}, 35^{48} și 645^{62} este egală cu 5, iar ultima cifră a numerelor 6^{72}, 26^{84} și 456^{126} este 6.

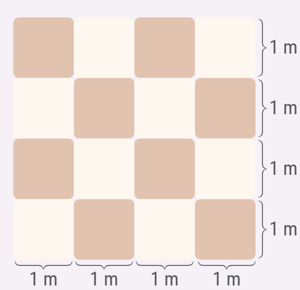
2. Deoarece ultima cifră a puterilor unui număr terminat cu cifra 9 se repetă din 2 în 2, ultima cifră a numărului 19^{42} este aceeași cu ultima cifră a lui 9^2, care este 1.

3. Ultima cifră a numărului 7^{95} este 3. Într-adevăr, cum ultima cifră a puterilor unui număr terminat cu cifra 7 se repetă din 4 în 4, iar restul împărțirii lui 95 la 4 este 3, ultima cifră a lui 7^{95} este aceeași cu ultima cifră a lui $7^3 = 343$, adică 3.

9.3. Pătratul unui număr natural

Mate practică

Pentru a pava o curte în formă de pătrat cu latura de 4 metri, utilizăm dale de travertin în formă de pătrat, cu latura de 1 metru. Determinați numărul dalelor necesare pavării.



Rezolvare:
Pe fiecare latură a pătratului se pot pune câte patru dale. Prin linii orizontale și verticale pătratul cu latura de 4 metri se împarte în $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$ pătrate cu latura de 1 metru.

Ce observăm?
Puterea a doua a unui număr natural *n* reprezintă numărul de pătrate cu latura de o unitate în care se poate împărți un pătrat cu latura de *n* unități.

În același timp, un număr natural nenul *x* poate fi scris ca pătratul unui număr natural, dacă cu *x* pătrate de latură 1 se poate forma un pătrat.

De reținut

Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și pătratul acelui număr natural.

Un număr natural care se poate scrie ca puterea a doua a unui număr natural se numește *pătrat perfect*.

Exemplu:
- 9 este puterea a doua a lui 3, deoarece cu 9 pătrate de latură 1 se poate forma un pătrat de latură 3;
- 13 nu este egal cu puterea a doua a niciunui număr natural, deoarece cu 13 pătrate de latură 1 nu putem forma un pătrat.

Exemple

1. Utilizând tabla înmulțirii, cele mai mici 11 pătrate ale unor numere naturale sunt: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 și 100.
2. Pătratele numerelor de la 11 la 20 sunt:
   $11^2 = 121$ $\quad 12^2 = 144$ $\quad 13^2 = 169$ $\quad 14^2 = 196$ $\quad 19^2 = 361$
   $15^2 = 225$ $\quad 16^2 = 256$ $\quad 17^2 = 289$ $\quad 18^2 = 324$ $\quad 20^2 = 400$
3. 900 și 1 156 sunt pătrate perfecte, pentru că $900 = 30^2$ și $1156 = 34^2$.
4. Numărul $2017 + 2016 \cdot 2017$ este pătrat perfect, deoarece utilizând factorul comun 2017, obținem $2017 \cdot (1 + 2016) = 2017 \cdot 2017 = 2017^2$ care este pătrat perfect.

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**

Observații

1. Produsul a două sau mai multe pătrate a unor numere naturale este pătratul unui număr natural.
   $9 \cdot 25 \cdot 36 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = (3 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 6) = (3 \cdot 5 \cdot 6)^2 = 90^2$.
2. Pătratul unui număr natural are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.
   Într-adevăr, analizând exemplele date mai sus, prin ridicarea la pătrat a numerelor 0, 1, 2, 3, …, 9 obținem numere naturale cu ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Ținând cont de faptul că ultima cifră a unei puteri este egală cu puterea ultimei cifre, obținem că orice pătrat al unui număr natural are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.
   Atenție!
   Nu orice număr natural care are ultima cifră 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 este pătratul unui număr natural (de exemplu, 10, 11, 14, 15, 19 sau 26 nu sunt pătrate perfecte).
3. Dacă un număr natural are ultima cifră 2, 3, 7 sau 8, atunci nu este pătratul unui număr natural.
   Exemplu:
   1 234 567 nu este pătratul unui număr natural, deoarece ultima sa cifră este 7.
4. Dacă un număr natural se află între două pătrate ale unor numere naturale consecutive, atunci numărul nu este pătratul unui număr natural.
   Exemplu:
   Numărul 115 nu este pătratul unui număr natural, deoarece $100 < 115 < 121$, adică $10^2 < 115 < 11^2$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați ultima cifră a numărului $a = 192^{203} + 703^{203} + 457^{203} + 368^{203}$.

Rezolvare:
Pentru a simplifica scrierea, notăm cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n.
Deoarece restul împărțirii lui 203 la 4 este 3, rezultă că:

$$u(192^{203}) = u(2^{203}) = u(2^3) = 8 \qquad u(703^{203}) = u(3^{203}) = u(3^3) = 7$$
$$u(457^{203}) = u(7^{203}) = u(7^3) = 3 \qquad u(368^{203}) = u(8^{203}) = u(8^3) = 2$$

Atunci ultima cifră a lui a este ultima cifră a sumei $8 + 7 + 4 + 3$, adică este 2.

2. Arătați că $2^{42} + 3^{42}$ nu este pătratul unui număr natural.

Rezolvare:
Ca la problema anterioară, notăm cu $u(n)$ ultima cifră a numărului natural n.
Deoarece restul împărțirii lui 42 la 4 este 2, au loc relațiile: $u(2^{42}) = u(2^2) = 4$ și $u(3^{42}) = u(3^2) = 9$, deci ultima cifră a numărului $2^{42} + 3^{42}$ este ultima cifră a sumei $4 + 9$, adică 3.
Ultima cifră a pătratului unui număr natural poate fi doar 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, deci numărul $2^{42} + 3^{42}$ nu este pătratul niciunui număr natural.

3. Determinați numerele naturale x și y pentru care $2^x + 2^y = 65$.

Rezolvare:
Dacă x și y sunt diferite de 0, atunci 2^x și 2^y sunt pare, iar suma lor este număr par, deci nu poate fi egală cu 65. Ca urmare, unul dintre numerele x sau y este 0. Dacă $x = 0$, atunci $2^x = 1$, deci $2^y = 64$, adică $y = 6$. Dacă $y = 0$ se obține $x = 6$. Soluțiile sunt $x = 0, y = 6$ sau $x = 6, y = 0$.

Probleme propuse

1. Determinați numerele naturale a, b, c, d, e, f și g din tabelul alăturat.

Puterea	Baza puterii	Exponentul puterii
7^9	a	b
c	11	4
3^e	d	37
f^{18}	31	g

2. Analizați tabelul alăturat și determinați numerele naturale a, b, c, d, e.

5	7	a	25	c	32	60	99
25	49	100	b	576	d	3 600	e

3. Scrieți sub formă de puteri cu exponent număr natural:

a) $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$; b) $12\cdot12\cdot12$; c) $7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7$;
d) $8\cdot3\cdot8\cdot3\cdot8\cdot3\cdot8\cdot3$; e) $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$; f) $\underbrace{3\cdot3\cdot3\cdot\ldots\cdot3}_{2017\text{ factori}}$.

4. Efectuați:

a) 0^5+5^0; b) 5^3+7^0; c) $1^{200}+0^{200}+6^3$; d) 2^7-3^4;
e) 4^3-1^{20}; f) 7^3-4^4; g) $15^2\cdot0^9$; h) $2^4:4^2$;
i) $2^3\cdot5^3$; j) $5^2\cdot2^4$; k) $7^2:5^0$; l) $18^2:3^4$.

5. a) Scrieți numărul 31 ca o sumă de puteri ale lui 2.
b) Arătați că numărul 49 se poate scrie ca o sumă de 12 pătrate ale unor numere naturale.

6. Determinați ultima cifră a numerelor:

a) 2^{2017}; b) 3^{2017}; c) 5^{2018}; d) 6^{2019};
e) 7^{2020}; f) 8^{2021}; g) 9^{2022}; h) 4^{2023}.

7. Determinați ultima cifră a numărului $x=12^{200}+23^{201}+34^{302}+45^{403}$.

8. Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate ale unor numere naturale, încadrându-le între pătratele a două numere naturale consecutive:

a) 39; b) 700; c) 160; d) 123.

9. Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate ale unor numere naturale, studiind ultima cifră:

a) 1 234 567; b) $2^{403}+2^{402}$; c) $3^{12}+3^{11}$; d) 248^{17}.

10. a) Determinați numerele naturale x și y, pentru care $2^x+2^y=257$.
b) Determinați numerele naturale x, y și z, pentru care $2^x+2^y+2^z=97$.

Calcul mental

$15^2=225$ — $1\cdot(1+1)=2$

$25^2=625$ — $2\cdot(2+1)=6$

$75^2=5\,625$ — $7\cdot(7+1)=56$

$115^2=13\,225$ — $11\cdot(11+1)=132$

Calculați și voi: $45^2, 55^2, 95^2, 105^2, 995^2$.

Minitest

1. Efectuați: a) 5^3-4^3; b) $(9-8)^{2017}$; c) $1^{2001}+2\,002^1$. **3 puncte**

2. Comparați numerele: $A=7^3-6\cdot5^2+4^2\cdot3$ și $B=3^5$. **2 puncte**

3. Arătați că numărul 725 nu este pătratul niciunui număr natural, încadrându-l între pătratele a două numere naturale consecutive. **2 puncte**

4. Determinați ultima cifră a numărului $7^{27}+9^{21}$ și stabiliți dacă acesta este pătratul unui număr natural. **2 puncte**

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 10 Reguli de calcul cu puteri

Situație problemă

Vlad și Dina se iau la întrecere: cine calculează 7^5, efectuând cât mai puține calcule.

Vlad: Folosind asociativitatea înmulțirii, am nevoie de 4 calcule:

$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7) \cdot 7 = 7^2 \cdot 7 = 49 \cdot 7 = 343$

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot 7 = 7^3 \cdot 7 = 343 \cdot 7 = 2\,401$

$7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot 7 = 7^4 \cdot 7 = 2\,401 \cdot 7 = 16\,807$

Dina: În loc de ultimele două calcule rezultatul se poate obține mai rapid astfel:

$7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^2 \cdot 7^3 = 49 \cdot 343 = 16\,807$

Ce observăm?

Dina a calculat mai rapid, sesizând că are loc relația $7^5 = 7^2 \cdot 7^3$. Să privim și următorul calcul:

$$7^3 \cdot 7^5 = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{3 factori}} \cdot \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{5 factori}} = \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{3+5=8 factori}} = 7^{3+5} = 7^8.$$

Se observă că, în ambele cazuri, prin înmulțirea celor două puteri ale lui 7 s-a obținut tot o putere a lui 7, al cărei exponent este suma exponenților celor două puteri.

De reținut

1. Înmulțirea a două puteri cu aceeași bază

Produsul a două puteri cu aceeași bază este tot o putere, cu aceeași bază și cu exponent egal cu suma exponenților puterilor respective.

Altfel spus, pentru a înmulți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se adună exponenții.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemple: a) $2^7 \cdot 2^9 = 2^{7+9} = 2^{16}$; b) $6^7 \cdot 6^5 = 6^{7+5} = 6^{12}$; c) $13^{11} \cdot 13^{23} = 13^{11+23} = 13^{34}$.

2. Împărțirea a două puteri cu aceeași bază

Câtul a două puteri cu aceeași bază este tot o putere, cu aceeași bază și cu exponent egal cu diferența exponenților puterilor respective:

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Cu alte cuvinte, pentru a împărți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se scad exponenții.

Exemple: a) $5^8 : 5^7 = 5^{8-7} = 5^1 = 5$; b) $9^{14} : 9^6 = 9^{14-6} = 9^8$; c) $23^7 : 23^7 = 23^{7-7} = 23^0 = 1$.

3. Puterea unei puteri

Puterea unei puteri a unui număr natural este puterea acelui număr natural al cărei exponent este egal cu produsul exponenților:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

Așadar, pentru a ridica o putere la o altă putere, se păstrează baza și se înmulțesc exponenții.

Exemple: a) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$; b) $(3^5)^6 = 3^{5 \cdot 6} = 3^{30}$; c) $(17^5)^0 = 17^{5 \cdot 0} = 17^0 = 1$.

4. Puterea unui produs sau a unui cât

Pentru a ridica la putere un produs, respectiv un cât, se ridică fiecare factor la acea putere, apoi se efectuează produsul, respectiv câtul:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad (a : b)^n = a^n : b^n$$

Cu alte cuvinte, exponentul unui produs/cât se distribuie fiecărui factor al produsului/câtului.

Exemple: a) $(4 \cdot 7)^2 = 4^2 \cdot 7^2$; b) $(8 \cdot 10)^3 = 8^3 \cdot 10^3$; c) $(32 : 8)^4 = 32^4 : 8^4$.

Scriind egalitățile de mai sus de la dreapta spre stânga, obținem:

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ (regula de înmulțire a puterilor cu același exponent)

$a^n : b^n = (a : b)^n$ (regula de împărțire a puterilor cu același exponent)

Exemple: a) $7^3 \cdot 5^3 = (7 \cdot 5)^3 = 35^3$; b) $8^9 \cdot 6^9 = (8 \cdot 6)^9 = 48^9$; c) $12^{10} : 6^{10} = (12 : 6)^{10} = 2^{10}$.

Observație

Folosind regulile de calcul cu puteri, se pot da următoarele criterii pentru a indica dacă o putere poate fi scrisă ca pătratul unui număr natural (altfel spus, dacă o putere este sau nu pătrat perfect):

1. Orice număr natural scris ca o putere cu exponentul par este pătrat perfect.

Exemplu: Deoarece $5^{24} = (5^{12})^2$, numărul 5^{24} este pătratul unui număr natural.

2. O putere cu exponent impar este pătrat perfect dacă baza se poate scrie ca putere cu exponent par.

Exemple: $16^{15} = (2^4)^{15} = 2^{60} = (2^{30})^2$, deci 16^{15} este pătratul unui număr natural.

3. O putere cu exponent impar, a cărei bază nu poate fi scrisă ca o putere cu exponentul par, nu este pătrat perfect.

Exemple: $27^{19} = (3^3)^{19} = 3^{57}$, care nu este pătratul unui număr natural.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Scrieți următoarele numere sub forma unei singure puteri cu exponent număr natural:

a) $4^{16} \cdot 8^{12} \cdot 16^{25}$; b) $9^5 \cdot 27^4 \cdot 3^5$; c) $5^5 \cdot 25^7 \cdot 125^4$.

Rezolvare:

a) Ideea de rezolvare constă în scrierea numerelor 4, 8 și 16 ca puteri ale lui 2: $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ și $16 = 2^4$.

Aplicând regula de ridicare la putere a unei puteri, obținem:

$4^{16} = (2^2)^{16} = 2^{32}$, $8^{12} = (2^3)^{12} = 2^{36}$ și $16^{25} = (2^4)^{25} = 2^{100}$.

Folosind regula de înmulțire a puterilor cu aceeași bază, rezultă:

$4^{16} \cdot 8^{12} \cdot 16^{25} = 2^{32} \cdot 2^{36} \cdot 2^{100} = 2^{32+36+100} = 2^{168}$.

b) $9^5 \cdot 27^4 \cdot 3^5 = (3^2)^5 \cdot (3^3)^4 : 3^5 = 3^{10} \cdot 3^{12} : 3^5 = 3^{17}$;

c) $5^5 \cdot 25^7 : 125^4 = 5^5 \cdot (5^2)^7 : (5^3)^4 = 5^5 \cdot 5^{14} : 5^{12} = 5^{19} : 5^{12} = 5^7$.

2. Scrieți următoarele numere sub forma unui produs, utilizând factorul comun:

a) $S_1 = 2^6 + 2^7 + 2^8$; b) $S_2 = 3^{11} + 5 \cdot 3^{13} + 2 \cdot 3^{14}$; c) $S_3 = 6^8 + 2^9 \cdot 3^{10} + 4 \cdot 6^{11}$.

Rezolvare:

a) $S_1 = 2^6 + 2^7 + 2^8 = 1 \cdot 2^6 + 2^1 \cdot 2^6 + 2^2 \cdot 2^6 = 2^6 \cdot (1 + 2^1 + 2^2) = 2^6 \cdot 7$

b) $S_2 = 3^{11} + 5 \cdot 3^{13} + 2 \cdot 3^{14} = 1 \cdot 3^{11} + 5 \cdot 3^2 \cdot 3^{11} + 2 \cdot 3^3 \cdot 3^{11} = 3^{11}(1 + 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3) = 3^{11} \cdot 100$

c) $S_3 = 6^8 + 2^9 \cdot 3^{10} + 4 \cdot 6^{11} = 6^8 + 2^9 \cdot 3^9 \cdot 3^1 + 4 \cdot 6^{11} = 6^8 + 6^9 \cdot 3^1 + 6^{11} \cdot 4 = 6^8 \cdot 1 + 6^8 \cdot 6 \cdot 3 + 6^8 \cdot 6^3 \cdot 4 =$

$= 6^8 \cdot (1 + 6 \cdot 3 + 6^3 \cdot 4) = 6^8 \cdot 883$.

3. Determinați numărul natural n care verifică egalitățile:

a) $6 \cdot 3^{41} + 4 \cdot 3^{42} + 3^{43} = n \cdot 3^{40}$; b) $7^{n+1} - 2 \cdot 7^n = 245$.

Rezolvare:

a) Folosind factorul comun, avem:

$6 \cdot 3^{41} + 4 \cdot 3^{42} + 3^{43} = 6 \cdot 3^{41} + 4 \cdot 3 \cdot 3^{41} + 3^2 \cdot 3^{41} = 3^{41} \cdot (6 + 12 + 9) = 3^{41} \cdot 27 = 3^{41} \cdot 3^3 = 3^{44}$.

Atunci: $n \cdot 3^{40} = 3^{44}$, deci $n = 3^{44} : 3^{40} = 3^4 = 81$.

b) Membrul stâng al egalității se scrie $7^{n+1} - 2 \cdot 7^n = 7^n \cdot 7^1 - 2 \cdot 7^n = 7^n(7-2) = 7^n \cdot 5$

Din egalitatea $7^n \cdot 5 = 245$ rezultă $7^n = 49$, de unde $n = 2$.

Probleme propuse

1. Efectuați, utilizând regula de înmulțire a două puteri cu aceeași bază:

a) $7^{14} \cdot 7^{31}$; b) $16^{11} \cdot 16^{22}$; c) $3^3 \cdot 3^8$;
d) $5^9 \cdot 5^{14}$; e) $23^{12} \cdot 23^{45}$; f) $5^{32} \cdot 5^{121}$.

2. Calculați, utilizând regula de împărțire a două puteri cu aceeași bază:

a) $2^{91} : 2^{21}$; b) $75^{84} : 75^{81}$; c) $3^{25} : 3^{18}$;
d) $5^{91} : 5^{52}$; e) $7^{34} : 7^9$; f) $14^{45} : 14^{20}$.

3. Scrieți următoarele numere sub forma unei singure puteri, folosind regula de ridicare a unei puteri la o altă putere:
a) $(3^4)^7$; b) $(13^8)^9$; c) $(17^3)^{18}$;
d) $(7^{11})^4$; e) $(16^8)^6$; f) $(5^4)^3$.

4. Aplicând regula de înmulțire a puterilor cu același exponent, scrieți sub forma unei singure puteri numerele:
a) $3^{16} \cdot 7^{16}$; b) $7^{10} \cdot 5^{10}$; c) $2^{34} \cdot 5^{34} \cdot 7^{34}$;
d) $5^4 \cdot 2^4$; e) $15^{12} \cdot 11^{12}$; f) $6^{30} \cdot 7^{30} \cdot 2^{30}$.

5. Utilizând regula de împărțire a puterilor cu același exponent, scrieți sub forma unei singure puteri numerele:
a) $12^{24} : 3^{24}$; b) $125^{45} : 5^{45}$; c) $18^{17} : 9^{17}$;
d) $9^{36} : 3^{36}$; e) $9^{21} : 3^{21}$; f) $125^8 : 5^8$.

6. Scrieți sub forma unei singure puteri cu exponent număr natural:
a) $25^{10} \cdot 5^{32} \cdot 125^5$; b) $9^4 \cdot 27^5 \cdot 3^{14}$; c) $2^{15} \cdot 4^{12} \cdot 8^6$.

7. Scrieți următoarele numere sub formă de produs, utilizând factorul comun:
a) $2^{76} + 2^{78} + 2^{80}$; b) $3 \cdot 5^{47} + 2 \cdot 5^{48} + 6 \cdot 5^{49}$; c) $13^{14} \cdot 3 - 13^{13} \cdot 2 - 13^{12}$.

8. Arătați că următoarele numere sunt pătrate ale unor numere naturale:
a) 5^{46}; b) 23^{100}; c) $(7^6)^5$;
d) 25^{37}; e) 4^{75}; f) 625^7;
g) $16 \cdot 25$; h) $2^{18} \cdot 3^6$; i) $25 \cdot 3^{18}$.

9. Se consideră numerele naturale $a, b \geq 2$, a impar și b par. Menționați pentru fiecare enunț de mai jos dacă este adevărat (**A**), fals (**F**) sau dacă nu se poate preciza exact (**N**):

Enunț	A/F/N
a^b este pătratul unui număr natural	...
a^b nu este pătratul unui număr natural	...
$(a+b)^b$ este pătratul unui număr natural	...
$(a+b)^a$ este pătratul unui număr natural	...
$(2 \cdot a)^b$ nu este pătratul unui număr natural	...

Pentru enunțurile a căror valoare de adevăr nu poate fi precizată cu exactitate, dați un exemplu pentru care enunțul respectiv devine adevărat și un exemplu pentru care devine fals.

10. Asociați fiecărui număr x din coloana **A** un singur număr y din coloana **B**, astfel încât x^y să fie pătratul unui număr natural:

A	B
13	2
36	5
7	7
25	8

11. a) Arătați că $13^2 = 12^2 + 5^2$ și, folosind eventual această egalitate, demonstrați că 13^{100} se poate scrie ca o sumă de două pătrate ale unor numere naturale.
b) Demonstrați că 5^{200} se poate scrie ca o sumă de două pătrate ale unor numere naturale.
Indicație: a) Din $13^2 = 12^2 + 5^2$ putem scrie: $13^{100} = 13^2 \cdot 13^{98} = (12^2 + 5^2) \cdot 13^{98} = (12 \cdot 13^{49})^2 + (5 \cdot 13^{49})^2$.

12. a) Arătați că numărul $n = 3^{23} \cdot 4^{23} - 2^{21} \cdot 6^{23}$ este pătratul unui număr natural.
b) Arătați că numărul $n = 3^{2011} + 2 \cdot 3^{2010} + 3^{2009} + 3^{2008}$ este pătratul unui număr natural.

Minitest

1. Efectuați:
a) $2^9 \cdot 2^7$; b) $2^9 : 2^7$; c) $(2^9)^7$.
3 puncte

2. Determinați ultima cifră a numărului $A = 2^{31} + 3^{42}$.
2 puncte

3. Arătați că numărul $81^{17} \cdot 7^4$ este pătratul unui număr natural.
2 puncte

4. Determinați numărul natural n știind că $2^9 + 2^{10} + 2^{11} = n \cdot 2^9$.
2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 11 Compararea puterilor

Situație problemă

Vlad și Dina au de rezolvat un test de inteligență (matematică!). Se dau următoarele indicii:

- cea mai mare putere a lui 2 care se scrie cu o singură cifră este $2^3 = 8$;
- cea mai mică putere a lui 2 pentru scrierea căreia se folosesc patru cifre este $2^{10} = 1\,024$.

Câte cifre sunt necesare pentru scrierea numărului 2^{30}?

Dina: Pentru a afla numărul de cifre ale lui 2^{30}, trebuie să încadrăm acest număr între două puteri consecutive ale lui 10. Primul indiciu sugerează scrierea $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$.

Vlad: Atunci primul pas e simplu: deoarece $8 < 10$, atunci $\underbrace{8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8}_{\text{de 10 ori}} < \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\text{de 10 ori}}$, adică $8^{10} < 10^{10}$.

Cum 10^{10} se scrie cu 11 cifre, numărul 2^{30}, fiind mai mic decât 10^{10}, are cel mult 10 cifre.

Dina: Vlad, ai pus în evidență un lucru interesant: dintre puterile 8^{10} și 10^{10}, care au același exponent, este mai mare puterea cu baza mai mare. Voi folosi acest lucru, împreună cu al doilea indiciu. Dacă $1\,024 > 1\,000$, atunci $1\,024^3 > 1\,000^3$ și, cum $1\,024 = 2^{10}$ și $1\,000 = 10^3$, rezultă că $(2^{10})^3 > (10^3)^3$, deci $2^{30} > 10^9$. Așadar 2^{30} se scrie cu cel puțin 10 cifre.

Răspuns: Pentru scrierea numărului 2^{30} se folosesc 10 cifre.

De reținut

Compararea a două puteri cu aceeași bază

Dintre două puteri cu aceeași bază, este mai mare cea cu exponentul mai mare:

dacă $m < n$, atunci $a^m < a^n$, pentru orice numere naturale m, n și $a \geq 2$.

Exemple:
a) $2^4 < 2^5$ deoarece $4 < 5$;
b) $2^5 < 2^7$ deoarece $5 < 7$;
c) $3^{11} > 3^7$ deoarece $11 > 7$.

Compararea a două puteri cu același exponent

Dintre două puteri cu același exponent nenul, este mai mare cea cu baza mai mare:

dacă $a < b$, atunci $a^m < b^m$, pentru orice numere naturale $a, b \geq 2$, $m \geq 1$.

Exemple:
a) $2^4 < 3^4$ deoarece $2 < 3$;
b) $3^4 < 5^4$ deoarece $3 < 5$;
c) $10^{11} > 9^{11}$ deoarece $10 > 9$.

Observație

Pentru a compara două puteri cu baze diferite și exponenți diferiți, folosind regulile de calcul se aduc puterile la aceeași bază sau la același exponent, sau se compară cu alte puteri care au aceeași bază sau același exponent cu puterile considerate.

Exemple

1. Pentru a compara numerele 8^{37} și 4^{55}, le aducem la aceeași bază, deoarece 8 și 4 sunt puteri ale lui 2.
Avem $8^{37} = (2^3)^{37} = 2^{3 \cdot 37} = 2^{111}$ și $4^{55} = (2^2)^{55} = 2^{2 \cdot 55} = 2^{110}$.
Întrucât $111 > 110$, folosind regula de comparare a puterilor cu aceeași bază, rezultă $2^{111} > 2^{110}$, adică $8^{37} > 4^{55}$.

2. Pentru a compara numerele 2^{30} și 3^{20}, le aducem la același exponent, observând că 30 și 20 se pot scrie ca produse de factori, dintre care unul este comun.
Avem $2^{30} = 2^{3 \cdot 10} = (2^3)^{10} = 8^{10}$ și $3^{20} = 3^{2 \cdot 10} = (3^2)^{10} = 9^{10}$.
Cum $8 < 9$, utilizând regula de comparare a puterilor cu același exponent, rezultă $8^{10} < 9^{10}$, deci $2^{30} < 3^{20}$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Ordonați descrescător numerele 81^{20}, 9^{39}, 27^{27} și 3^{82}.

Rezolvare:
Bazele puterilor de ordonat sunt puteri ale lui 3: $81 = 3^4$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$.
Utilizând regulile de calcul, obținem $81^{20} = (3^4)^{20} = 3^{80}$, $9^{39} = (3^2)^{39} = 3^{78}$ și $27^{27} = (3^3)^{27} = 3^{81}$.
Deoarece $78 < 80 < 81 < 82$, rezultă $3^{82} > 3^{81} > 3^{80} > 3^{78}$, deci ordinea descrescătoare a numerelor date este 3^{82}, 27^{27}, 81^{20}, 9^{39}.

2. Stabiliți care dintre numerele 11^{12} și 3^{27} este mai mare.

Rezolvare:
Strategia de rezolvare se bazează pe utilizarea unei puteri intermediare.
Pe de o parte, avem $11^2 < 5^3$, deci $(11^2)^6 < (5^3)^6$, adică $11^{12} < 5^{18}$.
Pe de altă parte, $5^2 < 3^3$, deci $(5^2)^9 < (3^3)^9$, adică $5^{18} < 3^{27}$.
În concluzie, $11^{12} < 5^{18} < 3^{27}$, deci 3^{27} este mai mare decât 11^{12}.

Probleme propuse

1. Stabiliți care dintre numerele următoare este mai mare, observând că puterile au aceeași bază:
a) 25^{27} și 25^{28}; b) 26^{123} și 26^{1234}; c) 2011^3 și 2011^5;
d) 393^{23} și 393^{100}; e) 125^{125} și 125^{126}; f) 111^{44} și 111^{33}.

2. Indicați care dintre numerele următoare este mai mic, observând că puterile au același exponent:
a) 15^{27} și 17^{27}; b) 26^{123} și 24^{123}; c) 2011^{14} și 2010^{14};
d) 989^{123} și 987^{123}; e) 25^{125} și 225^{125}; f) 1010^{201} și 1011^{201}.

3. Comparați numerele următoare, aducând mai întâi puterile la aceeași bază:
a) 5^{87} și 25^{36}; b) 4^{333} și 8^{122}; c) 2^{65} și 16^{20};
d) 125^{34} și 25^{75}; e) 36^{224} și 6^{363}; f) 27^{303} și 9^{502}.

4. Comparați numerele următoare, aducând puterile la același exponent:
a) 3^{22} și 2^{33}; b) 4^{33} și 3^{44}; c) 11^{22} și 22^{11};
d) 2^{39} și 3^{26}; e) 5^{45} și 6^{30}; f) 15^{90} și 6^{135}.

5. Asociați fiecărei inegalități din coloana **A** o pereche din coloana **B**, pentru a obține propoziții adevărate:

A	B
$2^a < 2^b$	$a = 5, b = 3$
$a^{21} > b^{21}$	$a = 8, b = 8$
$4^a > 2^b$	$a = 3, b = 7$
	$a = 4, b = 6$

6. a) Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $12^{\overline{ab}} > 12^{97}$.
b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab}^{12} < 13^{12}$.
c) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ care verifică relația $2^{\overline{abc}} < 64^{22}$.

7. Scrieți în ordine crescătoare numerele:
a) 25^{18}, 125^{15} și 5^{40}; b) 9^{51}, 27^{48} și 3^{95}; c) 8^{12}, 32^7 și 27^8.

Minitest

1. Comparați: a) 2^{51} cu 2^{18}; b) 7^{32} cu 9^{32}. **2 puncte**

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că $25^{\overline{ab}} < 5^{26}$. **2 puncte**

3. Scrieți în ordine crescătoare numerele 4^{32}, 8^{24} și 16^{25}. **3 puncte**

4. Comparați 5^{72} cu 3^{96}. **2 puncte**

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 12 Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2

12.1. Noțiuni introductive

Ce observăm

Urmăriți cu atenție următoarele scrieri:

1. $23 = 20 + 3 = 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

2. $1\,203 = 1\,000 + 200 + 3 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

3. $23 = 16 + 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0 = 101\,011$

4. $123 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0 = 1\,111\,011$

De reținut

Scrierile **1** și **2** utilizează cifre de la 0 la 9 și puteri ale lui 10. Ele se numesc *scrieri în baza 10*.
Scrierile **3** și **4** utilizează cifrele 0 și 1 și puteri ale lui 2. Ele se numesc *scrieri în baza 2*.

12.2. Sistemul de numerație zecimal

De reținut

Orice număr natural se poate scrie ca o sumă de produse în care un factor este o putere a lui 10 (*descompunere în baza 10*). Aceste scrieri, împreună cu operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere constituie *sistemul de numerație zecimal*. Numărul natural 10 se numește *baza* sistemului de numerație zecimal. Pentru scrierea unui număr natural în baza 10 se folosesc cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9.

Exemple

1. $2\,345 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$;

2. $98\,735 = 9 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$;

3. $236\,483 = 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3$;

4. $\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$; $\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$, $a \neq 0$ etc.

12.3. Sistemul de numerație binar

De reținut

Scrierea unui număr natural în *sistemul de numerație binar* (sau în baza 2) are ca suport faptul că două unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin superior. Numărul natural 2 se numește *baza* sistemului de numerație binar. Pentru scrierea unui număr natural în baza 2 se folosesc cifrele 0 și 1.

Mate practică

O cifră binară conține cantitatea de informație de 1 **bit** (*binary digit*). Sistemul binar este cel mai natural mod de stocare a informațiilor în domeniul **informaticii**. Un bit reprezintă unitatea de măsură a cantității de informație.

Valoarea unui bit este ori 0, ori 1. Unități mai mari pentru stocarea informației sunt:

1 octet (byte)	=	8 biți		
1 kilooctet (ko)	=	2^{10} octeți		
1 megaoctet (Mo)	=	2^{10} ko	=	2^{20} octeți
1 gigaoctet (Go)	=	2^{10} Mo	=	2^{30} octeți
1 teraoctet (To)	=	2^{10} Go	=	2^{40} octeți
1 petaoctet (Po)	=	2^{40} To	=	2^{50} octeți

De exemplu, pentru scrierea unui cuvânt în *word* se utilizează, în funcție de tipul calculatorului, 16/32/64 biți.

Știați că...

Numărarea în sistemul binar, comparativ cu cel zecimal, se face astfel:

Zecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Binar	0	1	10	11	100	101	110	111	1 000	1 001

Exemple

1. $101_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 5_{(10)}$;

2. $10\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 21_{(10)}$;

3. $1\,001\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 77_{(10)}$;

4. $11\,001\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 205_{(10)}$.

Pentru scrierea unui număr natural în sistemul de numerație binar, se poate utiliza următorul procedeu (bazat pe împărțiri succesive la 2):

18	2			
0	9	2		
	1	4	2	
		0	2	2
			0	1

În concluzie, $18_{(10)} = 10\,010_{(2)}$. (se scriu resturile împărțirii în ordine inversă)

27	2			
1	13	2		
	1	6	2	
		0	3	2
			1	1

În concluzie, $27_{(10)} = 11\,011_{(2)}$. (se scriu resturile împărțirii în ordine inversă)

În același timp putem utiliza și scrierea ca sume de puteri ale lui 2:

$35_{(10)} = 32 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 = 100\,011_{(2)}$ (scriem cifrele de 0 și 1 de la puterea cu exponentul cel mai mare);

$68_{(10)} = 64 + 4 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 = 10\,001\,100_{(2)}$

Știați că...

1. Scrierea unui număr natural în baza x (x număr natural, $x > 1$) are ca suport faptul că x unități de un anumit ordin formează o unitate imediat superioară. Pentru scrierea în baza x se utilizează numerele $0, 1, 2, \ldots, x-2, x-1$, care formează și baza sistemului de numerație. Trecerile din baza x în baza 10 se realizează urmând același algoritm prezentat la sistemul de numerație binar.

Exemple: a) $112_{(3)} = 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2 = 14_{(10)}$;

b) $2\,131_{(5)} = 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 291_{(10)}$;

c) $\overline{abc}_{(x)} = a \cdot x^2 + b \cdot x^1 + c,\ a, b, c < x$.

2. În funcție de numărul cifrelor din baza de numerație, sistemele de numerație utilizate în mod frecvent poartă denumirile:

Baza	2	3	4	8	10	12	16	20	60
Sistem	binar	ternar	cuaternar	octal	zecimal	duodecimal	hexazecimal	vigesimal	sexazecimal

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Descompuneți în baza 10:

a) $257 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 = 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7$; b) $2\,317 = 2\,000 + 300 + 10 + 7 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 7$.

2. Scrieți numerele naturale care au următoarele descompuneri:

a) $5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 = 5\,000 + 300 + 9 = 5\,309$; b) $8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 = 8\,000 + 500 + 70 + 5 = 8\,575$.

3. Scrieți în baza 10:

a) $101_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 = 5_{(10)}$; b) $1\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 13_{(10)}$;

c) $1\,010\,101_{(2)} = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 85_{(10)}$.

4. Scrieți în baza 2:

a) $21_{(10)} = 10101_{(2)}$;

21	2			
1	10	2		
	0	5	2	
		1	2	2
			0	1

b) $26_{(10)} = 11010_{(2)}$.

26	2			
0	13	2		
	1	6	2	
		0	3	2
			1	1

sau $21_{(10)} = 16 + 4 + 1 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 10101_{(2)}$.

5. a) Dacă $\overline{ab} + \overline{ba} = 132$, atunci calculați $a + b$.

b) Dacă $\overline{aa} + \overline{bb} = 143$, atunci calculați $a + b$.

c) Dacă $\overline{abc}_{(10)} = 11001011_{(2)}$, atunci calculați $a + b + c$.

Rezolvare:

a) $\overline{ab} + \overline{ba} = 132$ sau $10a + b + 10b + a = 132$ sau $11a + 11b = 132$. Obținem $a + b = 12$.

b) $\overline{aa} + \overline{bb} = 143$ sau $10a + a + 10b + b = 143$ sau $11a + 11b = 143$. Obținem $a + b = 13$.

c) $11001011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2 + 1 = 203 = \overline{abc}_{(10)}$ sau $a + b + c = 5$.

Probleme propuse

1. Descompuneți următoarele numere naturale în baza 10:

a) 812; b) 1121; c) 67008; d) 12014; e) $\overline{a7b}$; f) $\overline{a19b}$.

2. Determinați numerele naturale care au următoarele descompuneri în baza 10:

a) $4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8$; b) $6 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10$; c) $8 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10 + 5$;

d) $7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3$; e) $4 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6$; f) $5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8$.

3. Scrieți următoarele numere naturale în baza 10:

a) $101_{(2)}$; b) $1101_{(2)}$; c) $10110_{(2)}$; d) $11001_{(2)}$.

4. Scrieți următoarele numere în baza 2:

a) 27; b) 38; c) 45; d) 57;

e) 61; f) 72; g) 85; h) 97.

5. a) Arătați că numărul natural 2010 se poate scrie ca o sumă de puteri cu baza 2.

b) Arătați că numărul natural 1999 se poate scrie ca o sumă de puteri cu baza 2.

6. Determinați numerele $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ și l din tabelul de mai jos:

Număr în baza 10	Număr în baza 2	Sumă de puteri ale lui 2	Sumă de puteri ale lui 10
18	a	b	c
d	1010	e	f
g	h	$2^5 + 2^2 + 1$	i
j	k	l	$5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10 + 7$

7. Determinați x pentru care au loc egalitățile:

a) $121_{(10)} = x_{(2)}$; b) $34_{(10)} = x_{(2)}$; c) $11011_{(2)} = x_{(10)}$; d) $101011_{(2)} = x_{(10)}$.

8. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $29_{(10)} = 10001_{(2)}$; b) $111_{(2)}$ nu este pătratul unui număr natural;

c) $1101_{(2)} > 3^4 : 3^2$; d) $11001_{(2)}$ este pătratul unui număr natural.

Lecția 13 Ordinea efectuării operațiilor; utilizarea parantezelor: rotunde, pătrate și acolade

13.1. Ordinea efectuării operațiilor

Situație problemă

De luni până vineri, Dina citește câte 6 pagini din cartea sa preferată. Sâmbătă și duminică, având mai mult timp, ea citește câte 12 pagini pe zi. Câte pagini citește Dina într-o săptămână?

Rezolvare:

De luni până vineri, Dina citește: $5 \cdot 6 = 30$ (pagini)

Sâmbătă și duminică ea citește: $2 \cdot 12 = 24$ (pagini)

Într-o săptămână, Dina citește: $30 + 24 = 54$ de pagini

Ce observăm?

Soluția problemei se obține mai rapid efectuând calculul:

$$5 \cdot 6 + 2 \cdot 12 = 30 + 24 = 54.$$

Pentru a ajunge la rezultatul corect, trebuie efectuate mai întâi înmulțirile, apoi adunarea.

De reținut

1. Adunarea și scăderea sunt operații aritmetice de ordinul întâi, înmulțirea și împărțirea sunt operații de ordinul al doilea, iar ridicarea la putere este operație de ordinul al treilea.
2. Dacă într-un exercițiu apar numai operații de ordinul întâi (adunări și scăderi) sau numai de ordinul al doilea (înmulțiri sau împărțiri), ele se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.
3. Dacă într-un exercițiu există operații de ordine diferite, mai întâi efectuăm operațiile de ordinul al treilea, apoi operațiile de ordinul al doilea și, în final, operațiile de ordinul întâi, în ordinea în care fiecare dintre acestea sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple

1. $235 + 17 - 43 = 252 - 43 = 209$.
2. $8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 = 32 \cdot 3 \cdot 10 = 96 \cdot 10 = 960$.
3. $32 + 5 \cdot 14 - 7 \cdot 12 = 32 + 70 - 84 = 102 - 84 = 18$.
4. $5 \cdot 3^4 - 7 \cdot 2^5 + 6^2 \cdot 5 = 5 \cdot 81 - 7 \cdot 32 + 36 \cdot 5 = 405 - 224 + 180 = 361$.

13.2. Utilizarea parantezelor: rotunde, pătrate, acolade

Mate practică

De ziua ei de naștere, Eliza invită 5 fete și 6 băieți. Ea vrea să ofere fiecărui invitat un mic cadou: pentru fete, câte un jurnal personalizat, iar pentru băieți câte o brățară. Sponsorul este bunicul, cu 100 de lei. Dina și Vlad o ajută cu planul.

Vlad: La magazinul de manufacturi de lângă casa mea, un jurnal costă 8 lei. Dar dacă adaugi și câte un pix personalizat, care costă 3 lei, prețul jurnalului scade la 6 lei. Iar brățările sunt 7 lei.

Dina: E o idee bună! Mai ales că azi au o ofertă specială: 2 lei reducere pentru orice brățară sau colier. Să vedem dacă ne ajung banii.

- *setul format dintr-un jurnal și un pix costă* $6 + 3 = 9$ *lei*
  deci pentru fete avem nevoie de $5 \cdot 9 = 45$ *de lei*
- *fiecare colier, luat la preț redus costă* $7 - 2 = 5$ *lei*
  deci cadourile pentru băieți costă $6 \cdot 5 = 30$ *de lei*
- *așa că vor rămâne* $100 - 45 - 30 = 25$ *de lei*

Vlad: Dina, acum după ce am învățat ordinea operațiilor, cred că am putea ajunge la rezultat dintr-un singur calcul. Priviți:

$100 - 5 \cdot 6 + 3 - 6 \cdot 7 - 2 = 100 - 30 + 3 - 42 - 2 = 29$ *lei*

Eliza: Vlad, nu ai procedat corect! Prețul unui set se află efectuând mai întâi adunarea, iar pentru colier ar trebui să efectuezi mai întâi scăderea. Abia apoi poți să faci înmulțirile!
Vlad: Ai dreptate! Am uitat de… paranteze!

$100 - 5 \cdot (6 + 3) - 6 \cdot (7 - 2) = 100 - 5 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 100 - 45 - 30 = 25$ *lei.*

Acum este corect!

Ce observăm?
Pentru a efectua operații de adunare și/sau de scădere, înaintea unor operații de înmulțire sau, în general, pentru a efectua operații de ordin mai mic înaintea unor operații de ordin mai mare, trebuie să se scrie între paranteze termenii adunării/scăderii.

De reținut

1. Parantezele sunt de trei feluri: *rotunde*, *pătrate* și *acolade*.
2. Dacă un exercițiu conține mai multe tipuri de paranteze, se efectuează mai întâi operațiile din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele pătrate și în final operațiile din acolade (dacă acestea există).
3. Într-un exercițiu care conține mai multe tipuri de paranteze, după efectuarea calculelor din toate parantezele rotunde, parantezele pătrate se transformă în paranteze rotunde; în același mod, acoladele se transformă în paranteze pătrate.

Exemplu

$10 + 9 \cdot \{8 + 7 \cdot [6 + 5 \cdot (4 + 3 \cdot 2)]\} =$	efectuăm înmulțirea din paranteza rotundă
$= 10 + 9 \cdot \{8 + 7 \cdot [6 + 5 \cdot (4 + 6)]\} =$	efectuăm adunarea din paranteza rotundă și transformăm parantezele pătrate în rotunde iar acoladele în paranteze pătrate
$= 10 + 9 \cdot [8 + 7 \cdot (6 + 5 \cdot 10)] =$	efectuăm înmulțirea din paranteza rotundă
$= 10 + 9 \cdot [8 + 7 \cdot (6 + 50)] =$	efectuăm adunarea din paranteza rotundă
$= 10 + 9 \cdot (8 + 7 \cdot 56) =$	
$= 10 + 9 \cdot (8 + 392) =$	
$= 10 + 9 \cdot 400 = 10 + 3\,600 = 3\,610$	

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

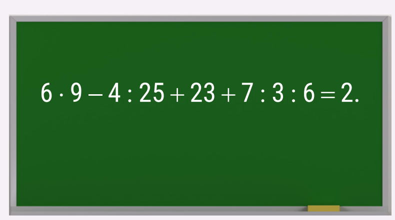
1. Mama cumpără 3 kilograme de căpșuni a câte 7 lei și 5 kilograme de mere a câte 3 lei. Ce rest primește de la 50 de lei? Rezolvați problema folosind un singur exercițiu și utilizând paranteze.

   Rezolvare:
   $50 - (3 \cdot 7 + 5 \cdot 3) = 50 - (21 + 15) = 50 - 36 = 14$ lei.

2. La un magazin de jucării au fost aduse 40 de mașinuțe, de 3 ori mai multe păpuși și cu 50 mai puține jocuri de construcție decât păpuși. O mașinuță costă 11 lei, o păpușă 8 lei, iar un joc de construcție 14 lei. Care este valoarea obiectelor aduse la magazin?
   Rezolvați problema folosind un singur exercițiu și utilizând paranteze!

   Rezolvare:
   $40 \cdot 11 + 40 \cdot 3 \cdot 8 + (40 \cdot 3 - 50) \cdot 14 = 440 + 960 + 70 \cdot 14 = 1\,400 + 980 = 2\,380$ lei.

3. Vlad a scris pe tablă egalitatea din imaginea alăturată, însă a uitat să pună parantezele. Ajutați-l, astfel încât egalitatea să devină corectă.



   Rezolvare:
   Deoarece 4 nu se împarte la 25, expresia $6 \cdot 9 - 4$ trebuie delimitată de paranteze.
   La fel, 7 nu se împarte (exact!) la 3, deci suma $23 + 7$ trebuie separată și ea prin paranteze.
   Efectuând calculele parțiale $(6 \cdot 9 - 4) : 25 = 2$ și $(23 + 7) : 3 = 10$, deducem că mai este nevoie de o paranteză pătrată, iar expresia corectă este: $[(6 \cdot 9 - 4) : 25 + (23 + 7) : 3] : 6 = 2$.

Probleme propuse

1. Efectuați:

a) $15+43-27$; c) $642+423-999$; e) $2\,138-809+57$;
b) $413-395+11$; d) $725-696+37$; f) $521-99+17-47$.

2. Efectuați:

a) $22\cdot 2:11$; c) $3^2\cdot 8:12\cdot 13:39$; e) $12\cdot 11:44\cdot 16:24$;
b) $360:10\cdot 6$; d) $5\cdot 12\cdot 17:255$; f) $456:24\cdot 5^2:19\cdot 20$.

3. Calculați:

a) $10^{60}:(2\cdot 5)^{58}$; c) $(7^6)^8:49^{24}$; e) $(11^{2011}\cdot 4^{1005}):[(22^2)^5]^{201}$;
b) $(7^{14}\cdot 5)^2:7^{26}$; d) $(3^4)^9:(9^6)^3$; f) $2^{23}:2^{21}:2+3^{32}:3^{31}\cdot 3$.

4. Efectuați:

a) $(7\,503:61+877):500+53\cdot 11$; c) $5\cdot 230-7\cdot(512:32+2^2)+4\,687:43$;
b) $207\cdot 9-(19^2+3^2):74+2\,296:41$; d) $[493:17-(128:2^3+224:8):22]:27-1$.

5. Calculați:

a) $10\cdot\{18^2:324+2\cdot[(2^2\cdot 3)^{15}:(2^{29}\cdot 3^{15})+1^{24}]\}$; b) $[2^{12}\cdot 2^{18}+5^{70}:5^{10}-(3^{25})^2]:[4^2\cdot 2^3\cdot 2^{23}+(5^{15})^{2^2}-(3^2)^{5^2}]$.

6. Aflați câte numere naturale sunt cuprinse între numerele a și b, unde:

$$a=6+8\cdot[32:4-5\cdot(4^3-7\cdot 3^2)]$$
$$b=15\cdot 2+(256:16+4):5+2\,121:21.$$

7. Puneți paranteze pentru a obține egalități adevărate:

a) $5\cdot 4:2+8-2=48$; b) $6\cdot 9:3+5-2=36$; c) $3\cdot 8:4+6\cdot 2-18=24$

8. Ce sumă de bani a avut la început Andrei, dacă după ce mai primește de la mama 75 de lei, de la bunic 40 de lei și își achită datoria de 80 de lei, îi mai rămân 400 de lei?

9. Determinați cifra a, știind că $(\overline{abcde}-100\cdot\overline{bc}-\overline{de}):10^4=7$.

10. Determinați $a+b+c$, astfel încât:

a) $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=88$;
b) $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=\overline{abc}$;
c) $\overline{abc}+\overline{cab}+\overline{bca}=777$;
d) $\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{cb}=110$.

Minitest

1. Efectuați calculele:

a) $879+363:11-25\cdot 36$; c) $15\cdot 18-490:70-261$;
b) $16\cdot 16-975:75-9\cdot 27$; d) $56\cdot 72:126+222-88$.

4 puncte

2. Determinați care dintre următoarele numere este mai mare:

$A=(25^3)^9:(4^2+3^2)^{26}-(2\,017^0+0^{2017}+1^{2017})^4$;
$B=2^7-11\cdot\{91-5\cdot[22-5\cdot(40^2-41\cdot 39)]\}+(3^2-2^3)^{2017}$.

3 puncte

3. Toate cele 828 de ciocolate au fost ambalate în cutii mici și în cutii mari. În fiecare cutie mică s-au așezat câte 12 ciocolate, iar în fiecare cutie mare câte 18. Se știe că au fost 24 de cutii mici. Calculați câte cutii mari au fost.
Încercați să rezolvați problema folosind un singur exercițiu și utilizând parantezele.

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Evaluare

Împărțirea numerelor naturale • Puteri. Pătratul unui număr natural. Reguli de calcul cu puteri • Compararea puterilor • Scrierea în baza 10; scrierea în baza 2 • Ordinea efectuării operațiilor; utilizarea parantezelor

1. Pătratul unui număr natural cuprins între 17 și 34 este egal cu:

a) 16
b) 49
c) 25
d) 36

2. Câtul și restul împărțirii numărului 217 la 14 sunt numerele:

a) 14 și 5
b) 15 și 5
c) 15 și 7
d) 14 și 7

3. Scrierea în baza 10 a numărului $101\,011_{(2)}$ este:

a) 32
b) 35
c) 8
d) 43

4. Scrierea în baza 2 a numărului 19 este egală cu:

a) 10 011
b) 111
c) 1 011
d) 1 101

5. Rezultatul calculului $15^{26} : 15^{25}$ este:

a) 1
b) 15^{51}
c) 225
d) 15

6. Știind că $2^{34} \cdot 2^{15} = 2^{n}$, atunci n este egal cu:

a) 2^{49}
b) 19
c) 49
d) 2^{19}

7. Câte numere naturale dau câtul 3 la împărțirea cu 5?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 5

8. Pătratele a două numere naturale consecutive între care se află 114 sunt:

a) 81 și 121
b) 100 și 121
c) 100 și 144
d) 121 și 144

9. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (A) și care este fals (F):

$3^{24} < 3^{42}$
$5^{10} \cdot 5^{4} = 5^{40}$
123 este pătratul unui număr natural

10. Asociați fiecărei expresii din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**.

A	B
$2 \cdot [14 - 2 \cdot (3^2 - 2^3)]$ $2 \cdot (14 - 2) \cdot 3^2 - 2^3$ $2 \cdot 14 - 2 \cdot (3^2 - 2^3)$	a) 208 b) 24 c) 224 d) 26

11. Determinați numerele a, b, c din tabelul de mai jos:

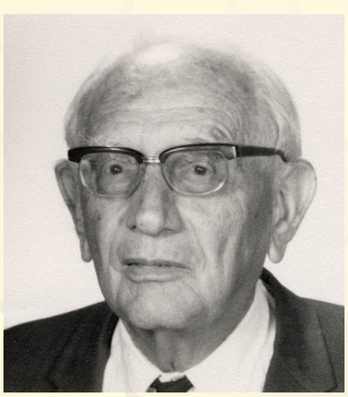
Puterea	Ultima cifră a puterii
6^{2017}	a
125^{2018}	b
$2\,021^{2019}$	c

12. Determinați numerele A, B, C și D din tabelul de mai jos.

D	I	C	R
546	13	a	b
c	27	8	12
129	d	16	1

13. Suma a două numere naturale este egală cu 53. Împărțind numărul mai mare la dublul numărului mai mic, obținem câtul 4 și restul 8. Determinați cele două numere naturale.

14. Arătați că $10^2 = 6^2 + 8^2$, apoi că 10^{22} se poate scrie ca o sumă de două pătrate ale unor numere naturale.



George Pólya (1887–1985) a fost un matematician de origine maghiară, profesor la Universitatea Stanford din California, care a avut contribuții importante în educația matematică. Cartea sa *How to solve it?* (apărută în limba română cu titlul *Cum rezolvăm o problemă?*) prezintă patru pași generali de abordare a unei probleme: înțelegerea problemei, elaborarea unui plan, aplicarea planului și verificarea.

Unitatea II

Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

Domeniul de conținut: NUMERE NATURALE

Lecția 1 Metoda reducerii la unitate

Această metodă este utilă, în special, prin faptul că se aplică la multe probleme întâlnite în practică. Algoritmul de rezolvare constă în aflarea mărimii cerute printr-o fază intermediară de comparare cu unitatea. Singura dificultate este stabilirea dependenței dintre mărimi.

Mate practică

Opt kilograme de mere costă 24 de lei.
Cât costă 5 kilograme de mere de aceeași calitate?

A. Rezolvare cu plan:

1. Cât costă un kilogram de mere?
24 lei : 8 = 3 lei

2. Cât costă 5 kilograme de mere?
3 lei · 5 = 15 lei

B. Rezolvare cu metoda reducerii la unitate:

8 kg .... 24 lei
1 kg .... 24 lei : 8 = 3 lei
5 kg .... 3 lei · 5 = 15 lei

Analiză:
8 kilograme de mere costă 24 de lei, iar un kilogram de mere costă 3 lei: o cantitate de 8 ori mai mică costă de 8 ori mai puțin. Dacă un kilogram de mere costă 3 lei, atunci 5 kilograme de mere costă 15 lei: o cantitate de 5 ori mai mare costă de 5 ori mai mult[1].

Mate practică

Șase robinete, care au același debit[2], curg împreună și umplu o piscină în 3 ore. În câte ore pot umple aceeași piscină 9 robinete cu același debit?

A. Rezolvare cu plan:

1. În câte ore poate fi umplută piscina de un singur robinet?
3 ore · 6 = 18 ore

2. În câte ore pot umple piscina 9 robinete?
18 ore : 9 = 2 ore

B. Rezolvare cu metoda reducerii la unitate:

6 robinete .... 3 ore
1 robinet .... 3 ore · 6 = 18 ore
9 robinete .... 18 ore : 9 = 2 ore

Analiză:
6 robinete curg împreună și umplu o piscină în 3 ore, iar un robinet în 18 ore: numărul robinetelor s-a micșorat de 6 ori, iar timpul necesar s-a mărit de 6 ori. Un robinet deschis umple o piscină în 18 ore, iar 9 robinete în 2 ore: numărul robinetelor s-a mărit de 9 ori, iar timpul necesar s-a micșorat de 9 ori[3].

De reținut

Sunt cazuri în care, dacă o mărime *scade* (crește) de un număr de ori, atunci și cealaltă mărime *scade* (crește) de același număr de ori (vezi prima problemă).
Sunt cazuri în care, dacă o mărime *scade* (crește) de un număr de ori, atunci cealaltă mărime *crește* (scade) de același număr de ori (vezi a doua problemă).

---

[1] În clasa a VI-a vom învăța *regula de trei simplă* în cazul în care două mărimi sunt direct proporționale.
[2] Cantitatea de apă care trece prin robinet într-un interval de timp.
[3] În clasa a VI-a vom învăța *regula de trei simplă* în cazul în care două mărimi sunt invers proporționale.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. „Și-n vreme cât s-au cununat
S-a-ntins poporul adunat
Să joace-n drum după tilinci:
Feciori la zece fete, cinci,
Cu zdrăngăneii la opinci
Ca-n port de sat.“
(George Coșbuc – *Nunta Zamfirei*)

Presupunând că-n uriașa horă formată erau 30 de feciori, să se afle numărul fetelor.

Rezolvare:
5 feciori .... 10 fete
1 fecior .... 10 fete : 5 = 2 fete
30 de feciori .... 2 fete · 30 = 60 de fete

2. Dacă un elev ar lucra suplimentar câteva probleme pe zi, ar termina de rezolvat problemele dintr-o culegere în 25 de zile. În câte zile ar termina rezolvarea tuturor problemelor lucrând câte 5 probleme pe zi?

Ce observăm? Se poate rezolva problema?
Ce ar trebui schimbat în enunțul problemei ca să avem următoarea rezolvare?
4 probleme pe zi .... 25 de zile
1 problemă pe zi .... 25 de zile · 4 = 100 de zile
5 probleme pe zi .... 100 zile : 5 = 20 de zile.

Răspuns:
În enunț, în loc de *câteva probleme pe zi*, trebuia precizat *4 probleme pe zi*.

Gândire critică

Dintr-o bucată lungă de sârmă, pentru a obține bucăți de sârmă de 4 metri lungime fiecare, un muncitor face 12 tăieturi cu un clește. Dintr-o bucată de sârmă de aceeași lungime trebuie să obțină bucăți de 8 metri lungime fiecare. Câte tăieturi ar trebui să facă?

Eliza a propus următoarea rezolvare:
4 m .... 12 tăieturi
1 m .... 12 tăieturi · 4 = 48 de tăieturi
8 m .... 48 de tăieturi : 8 = 6 tăieturi

Luca a propus următoarea rezolvare, prin care problema este descompusă în două probleme mai simple.
Atenție!
Prin 12 tăieturi se obțin 13 bucăți de sârmă!
1 bucată .... 4 m
13 bucăți .... 4 m · 13 = 52 m

Rezolvăm în continuare a doua problemă.
8 m .... 1 bucată
52 m .... 52 m : 8 m/bucată = 6 bucăți și rămâne rest o bucată de 4 m.
Sunt necesare 6 tăieturi.

Ce observăm?
Și Eliza, și Luca au dat același răspuns: 6 tăieturi.
Atenție!
Numai rezolvarea dată de Luca este corectă!

Probleme propuse

1. Identificați dependența dintre mărimi, apoi rezolvați problema următoare:
Dina cumpără 5 kilograme de mere, iar Vlad cumpără 3 kilograme de mere de aceeași calitate. Care dintre ei va plăti mai puțin?

2. Determinați valorile care lipsesc din tabelul următor, apoi răspundeți la întrebările de mai jos.

Lungimea laturii	5 cm	6 cm	9 cm	4 cm	3 cm	2 cm
Perimetrul pătratului	20 cm	24 cm	…	…	…	…

a) Cum se modifică perimetrul pătratului dacă lungimea laturii se mărește?
b) Cum se modifică perimetrul pătratului dacă lungimea laturii se micșorează?

3. Inima unui om bate de aproximativ 210 ori în 3 minute. De câte ori bate într-o oră?

4. Din 200 de litri de apă de mare se obțin 8 grame de sare. Ce cantitate de apă este necesară pentru a obține un kilogram de sare?

5. Peștele-spadă înoată mai rapid decât oricare alt pește! Știind că parcurge 300 de metri în 6 secunde, să se afle câți kilometri parcurge într-o oră.

6. Compuneți o problemă folosind datele următoare:
3 robinete .... 600 litri de apă
5 robinete .... x litri de apă

7. Produsul a două numere naturale x și y este egal cu 60. Determinați valorile lui y din tabelul alăturat, apoi completați enunțurile:
a) Dacă valoarea lui x se mărește, atunci valoarea lui y se … .
b) Dacă valoarea lui x se micșorează, atunci valoarea lui y se … .

x	2	3	4	12	10	6
y	30	…	…	…	…	…

8. Pentru a termina o lucrare în 5 zile sunt necesari 12 muncitori. Câți muncitori sunt necesari pentru a termina aceeași lucrare în 3 zile?

9. „Ș-atunci, unde nu începe Flămânzilă a cărăbăni deodată în gură câte o harabă de pâne, și răpede mi ți le-a înfulecat și le-a forfecat, de parcă n-au mai fost."

(Ion Creangă — *Povestea lui Harap-Alb*)

După ce-și potoli foamea, Flămânzilă luă aminte că, dacă înfulecă 300 de pâini pe zi, are hrană pentru 4 zile. Câte pâini trebuie să înfulece pe zi, astfel încât să-i ajungă pentru 5 zile?

10. Compuneți o problemă folosind datele următoare:
3 robinete .... 8 ore
4 robinete .... x ore

11. Din 10 decigrame de sământă de viermi de mătase se obțin, în medie, 1 500 de gogoși. Știind că dintr-o gogoașă se trag 900 de metri de fir de mătase, să se afle câți metri de fir se obțin din 6 grame de sământă.

12. Clopotele unei biserici bat de 3 ori în 12 secunde. În câte secunde vor bate de 12 ori?

Jocuri

1. Trei ouă fierb în 5 minute. În câte minute fierb șase ouă?

2. O orchestră formată din 60 de persoane interpretează o melodie în 5 minute. În cât timp ar interpreta aceeași melodie o orchestră formată din 50 de persoane?

Minitest

1. Trei cuburi *Rubik* costă 105 lei. Cât costă 6 cuburi *Rubik*?

2 puncte

2. Pentru a termina o lucrare în 10 zile sunt necesari 3 muncitori.
În câte zile ar termina aceeași lucrare 5 muncitori?

2 puncte

3. Compuneți o problemă folosind datele următoare:
4 caiete .... 12 lei
7 caiete .... x lei

2 puncte

4. Cifra de afaceri a unei societăți s-a ridicat în acest an la 9 000 000 €, realizându-se un profit de 360 000 €.
Pentru anul următor se estimează o cifră de afaceri de 10 000 000 €.
Ce profit ar realiza societatea, păstrând rentabilitatea (posibilitatea de câștig) din acest an?

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

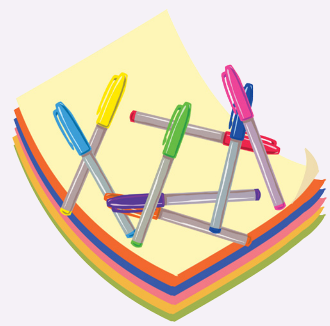
Lecția 2 Metoda comparației

Algoritmul rezolvării problemelor constă în a compara două situații diferite, eliminarea unei necunoscute și determinarea celeilalte necunoscute. Prin înlocuire într-una din situațiile inițiale se determină și cealaltă necunoscută.
După modul cum se realizează eliminarea unei necunoscute, distingem două tipuri de abordări: eliminarea unei necunoscute prin scădere, precedată, eventual, de aducerea la același termen de comparație, și eliminarea unei necunoscute prin înlocuire.

2.1. Eliminarea unei necunoscute prin scădere (metoda reducerii)

Mate practică

Ca să realizeze pliante pentru proiectul de biologie, Bianca a cumpărat 6 coli de hârtie colorată și 8 carioci, pentru care a plătit 58 de lei, iar Dina a cumpărat 6 coli de hârtie colorată și 12 carioci, pentru care a plătit 78 de lei. Cât costă o coală și cât costă o cariocă?



Analiză:
Numărul colilor cumpărate de cele două fete este același. Atunci Dina a plătit mai mult, pentru că a cumpărat mai multe carioci.

Rezolvare:
Pentru a compara mai ușor, transcriem datele problemei:

6 coli .... 8 carioci .... 58 lei
6 coli .... 12 carioci .... 78 lei

Comparând cele două situații, observăm că au deja același termen de comparație: 6 coli. Reiese că diferența dintre sumele de bani (78 lei $-$ 58 lei $=$ 20 lei) provine din diferența dintre numărul cariocilor, 12 carioci $-$ 8 carioci $=$ 4 carioci. Așadar, o cariocă valorează 20 lei $: 4 = 5$ lei.

Obținem:
6 coli .... 5 lei $\cdot 8$ .... 58 lei,

ceea ce înseamnă că 6 coli costă 58 lei $-$ 5 lei $\cdot 8 = 18$ lei.

Așadar, o coală costă 18 lei $: 6 = 3$ lei.

Observație

Spre deosebire de problema anterioară, în unele probleme datele trebuie să fie aduse la același termen de comparație.

Mate practică

Pentru proiectul de biologie, Vlad a cumpărat 2 coli de hârtie colorată și 7 carioci, pentru care a plătit 41 de lei, iar Luca a cumpărat 7 coli de hârtie colorată și 2 carioci, pentru care a plătit 31 de lei. Cât costă 6 coli și 6 carioci?

Rezolvare:
Transcriem datele problemei:
2 coli .... 7 carioci .... 41 lei
7 coli .... 2 carioci .... 31 lei

Comparând cele două situații, observăm că nu au același termen de comparație.

Metoda 1
Îl *obligăm* pe Vlad să cumpere de șapte ori mai mult, pentru care va și plăti de șapte ori mai mult, iar pe Luca să cumpere și să plătească de două ori mai mult și obținem:
14 coli .... 49 carioci .... 287 lei
14 coli .... 4 carioci .... 62 lei

Deducem că diferența de 287 lei $-$ 62 lei $=$ 225 lei provine din diferența celor 49 carioci $-$ 4 carioci $=$ $= 45$ carioci cumpărate în plus.

Atunci o cariocă valorează 225 lei : 45 = 5 lei. Obținem:

2 coli .... 5 lei · 7 .... 41 lei,

ceea ce înseamnă că 2 coli costă 41 lei – 5 lei · 7 = 6 lei.

Atunci o coală costă 6 lei : 2 = 3 lei.

Putem calcula cât costă 6 carioci și 6 coli în două moduri:

6 · (5 lei + 3 lei) = 6 · 8 lei = 48 lei sau

3 lei · 6 + 5 lei · 6 = 18 lei + 30 lei = 48 lei.

Metoda 2

2 coli .... 7 carioci .... 41 lei

7 coli .... 2 carioci .... 31 lei

Prin însumare deducem:

9 coli .... 9 carioci .... 72 lei

ceea ce conduce la:

1 coală .... 1 cariocă .... 72 lei : 9 = 8 lei

6 coli .... 6 carioci .... 8 lei · 6 = 48 lei

2.2. Eliminarea unei necunoscute prin înlocuire (metoda substituției)

Mate practică

În cadrul unui proiect ecologic, o școală a colectat 7 containere cu maculatură și 6 containere cu plastic, care cântăresc împreună 720 de kilograme. Știind că 6 containere cu plastic cântăresc cât 5 containere cu maculatură, să se afle cât cântărește un container cu maculatură și cât cântărește un container cu plastic.

Rezolvare:

Conform enunțului, putem scrie:

7 containere cu maculatură .... 6 containere cu plastic .... 720 kg

Înlocuim (substituim) 6 containere cu plastic cu 5 containere cu maculatură și obținem:

7 containere cu maculatură .... 5 containere cu maculatură .... 720 kg,

ceea ce înseamnă că 12 containere cu maculatură cântăresc 720 kg.

Un container cu maculatură cântărește 720 kg : 12 = 60 kg.

Atunci, 5 containere cu maculatură cântăresc 60 kg · 5 = 300 kg.

Echivalând cele 5 containere cu maculatură cu 6 containere cu plastic, reiese că un container cu plastic cântărește 300 kg : 6 = 50 kg.

Observații

În anumite situații, folosind metoda comparației putem verifica dacă datele problemei sunt contradictorii sau insuficiente pentru rezolvarea problemei.

1. Patru pixuri și 3 creioane costă 41 de lei, iar 8 pixuri și 6 creioane costă 82 de lei. Cât costă un pix?

Rezolvare:

4 pixuri .... 3 creioane .... 41 lei

8 pixuri .... 6 creioane .... 82 lei

Ce observăm?

Dacă dublăm numerele din prima situație, obținem datele din a doua situație și, de aceea, nu putem determina prețul unui pix.

2. Trei cărți și 4 caiete costă 62 de lei, iar 3 cărți și 6 caiete costă 30 de lei. Cât costă o carte?

Rezolvare:

3 cărți .... 4 caiete .... 62 lei

3 cărți .... 6 caiete .... 30 lei

Ce observăm?
Au același termen de comparație, 3 cărți, dar problema nu are soluție, pentru că 6 caiete nu pot avea prețul mai mic decât 4 caiete!

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Desenul schematic alăturat ne sugerează că primele două balanțe sunt în echilibru. Prima are pe talerul din stânga două cuburi și o piramidă, iar pe talerul din dreapta 11 bile. A doua are pe talerul din stânga un cub, iar pe cel din dreapta o piramidă și o bilă.
Câte bile vor echilibra ultima balanță?

Analiză:
Privim a doua balanță: un cub cântărește cât o piramidă și o bilă la un loc.
Atunci, două cuburi cântăresc cât două piramide și două bile la un loc.
Privim prima balanță: două cuburi și o piramidă cântăresc cât 11 bile.

Rezolvare:
Înlocuim cele două cuburi de pe talerul stâng al primei balanțe și obținem: două piramide și două bile plus încă o piramidă cântăresc cât 11 bile și atunci trei piramide cântăresc cât 9 bile. Deducem că o piramidă cântărește cât trei bile. În concluzie, trei bile vor echilibra ultima balanță.

2. Un ogar urmărește o vulpe, care are 12 sărituri înaintea lui. Câte sărituri va face ogarul până să o ajungă pe vulpe, știind că el face 7 sărituri în timp ce vulpea face 8 sărituri și că, în 5 sărituri, ogarul parcurge aceeași distanță pe care o parcurge vulpea în 6 sărituri?

Rezolvare:

	Ogarul	Vulpea
Timp	7 sărituri în timpul a…	… 8 sărituri
Distanță	5 sărituri măsoară cât…	… 6 sărituri

Aducem la același termen de comparație:

	Ogarul	Vulpea
Timp	35 sărituri în timpul a…	… 40 sărituri
Distanță	35 sărituri măsoară cât…	… 42 sărituri

La fiecare 35 de sărituri, ogarul micșorează distanța față de vulpe cu două sărituri de vulpe. Convenim să numim *perioadă* timpul necesar ogarului să facă 35 de sărituri. Vulpea avea, față de ogar, un avans egal cu 12 sărituri de vulpe. Deoarece $12 : 2 = 6$, deducem că după 6 *perioade* ogarul prinde vulpea.
Ogarul ajunge vulpea după 35 de sărituri $\cdot\ 6 = 210$ sărituri.

Probleme propuse

1. „După ce mama vitregă răsturnă două străchini de linte în cenușă, fata se duse în grădină, pe ușa din dos, și strigă:
— Blânde porumbițe, și voi, turturele, și voi, păsări ale cerului, veniți cu toate de-mi ajutați s-aleg lintea:
Bobul, ici, în ulcică, iar cel rău în gușulică…“

(Frații Grimm, *Cenușăreasa*)

Cele două surori vitrege, haine la suflet, i-au mai aruncat în cenușă și trei străchini de mazăre. Câte boabe de linte trebuia să aleagă biata fată cu păsările prietene, știind că în 5 străchini cu linte și 3 de mazăre erau 1 536 de boabe, iar într-o strachină de linte și 3 de mazăre erau 576 de boabe?

2. Cinci pungi cu mălai și 7 pungi cu făină cântăresc 31 kg, iar 7 pungi cu mălai și 7 pungi cu făină cântăresc 35 kg. Cât cântărește o pungă cu mălai, respectiv o pungă cu făină?

3. Compuneți o problemă, apoi rezolvați-o, folosind datele:

5 cărți .... 3 caiete .... 105 lei
3 cărți .... 5 caiete .... 79 lei

4. S-a constatat că 9 bivoli și 8 boi aveau aceeași forță cât 6 boi și 12 bivoli. Cine era mai puternic, bivolul sau boul?

5. Cinci sărituri ale unui ogar și 7 sărituri ale unei vulpi măsoară împreună 17 m. Două sărituri ale unui ogar și 5 sărituri ale unei vulpi măsoară împreună 9 m. Ce distanță parcurge fiecare după 30 de sărituri?

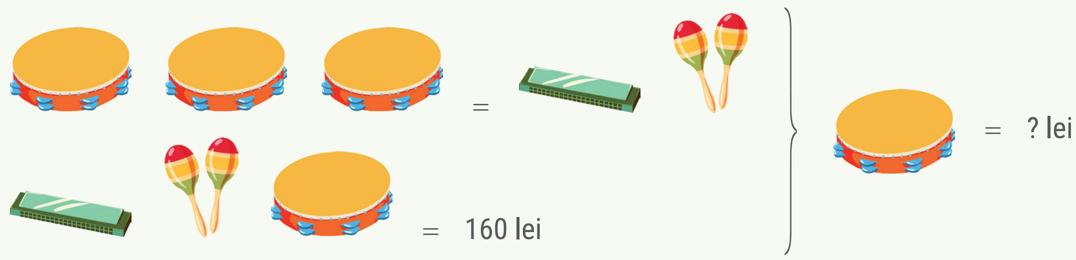
Jocuri

1. □ + ▭ + ○ + □ + △ + ○ = 20

□ + ▭ + ○ = 12

▭ − △ = ?

2.



3. Patru dansatori și 6 dansatoare execută un dans tematic în 5 minute. În cât timp vor executa 8 dansatori și 12 dansatoare același dans tematic?

Minitest

1. Trei robinete și două pompe umplu un bazin cu capacitatea de 31 hl într-o oră.
Trei robinete și 8 pompe umplu un bazin cu capacitatea de 79 hl într-o oră.
Aflați debitul unui robinet și debitul unei pompe.

2 puncte

2. Doi cocoși cântăresc tot atât cât 3 găini. Opt cocoși și 9 găini cântăresc 42 kg.
Cât cântărește un cocoș și cât cântărește o găină, știind că toți cocoșii au aceeași greutate, respectiv toate găinile cântăresc la fel.

2 puncte

3. Șase mingi de fotbal și 6 mașinuțe costă 3 000 de lei. Patru mingi de fotbal și 3 mașinuțe costă 1 700 de lei. Cât costă o minge?

2 puncte

4. Compuneți o problemă și apoi rezolvați-o, folosind datele următoare:

6 kg piersici .... 8 kg mere .... 54 lei
6 kg piersici .... 10 kg mere .... 60 lei

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 3 Metoda figurativă

Metoda figurativă sau grafică este cea mai sugestivă metodă prin care o situație reală se poate transpune în limbaj matematic. Reprezentarea datelor se face, de regulă, prin segmente de dreaptă, care vor fi luate ca părți egale dintr-un întreg. Prin această metodă se pot afla două numere când se cunosc **suma și diferența**, **suma și câtul**, respectiv **diferența și câtul** lor.

3.1. Metoda figurativă: se cunosc *suma* și *diferența* a două numere

Mate practică

Într-o tabără de schi s-au înscris cu 19 mai mulți români decât străini. Pot fi 27 de participanți? Dar 24?

Rezolvare:

Numărul străinilor, fiind mai mic, se reprezintă cu un segment de dreaptă (*o parte*). Vom obține reprezentarea:

p — numărul străinilor

p, +19 — numărul românilor

27

1) Cât reprezintă 2 părți?
$27 - 19 = 8$

2) Cât reprezintă o parte?
$8 : 2 = 4$

3) Câți străini s-au înscris?
$4 \cdot 1 = 4$

4) Câți români s-au înscris?
$4 \cdot 1 + 19 = 23$

Deci pot fi 27 de participanți.

Conform celei de-a doua situații, avem:

p — numărul străinilor

p, +19 — numărul românilor

24

1) Cât reprezintă 2 părți?
$24 - 19 = 5$

2) Cât reprezintă o parte?
$5 : 2$ nu este număr natural.

În acest caz, problema nu are soluție, deoarece *o parte* reprezintă numărul străinilor, care este un număr natural.

De reținut

Problemele se încadrează în acest tip dacă în conținutul lor se afirmă că o mărime este *cu… mai mare* (*mai mică*) decât cealaltă (semnificând diferența dintre cele două mărimi), iar expresii precum *în total*, *la un loc*, *împreună* ș.a. sugerează suma.

3.2. Metoda figurativă: se cunosc *suma* și *câtul* a două numere

Situație problemă

Împărțind un număr natural la un alt număr natural, Luca obține câtul 3 și restul 0. Să se afle cele două numere, știind că suma lor este 36.

Rezolvare:

Câtul 3 sugerează că primul număr (deîmpărțitul) este *de 3 ori mai mare* decât al doilea (împărțitorul). Se obține reprezentarea grafică următoare:

p — împărțitorul

p, p, p — deîmpărțitul

36

1) Cât reprezintă o parte?
$36 : 4 = 9$

2) Care sunt cele două numere?
$9 \cdot 3 = 27$, respectiv $9 \cdot 1 = 9$

De reținut

Câtul dintre două mărimi este sugerat de expresii de tipul: *de atâtea ori mai mult*, *de atâtea ori mai puțin*, *de … ori mai mare*, *de … ori mai mic*, *de … ori mai în vârstă*, *de … ori mai tânăr*, *de … ori mai scump*, *de … ori mai ieftin* ș.a., iar uneori este precizat direct.

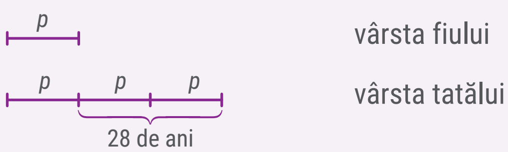
3.3. Metoda figurativă: se cunosc *diferența* și *câtul* a două numere

Situație problemă

Peste doi ani, tatăl va fi *de 3 ori mai în vârstă* decât fiul său. Acum doi ani, tatăl era *mai în vârstă cu 28 de ani* decât fiul. Ce vârstă are fiecare în prezent?

Observație:
Cheia rezolvării problemelor de acest tip este sesizarea faptului că diferența de vârstă este aceeași în trecut, prezent, respectiv viitor.

Rezolvare:
Din primele două propoziții ale enunțului deducem reprezentarea:



Ea ne sugerează, prin *părți*, vârsta fiului, respectiv a tatălui, peste doi ani. Ca reprezentare grafică, diferența de vârstă este de două părți. Conform *cheii*, diferența de vârstă va fi peste doi ani tot de 28 de ani.

1) Cât reprezintă o parte?
$28 : 2 = 14$

2) Ce vârstă vor avea peste doi ani?
$14 \cdot 1 = 14$, respectiv $14 \cdot 3 = 42$

3) Ce vârstă au în prezent?
$14 - 2 = 12$, respectiv $42 - 2 = 40$.

De reținut

Diferența este sugerată, de regulă, prin expresia *cu … mai mare* (*mai mică*), dar și prin *mai în vârstă cu …*, *mai scump cu …* etc.

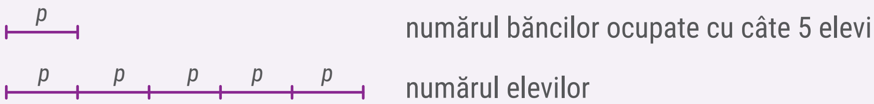
3.4. Metoda figurativă *folosind simboluri*

Mate practică

La un eveniment în sala de sport a școlii asistă mai mulți elevi. Dacă pe fiecare bancă se așază câte 4 elevi, atunci 18 nu mai au loc. Dacă se așază câte 5 elevi pe fiecare bancă, atunci rămân 4 bănci libere.

Câte bănci și câți elevi sunt în sală?

I. Rezolvare cu ajutorul segmentelor de dreaptă
Deoarece, în final, pe o bancă se află 5 elevi, deducem că numărul elevilor este de 5 ori mai mare decât al băncilor ocupate. Vom avea următoarea reprezentare grafică:

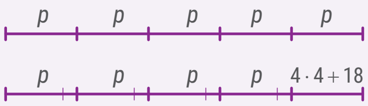


Numărul total al băncilor este cu 4 mai mare, deoarece 4 bănci sunt libere. Dacă toate băncile sunt ocupate cu câte 4 persoane, rămân fără loc 18 elevi. Deci numărul elevilor este cu 18 mai mare decât numărul obținut prin înmulțirea cu 4 a numărului total de bănci:

numărul total al băncilor

numărul elevilor

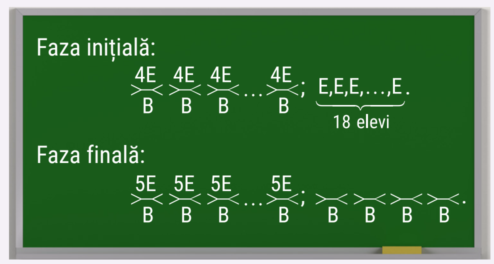
Numărul elevilor fiind același, rezultă că reprezentările de mai jos sunt echivalente:



Atunci, un segment de dreaptă (o parte) este echivalent cu numărul $4 \cdot 4 + 18 = 16 + 18 = 34$. Numărul băncilor este $34 + 4 = 38$, iar numărul elevilor este egal cu $34 \cdot 5 = 170$ sau $38 \cdot 4 + 18 = 170$.

II. Rezolvarea problemei *folosind simboluri*

Faza inițială:
Pe fiecare bancă, simbolizată cu B, figurăm câte 4 elevi, simbolizați cu 4E, și 18 elevi fără loc.



Faza finală:
Figurăm câte 5 elevi pe o bancă și 4 bănci libere.

Pentru a trece de la prima fază la cea de-a doua, gândim *o fază intermediară* (imaginară). Dacă am fi în sală, ar trebui să procedăm astfel: eliberăm 4 bănci de la faza inițială și, astfel, alți 16 elevi se alătură celor 18 care stau în picioare:

$$\underset{B}{\overset{4E}{>\!<}}\ \underset{B}{\overset{4E}{>\!<}}\ \underset{B}{\overset{4E}{>\!<}} \ldots \underset{B}{\overset{4E}{>\!<}};\ \underset{B}{>\!<}\ \underset{B}{>\!<}\ \underset{B}{>\!<}\ \underset{B}{>\!<};\ \underbrace{E,E,E,\ldots,E}_{18+16=34}.$$

Cei 34 de elevi trebuie să se așeze în băncile în care deja se află câte 4 elevi. În fiecare bancă se mai așază doar câte un elev și atunci deducem că, în final, există 34 de bănci cu câte 5 elevi fiecare și 4 bănci libere. Atunci numărul elevilor este $34 \cdot 5 = 170$, iar cel al băncilor $34 + 4 = 38$.

Putem rezolva problema gândind și de la faza finală spre faza inițială!

Faza finală:

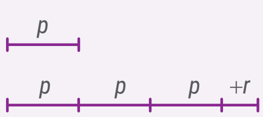
$$\underset{B}{\overset{5E}{>\!<}}\ \underset{B}{\overset{5E}{>\!<}}\ \underset{B}{\overset{5E}{>\!<}} \ldots \underset{B}{\overset{5E}{>\!<}};\ \underset{B}{>\!<}\ \underset{B}{>\!<}\ \underset{B}{>\!<}\ \underset{B}{>\!<}.$$

Faza intermediară:
Toți elevii sunt așezați, în final câte 5, iar inițial câte 4. Sunt necesari 16 elevi pentru a-i așeza câte 4 în cele 4 bănci libere și încă 18 elevi pentru a sta *în picioare*. Așadar, ar trebui ridicați de pe bănci $16 + 18 = 34$ de elevi. De la fiecare aranjament de tipul $\underset{B}{\overset{5E}{>\!<}}$ putem lua doar un singur elev pentru a forma un aranjament de tipul $\underset{B}{\overset{4E}{>\!<}}$.
Deducem că există 34 de grupări de tipul $\underset{B}{\overset{5E}{>\!<}}$ și atunci numărul băncilor este egal cu $34 + 4 = 38$, iar cel al elevilor este egal cu $34 \cdot 5 = 170$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Împărțind un număr natural la un alt număr natural obținem câtul 3. Să se afle cele două numere, știind că suma lor este 36.

Rezolvare:
Fie numărul natural *d* deîmpărțitul și *î*, un număr natural nenul, împărțitorul. Din *teorema împărțirii cu rest*, $d = î \cdot c + r$, cu condiția $r < î$, unde *c* și *r* sunt numere naturale. Datele din enunț se transpun în următoarea reprezentare grafică:



împărțitorul

deîmpărțitul

36

Deoarece $4p+r=36$, restul trebuie să fie un număr natural care se împarte exact la 4.

Cazul I. Dacă $r=0$, atunci $î=9$ și, ținând cont că îndeplinește condiția $r<î$, avem $d=27$.

Cazul al II-lea. Dacă $r=4$, atunci $î=8$ și, ținând cont că îndeplinește condiția $r<î$, avem $d=28$.

Cazul al III-lea. Dacă $r=8$, atunci $î=7$ nu îndeplinește condiția $r<î$ și, în consecință, nu avem soluție.

Cazul al IV-lea. Dacă $r>8$, cu atât mai mult condiția $r<î$ nu este îndeplinită. Deci problema admite două soluții:

A. $d=27;\ î=9;\ c=3$ și $r=0$; **B.** $d=28;\ î=8;\ c=3$ și $r=4$.

Ce observăm?

S-au combinat *suma*, *câtul* și *diferența*.

Am reluat problema de la cazul în care se cunosc *suma* și *câtul* a două numere, pentru a evidenția că uneori rezolvarea se modifică semnificativ, chiar dacă există doar o mică modificare în enunț.

2. „Foaie verde de arțari,
Câte ciori sunt și câți pari?
Dacă ele sunt răzlețe,
Ca s-avem un par și-o cioară,
Una *din cinstite fețe*
S-ar roti pe dinafară…

Iar dacă cumva ar vrea
Câte două-n par să stea,
Alt neajuns apare iar:
Va rămâne gol un par."

(*GAZETA MATEMATICĂ*, 1912)

Rezolvare:

Simbolizăm cu P și C un par, respectiv o cioară.

Faza inițială: $\underset{P}{\overset{C}{\succ\!\prec}}\quad \underset{P}{\overset{C}{\succ\!\prec}}\quad \underset{P}{\overset{C}{\succ\!\prec}}\quad \ldots\quad \underset{P}{\overset{C}{\succ\!\prec}}\quad 1C$

Faza finală: $\underset{P}{\overset{CC}{\succ\!\prec}}\quad \underset{P}{\overset{CC}{\succ\!\prec}}\quad \underset{P}{\overset{CC}{\succ\!\prec}}\quad \ldots\quad \underset{P}{\overset{CC}{\succ\!\prec}}\quad 1P$

Faza intermediară

Ca să trecem de la faza inițială spre cea finală, ne imaginăm că *obligăm* o cioară așezată pe un par să-l *elibereze*.

Avem: $\underset{P}{\overset{C}{\succ\!\prec}}\quad \underset{P}{\overset{C}{\succ\!\prec}}\quad \underset{P}{\overset{C}{\succ\!\prec}}\quad \ldots\quad \underset{P}{\overset{C}{\succ\!\prec}}$

1P 2C

Obligăm cele 2 ciori răzlețe să se așeze pe câte un par, pe care deja era o cioară, pentru a avea configurația $\underset{P}{\overset{CC}{\succ\!\prec}}$.

În final vom avea doar 2 configurații de tipul $\underset{P}{\overset{CC}{\succ\!\prec}}, \underset{P}{\overset{CC}{\succ\!\prec}}$.

Răspuns: Erau 4 ciori și 3 pari.

Probleme propuse

1. Doi frați gemeni împreună cu părinții lor cântăresc 238 kg. Copiii au câte 40 kg, iar tatăl lor are cu 14 kg mai mult decât mama. Cât cântărește mama?

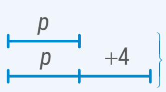
a) 84 kg; b) 74 kg; c) 76 kg; d) 72 kg.

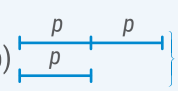
2. Cu ocazia zilei de 8 Martie, Bianca i-a dăruit mamei ei un buchet de trandafiri, Luca a pregătit pentru mama lui un buchet de frezii, iar Vlad un buchet de lalele. Știind că erau 39 de flori și că lalele erau cu două mai multe decât freziile, ca și freziile față de trandafiri, să se afle numărul florilor de fiecare fel.

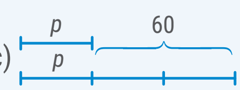
3. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 444 m. Lățimea este cu 12 m mai mică decât lungimea. Aflați perimetrul unui pătrat a cărui latură măsoară cât lungimea dreptunghiului.

4. Suma a două numere naturale este 206. Așezându-i unuia dintre ele cifra 1 în stânga, obținem un număr egal cu celălalt. Să se afle cele două numere.

5. Treizeci și șapte de copii au participat la un concurs de matematică. Numărul copiilor care au obținut punctaje mai mici decât Vlad este de trei ori mai mare decât al celor care au obținut punctaje mai mari. Pe ce loc s-a clasat Vlad?
6. Un teren în formă de dreptunghi, cu lungimea de 3 ori mai mare decât lățimea, are perimetrul egal cu 1 200 de metri. Pe marginea terenului se plantează pomi la o distanță de 6 metri unul față de celălalt.
   a) Câți pomi s-au plantat pe una dintre lungimile terenului?
   b) Câți pomi s-au plantat în total?
7. Pentru a câștiga mâna fetei de împărat, Făt-Frumos a primit următoarea poruncă:
   „Să-mi aduci două zile la rând un buchet de trandafiri în care să fie cel puțin 17 trandafiri și cel mult 31. Să fie trandafiri galbeni de 6 ori mai puțini decât trandafiri albi și roșii la un loc, iar trandafiri roșii de două ori mai puțini decât cei albi. Să nu-mi aduci în ambele zile același număr de trandafiri!“
   Făt-Frumos a îndeplinit porunca. Cum a procedat?
8. Adrian are 3 ani, iar tatăl lui are 34 de ani. Peste câți ani Adrian va fi de două ori mai tânăr decât tatăl său?
9. Un număr natural are cifra unităților egală cu 7. Dacă ștergem această cifră, numărul se micșorează cu 1 816. Aflați numărul inițial.
10. Dacă mărim primul factor al unui produs de 3 ori, iar pe al doilea îl micșorăm cu 750, rezultatul rămâne neschimbat. Să se afle cei doi factori, știind că unul este de 5 ori mai mare decât celălalt.
11. Compune câte o problemă după fiecare reprezentare grafică:

a) 

b) 

c) 

12. Pe o masă, la care stau 5 persoane, este așezată o fructieră, în care se află de 3 ori mai multe prune decât mere. După ce fiecare persoană ia câte un măr și o prună, rămân în fructieră de 5 ori mai multe prune decât mere. Câte mere și câte prune erau inițial?
13. La aniversarea zilei sale de naștere, Vlad și-a invitat jumătate dintre colegi. Atât invitaților, cât și sărbătoritului li s-au servit câte 3 fursecuri și 5 bomboane de fiecare, după care au rămas 12 fursecuri și 40 de bomboane. La început, pe platoul mare se aflau de două ori mai multe bomboane decât fursecuri. Câți elevi erau în clasă?

Jocuri

Un pescar s-a înapoiat acasă tare posomorât.
„— De ce ești supărat? l-au întrebat ai lui.
— Cum să nu fiu, când știu câți pești am prins de data aceasta: 6 fără cap, 9 fără coadă și încă 8 pe jumătate!“
Câți pești a prins șugubățul pescar?

Minitest

1. „După ce hoața de vulpe a aruncat o mulțime de pește pe drum, bini… șor! sare și ea din car și, cu mare grabă, începe a strânge peștele de pe drum.“

   (Ion Creangă — *Ursul păcălit de vulpe*)

   După ce îi duse la vizuina ei, observă că avea 20 de pești (păstrăv și crap). Numărul păstrăvilor era cu 4 mai mare decât cel al crapilor. Câți păstrăvi avea vulpea?

   2 puncte
2. În curtea unei familii sunt 30 de păsări: găini și rațe. Câte găini și câte rațe sunt, știind că numărul găinilor este de 4 ori mai mare decât al rațelor?

   2 puncte
3. Diferența a două numere este 159. Dacă împărțind un număr la celălalt obținem câtul 5 și restul 7, să se afle cele două numere.

   2 puncte
4. Dacă elevii unei clase ar fi așezați câte doi în bancă, ar mai fi necesare 3 bănci, iar dacă ar fi așezați câte 3 în bancă, ar rămâne 2 bănci libere. Câți elevi și câte bănci sunt în clasă?

   3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 4 Metoda mersului invers

4.1. Exerciții sau probleme cu o singură necunoscută

Situație problemă

Dina s-a gândit la un număr pe care l-a înmulțit cu 5. A mărit numărul obținut cu 5, a împărțit noul rezultat la 5 și a obținut 11. La ce număr s-a gândit Dina?

Descompunem problema în trei probleme mai simple:

1. Dina a înmulțit numărul cu 5 și a obținut un produs pe care nu-l cunoaștem.
2. A mărit produsul cu 5 și a obținut o sumă pe care nu o știm.
3. A împărțit suma la 5 și a obținut câtul 11.

Numărul Dinei $\xrightarrow{\text{se înmulțește cu 5}}$ produs $\xrightarrow{\text{se adună cu 5}}$ sumă $\xrightarrow{\text{se împarte la 5}}$ câtul = 11

Rezolvăm problemele în ordinea inversă apariției lor.

Numărul Dinei $\xleftarrow{\text{se împarte la 5}}$ produs $\xleftarrow{\text{se scade 5}}$ sumă $\xleftarrow{\text{se înmulțește cu 5}}$ câtul = 11

Rezolvăm a treia problemă:
Deoarece este o operație de împărțire cu împărțitorul 5 și câtul 11, iar suma ține locul deîmpărțitului, deducem că suma este egală cu $5 \cdot 11 = 55$.

Rezolvăm a doua problemă, ținând cont că suma este 55:
A mărit produsul cu 5 și a obținut 55.
Este o operație de adunare dintre un produs (primul termen) și numărul 5 (al doilea termen), obținându-se suma 55. Atunci produsul este egal cu $55 - 5 = 50$.

Rezolvăm prima problemă, ținând cont că produsul este 50:
Dina a înmulțit numărul cu 5 și a obținut produsul 50.
Este o operație de înmulțire cu primul factor necunoscut, al doilea factor fiind egal cu 5.
Primul factor se află împărțind produsul la celălalt factor: $50 : 5 = 10$.

Răspuns:
Dina s-a gândit la numărul 10.

Mate practică

Dina și Tudor, fratele ei, își petrec vacanța la bunici. Bunica îi anunță pe cei doi nepoți că le-a lăsat pe masă, în bucătărie, niște bomboane, pe care trebuie să le împartă frățește. Tudor vine primul și ia jumătate din bomboane.

După un timp vine și Dina și, neștiind că fratele și-a luat deja bomboanele, ia jumătate și se întoarce la joacă. Pe masă au rămas 3 bomboane.

Câte bomboane le-a lăsat bunica?

Descompunem problema în două probleme mai simple:

1. Tudor vine primul și ia jumătate din bomboane. Atunci pe masă rămân jumătate din bomboane.

2. Dina ia jumătate din bomboanele de pe masă. Mai rămân 3 bomboane.

Rezolvăm problemele în ordinea inversă apariției.

Rezolvăm a doua problemă:

Dina ia jumătate din bomboanele de pe masă. Mai rămân 3 bomboane.

Este o operație de împărțire la 2, obținându-se câtul 3. Atunci Dina a găsit pe masă

$$3 \text{ bomboane} \cdot 2 = 6 \text{ bomboane}.$$

Rezolvăm a doua problemă:

Tudor ia jumătate din bomboane și pe masă rămân 6 bomboane.

Raționând analog sau observând că cele 6 bomboane rămase reprezintă „cealaltă jumătate“ deducem că Tudor a găsit pe masă 12 bomboane.

Răspuns:

Bunica a lăsat pe masă 12 bomboane.

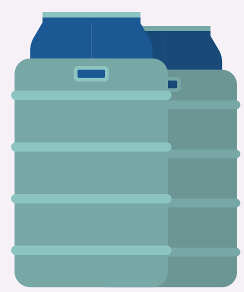
4.2. Exerciții sau probleme cu cel puțin două necunoscute

Mate practică

Avem două vase, A și B, umplute parțial cu apă. Turnăm a treia parte din A în B.

Apoi turnăm a treia parte din B în A. După aceste operații constatăm că în fiecare vas se află 36 de litri de apă.

Câți litri de apă erau inițial în fiecare vas, știind că toate operațiile au fost posibile?



Rezolvare:

Descompunem problema dată în trei probleme mai simple.

1. Turnăm a treia parte din A în B. Atunci în A rămân două părți, iar în B se adaugă a treia parte din A.

2. Turnăm a treia parte din B în A. Atunci în B rămân două părți, iar în A se adaugă a treia parte din B.

3. În fiecare vas sunt 36 l de apă (*problemă rezolvată*).

Rezolvăm problemele în ordinea inversă apariției.

A treia problemă este rezolvată și folosim rezultatul obținut, 36 l, în a doua problemă:

Turnăm a treia parte din B în A. Atunci în B rămân două părți (adică 36 l), iar în A se adaugă a treia parte din B și se obțin 36 l.

Deducem că 36 l de apă reprezintă două părți din B, ceea ce înseamnă că 18 l de apă reprezintă o parte. Atunci, înainte de a turna a treia parte din B în A, în B erau $18 \text{ l} \cdot 3 = 54 \text{ l}$.

Deoarece în A s-a turnat a treia parte din B, adică 18 l, și s-au făcut 36 l, atunci, înainte de această operație, în A erau $36 \text{ l} - 18 \text{ l} = 18 \text{ l}$.

A doua problemă este rezolvată și folosim rezultatele obținute în prima problemă:

Turnăm a treia parte din A în B. Atunci în A rămân două părți (adică 18 l), iar în B se adaugă a treia parte din A și se obțin 54 l.

În A, cei 18 l reprezintă două părți, ceea ce înseamnă că 9 l de apă reprezintă o parte. Atunci, înainte de a turna a treia parte din A în B, în A erau $9 \text{ l} \cdot 3 = 27 \text{ l}$.

În B s-au obținut 54 l după ce s-a adăugat o parte din A, adică 18 l.

Atunci în B erau $54 \text{ l} - 9 \text{ l} = 45 \text{ l}$.

Răspuns:

Inițial, în A erau 27 l, iar în B, 45 l de apă.

II Metode aritmetice de rezolvare

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Mă gândesc la un număr, pe care îl micșorez cu 3 de trei ori. Împart rezultatul la 8 și, dacă măresc noul rezultat cu 5, obțin pătratul lui 16. La ce număr m-am gândit?

Rezolvare:

În primul rând, să observăm că a micșora un număr cu 3 de trei ori înseamnă să-l micșorăm cu $3 \cdot 3 = 9$, iar pătratul lui 16 este $16^2 = 256$.

Descompunem problema dată în trei probleme mai simple.

1. Micșorez numărul la care m-am gândit cu 9 și obțin un rest al scăderii, necunoscut.
2. Împart restul la 8 și obțin un cât necunoscut.
3. Măresc câtul cu 5 și obțin 256.

Rezolvăm în ordinea inversă apariției.

Rezolvăm a treia problemă:

Măresc câtul cu 5 și obțin 256.

Este o operație de adunare, în care primul termen este *câtul*, al doilea este 5, iar suma este egală cu 256. Atunci câtul este egal cu $256 - 5 = 251$.

Rezolvăm a doua problemă:

Împart restul la 8 și obțin câtul 251.

Este o operație de împărțire și pentru a afla deîmpărțitul efectuăm $251 \cdot 8 = 2008$.

Deci restul este 2008.

Rezolvăm prima problemă:

Micșorez numărul la care m-am gândit cu 9 și obțin restul 2008.

Este o operație de scădere în care lipsește descăzutul, pe care îl aflăm calculând $2008 + 9 = 2017$.

Răspuns:

Numărul la care m-am gândit este 2017.

2. Pe o insulă sunt numai arici, șerpi și vulpi. Fiecare animal mănâncă o singură dată pe zi, astfel încât orice arici mănâncă la micul dejun câte un șarpe, orice vulpe mănâncă la prânz câte un arici, iar orice șarpe mănâncă la cină câte o vulpe. La sfârșitul zilei de miercuri, pe insulă a rămas un singur animal. Câte animale existau pe insulă luni, înainte de micul dejun?

Rezolvare:

Miercuri după cină rămâne un singur animal, și anume un șarpe.

După prânz mai erau două animale: șarpele și vulpea, pe care șarpele a mâncat-o seara.

După micul dejun erau 3 animale: șarpele, vulpea și un arici, pe care l-a mâncat vulpea la prânz. Marți seara, după cină, erau 4 animale: o vulpe, un arici și 2 șerpi (unul care a rămas până la sfârșit și unul pe care l-a mâncat ariciul dimineață).

Continuăm raționamentul sintetizând datele într-un tabel, pe care îl completăm folosind *metoda mersului invers*: după cină până înainte de micul dejun (pe coloane de sus în jos), pentru fiecare zi de miercuri până luni, folosind *metoda mersului invers*.

	Miercuri	Marți	Luni
După cină	1 S	2 S + 1 V + 1 A	6 S + 3 V + 4 A
După prânz	1 S + 1 V	2 S + 3 V + 1 A	6 S + 9 V + 4 A
După micul dejun	1 S + 1 V + 1 A	2 S + 3 V + 4 A	6 S + 9 V + 13 A
Înainte de micul dejun	2 S + 1 V + 1 A	6 S + 3 V + 4 A	19 S + 9 V + 13 A

Probleme propuse

1. Un număr se mărește cu 4, iar rezultatul se mărește de 4 ori. Noul rezultat micșorat cu 4 se împarte la 4 și se obține 4. Aflați numărul.

2. Mă gândesc la un număr. După ce îl dublez de două ori, îl micșorez cu 5 de cinci ori. Rezultatul îl măresc de 18 ori și obțin numărul 3438. La ce număr m-am gândit?

3. Dintre exercițiile de mai jos:
a) $71 - (3x + 5) : 6 = 10$; b) $[71 - (3x + 5)] : 6 = 10$,
alege-l pe cel care transpune problema:
Mărim un număr, notat cu x, de 3 ori și la rezultat se adaugă 5. Rezultatul obținut se scade din 71. Micșorăm noul rezultat de 6 ori și obținem 10.

4. La sfârșitul fiecărei săptămâni, Dina iese în mijlocul naturii lângă un lac cu nuferi. „În a doua săptămână erau de două ori mai mulți nuferi și încă 2. În a treia săptămână am numărat de trei ori mai mulți nuferi, minus 3, față de săptămâna precedentă. Dacă-n a treia săptămână am numărat 57 de nuferi, câți nuferi au fost la sfârșitul primei săptămâni?"

5. Mai mulți prieteni voiau să facă o excursie. Unul însă nu voia să dea partea lui de bani pentru cheltuiala comună. Atunci, Moș Glumici i-a făcut următoarea propunere:
„— Eu îți dublez suma pe care o ai. Dumneata dai partea dumitale de 8 poli și ce-ți rămâne, eu îți dublez iar, cu condiția ca dumneata să dai iar 8 poli."
Amicul s-a lăsat convins, socotind că nu dă nimic din banii lui, dar văzu curând că nu mai are niciun pol. Câți bani avea amicul?

(Walter Sperling — *1000 probleme distractive*)

6. În săptămâna *Școala Altfel*, elevii unei clase din Călimănești au pornit într-o drumeție până la Poiana Stănișoarei. După ce au parcurs jumătate din distanță, au luat o pauză. Un elev a calculat că, după ce parcurg trei sferturi din restul traseului, mai au doar 1 km până la destinație. Ce lungime are traseul de la școală până la Poiana Stănișoarei?

7. Patruzeci și opt de mere se împart în două grămezi. Se iau din prima câte sunt în a doua și se adaugă la a doua. Se iau din a doua câte au rămas în prima și se adaugă la prima. Se iau din prima câte au rămas în a doua și se adaugă la a doua. În urma acestor operații, grămezile au același număr de mere. Câte mere au fost la început în fiecare grămadă?

Joc

Cere colegului să scrie un număr de două cifre, cu ambele cifre mai mici decât 5, fără ca tu să vezi acest număr. După aceea, cere-i să mărească prima cifră de 5 ori și la rezultat să adune a doua cifră. Roagă-l să înmulțească suma cu 4 și să comunice rezultatul obținut. Folosind rezultatul comunicat, poți să-l uimești ghicind numărul scris inițial. Cum procedezi?

Minitest

1. Un număr se mărește cu 512, iar rezultatul se mărește de 7 ori și obținem numărul 4 200. Aflați numărul inițial.

2 puncte

2. Mărind un număr cu 5 și împărțind rezultatul la 6, obținem 11. Stabiliți dacă micșorând numărul inițial cu 6 și împărțindu-l la 5 obținem același rezultat, 11.

2 puncte

3. Mă gândesc la un număr, pe care-l măresc de 5 ori, apoi îl măresc cu 4. Împart numărul 2 018 la rezultatul obținut și obțin câtul 2. La ce număr m-am gândit?

2 puncte

4. Adi și Ana practică următorul joc cu bile. Adi ia jumătate din numărul bilelor, iar Ana ia jumătate din rest și mai rămân 16 bile. Continuă să ia bile pe rând până rămâne o singură bilă. Cine ia ultima bilă câștigă. Să se afle câte bile erau inițial și cine câștigă jocul.

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 5 Metoda falsei ipoteze

Algoritmul de rezolvare prin această metodă începe cu *ipoteza* (presupunerea) că sunt *toate de același fel*. Se continuă cu un raționament care se finalizează cu o comparație cu una dintre datele problemei, în urma căruia se stabilește *cu cât* sau, mai rar, *de câte ori* este nepotrivită ipoteza făcută. Această nepotrivire dintre presupunere și enunț explică denumirea de *metodă a falsei ipoteze*.

Mate practică

În 10 bidoane, unele cu capacitatea de 3 litri, iar altele cu capacitatea de 10 litri, erau 72 de litri de apă. Câte bidoane erau de fiecare fel?

Rezolvare:
Presupunem că toate bidoanele aveau capacitatea de 3 litri. Atunci în cele 10 bidoane am avea $3\ \text{l} \cdot 10 = 30\ \text{l}$. Rezultă că ipoteza este falsă, deoarece ne conduce la o nepotrivire cu $72\ \text{l} - 30\ \text{l} = 42\ \text{l}$. Deci sunt și vase de 10 litri.

Pentru a afla cu cât trebuie să modificăm ipoteza făcută, observăm că la 3 litri trebuie să adăugăm 7 litri pentru a obține 10 litri. Diferența de 42 de litri se compensează printr-un număr de înlocuiri egal cu $42 : 7 = 6$.

Deci sunt 6 bidoane a 10 litri și 4 bidoane a 3 litri fiecare.

Ce observăm?
Ipoteza făcută în această problemă corespunde următorului caz practic: mai întâi turnăm în fiecare dintre cele 10 bidoane câte 3 litri, apoi cantitatea rămasă o împărțim, în mod egal, în vasele de 10 litri. Cum mai dispunem de încă 42 de litri, sunt 6 bidoane în care mai pot fi puși câte 7 litri.

Observații

1. Problema se poate rezolva și în ipoteza că toate bidoanele au capacitatea de 10 l și atunci am fi avut $10\ \text{l} \cdot 10 = 100\ \text{l}$. Rezultă că ipoteza e falsă, deoarece duce la o nepotrivire cu $100\ \text{l} - 72\ \text{l} = 28\ \text{l}$. *Vom înlocui mintal* bidoanele de 10 l cu bidoane de 3 l. Diferența la o *înlocuire* este de $10\ \text{l} - 3\ \text{l} = 7\ \text{l}$. Deoarece $28\ \text{l} : 7\ \text{l} = 4$, deducem că sunt necesare 4 *înlocuiri*. Atunci sunt 4 bidoane de 3 litri fiecare și, respectiv, 6 bidoane de 10 litri.
2. Un raționament analog putem face pornind de la o ipoteză oarecare.
   Presupunem că erau 7 bidoane de 3 litri și 3 bidoane de 10 litri. Capacitatea acestor bidoane este egală cu $3\ \text{l} \cdot 7 + 10\ \text{l} \cdot 3 = 51\ \text{l}$. Deducem că ipoteza este falsă, deoarece duce la o nepotrivire cu $72\ \text{l} - 51\ \text{l} = 21\ \text{l}$. Cum $51\ \text{l} < 72\ \text{l}$, rezultă că unele bidoane de 3 litri trebuie *înlocuite* cu bidoane de 10 litri. Diferența la o *înlocuire* fiind de 7 litri, trebuie făcut un număr de înlocuiri: $21 : 7 = 3$. Atunci, numărul bidoanelor de 3 litri este $7 - 3 = 4$, iar numărul bidoanelor de 10 litri este $3 + 3 = 6$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Dacă persoanele aflate, la un moment dat, într-un parc s-ar așeza câte două pe o bancă, atunci ar rămâne 20 de persoane în picioare, iar dacă s-ar așeza câte 5 pe o bancă, ar rămâne 20 de bănci libere. Câte bănci și câte persoane erau în parc în acel moment?

   Ce observăm?
   Deoarece rămân 20 de bănci libere, ipoteza pe care o facem trebuie să depășească acest număr.
   Presupunem că erau 25 de bănci. Atunci, fiind două persoane pe o bancă, calculăm că numărul persoanelor ar fi egal cu $2 \cdot 25 + 20 = 70$.

   În situația în care rămân 20 de bănci libere, numărul persoanelor ar fi egal cu $5 \cdot 5 = 25$.

   Efectuăm $70 - 25$ și constatăm că există o nepotrivire cu 45 de persoane. Rezultă că ipoteza este falsă.

   Mărind numărul băncilor cu o unitate, numărul persoanelor se mărește în prima situație cu 2 (deoarece stăteau două pe o bancă), iar în a doua situație se mărește cu 5 (deoarece stăteau 5 pe o bancă). Deci nepotrivirea scade cu 3 persoane. Ținând cont că trebuie să dispară o nepotrivire de 45 de persoane, numărul băncilor trebuie să crească cu $45 : 3 = 15$. Reiese că numărul băncilor era egal cu $25 + 15 = 40$, iar cel al persoanelor era egal cu $2 \cdot 40 + 20 = 100$.

Ce observăm?
Deși este o problemă tipică pentru *metoda figurativă* cu simboluri, se poate rezolva și cu *metoda falsei ipoteze*.

2. Luca și Vlad au împreună 130 de timbre. Știind că Luca are cu 8 timbre mai puțin decât Vlad, să se afle câte timbre are fiecare.

Rezolvare:
Presupunem că Luca are 20 de timbre. Atunci Vlad are 110 timbre (restul până la 130). Rezultă că Luca are cu 90 mai puțin. Ipoteza este falsă cu $90 - 8 = 82$. Într-un caz practic, Vlad ar trebui să-i mai dea timbre lui Luca. Dându-i un timbru, deja diferența scade cu două timbre. Cum $82 : 2 = 41$, deducem că ipoteza este falsă cu 41 de timbre. Atunci numărul timbrelor pe care le au Luca și Vlad este egal cu $20 + 41 = 61$, respectiv $110 - 41 = 69$.

3. Suma a două numere este 20. Să se afle cele două numere, știind că al doilea este de 4 ori mai mare decât celălalt.

Regulă:
Algoritmul de rezolvare se finalizează cu o comparație cu una din datele problemei, în urma căreia se stabilește *de câte ori* este nepotrivită ipoteza făcută.
Ca și la *metoda figurativă*, se folosește mai întâi câtul celor două numere, apoi suma lor (aici câtul este dat de expresia: *al doilea este de 4 ori mai mare ca celălalt*).

Rezolvare:
Presupunem că primul număr este 1. Al doilea număr, fiind de 4 ori mai mare, este 4. Atunci suma lor este 5. Datorită nepotrivirii cu suma din textul problemei, rezultă că ipoteza este falsă. Cum $20 : 5 = 4$, deducem că numerele reale sunt de 4 ori mai mari, ca cele ipotetice, adică sunt:
$1 \cdot 4 = 4$ și $4 \cdot 4 = 16$

4. Un kilogram de mere este mai ieftin de 3 ori decât un kilogram de lămâi. 3 kilograme de mere și 8 kilograme de lămâi costă 54 de lei. Să se afle prețul unui kilogram din fiecare fel.

Rezolvare:
Presupunem că un kilogram de mere costă 1 leu. Rezultă că un kilogram de lămâi costă 3 lei. Putem afla costul celor 3 kilograme de mere și 8 kilograme de lămâi:

1 leu $\cdot 3 + 3$ lei $\cdot 8 = 27$ lei.

Ținând cont de costul real de 54 de lei, rezultă că ipoteza este falsă. Deoarece 54 lei : 27 lei $= 2$, în realitate prețurile sunt de 2 ori mai mari.

1 leu $\cdot 2 = 2$ lei (costă 1 kg de mere)

3 lei $\cdot 2 = 6$ lei (costă 1 kg de lămâi)

Ce observăm?
Deși ultimele trei probleme sunt reprezentative pentru alte metode aritmetice, se pot rezolva și cu metoda falsei ipoteze.

Probleme propuse

1. „Atunci cocoșul i-a zis:
— Stăpâne, așterne un țol aici în mijlocul ogrăzii.
Moșneagul, iute ca un prâsnel, așterne țolul. Cocoșul atunci se așeză pe țol, scutură puternic din aripi și îndată se umplu ograda și livada moșneagului, pe lângă paseri și de cirezi de vite."

(Ion Creangă — *Punguța cu doi bani*)

Câte păsări și câte vite a adus cocoșul, știind că aveau 320 de capete și 880 de picioare?

2. Se toarnă 89 l de apă în 7 vase: unele de 3 l fiecare, iar altele de 20 l.
Câte vase de fiecare fel au fost necesare?

3. Un fermier spune: „Am găini și iepuri. Când număr capetele găsesc 100. Când număr picioarele găsesc 240." Câte găini are fermierul?

a) 60; b) 50; c) 80; d) 20; e) 40.

4. La un concurs de matematică, fiecare elev a avut de rezolvat 6 probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect elevul primește 10 puncte, iar pentru fiecare problemă greșit rezolvată i se scad 2 puncte. Aflați câte probleme a rezolvat corect elevul situat pe locul I, dacă el a obținut 48 de puncte.

5. O gospodină ducea într-un coș la târg, spre vânzare, rațe și iepuri de casă: 5 capete și 14 picioare.

a) Câte rațe și câți iepuri erau în coș?

b) În total, câte picioare mergeau la târg?

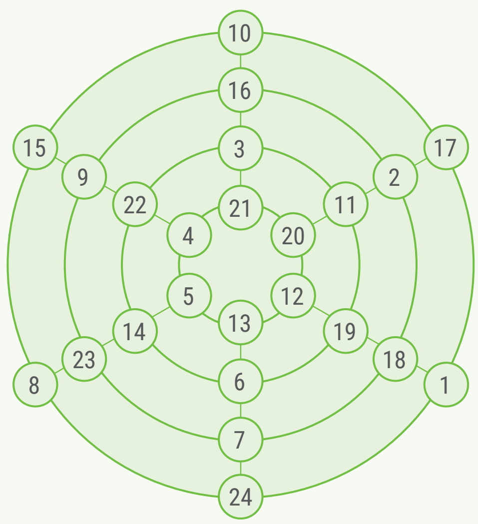
6. Un melc urcă spre vârful unui copac înalt de 16 metri. În fiecare zi însorită urcă 3 metri, iar în fiecare zi ploioasă *alunecă* înapoi un metru. După 8 zile ajunge în vârf.

a) Câte zile au fost însorite?

b) Cum a fost a opta zi?

Joc

Fă o ipoteză și descoperă-i magia!



Minitest

1. În ograda bunicilor sunt găini și iepuri: 20 de capete și 44 de picioare. Câte găini și câți iepuri au bunicii?

2 puncte

2. Se toarnă 90 de litri de apă în 13 sticle: unele cu capacitatea de 2 litri, iar altele cu capacitatea de 10 litri. Câte sticle sunt de fiecare fel?

2 puncte

3. La un concurs de matematică, un elev a avut de rezolvat 7 probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect elevul primește 4 puncte, iar pentru fiecare problemă greșit rezolvată i se scade 1 punct. Aflați câte probleme a rezolvat corect elevul situat pe locul I, dacă el a obținut 23 de puncte.

2 puncte

4. Tatăl lui Vlad a cumpărat 18 acțiuni: unele de la o fabrică textilă, cu 25 de euro bucata, și altele de la o fabrică de pâine, cu 12 euro bucata, plătind în total 346 de euro.
Câte acțiuni a cumpărat de fiecare fel?

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Evaluare

Metode aritmetice

Metoda reducerii la unitate • Metoda comparației • Metoda figurativă • Metoda mersului invers • Metoda falsei ipoteze

1. Numărul natural n din egalitatea $44 + n : 24 = 50$ este:

a) 144
b) 120
c) 6
d) 8

2. Numărul natural n din egalitatea $27 - (n \cdot 24 + 1) : 7 = 20$ este:

a) 5
b) 8
c) 6
d) 2

3. Dacă 4 cărți costă 60 de lei, atunci 6 cărți de același fel costă:

a) 40 lei
b) 20 lei
c) 90 lei
d) 80 lei

4. Dacă 4 robinete umplu un bazin în 60 de minute, atunci 6 robinete de același tip umplu bazinul în:

a) 40 min.
b) 20 min.
c) 90 min.
d) 80 min.

5. Trei jocuri puzzle și 4 rummy costă 250 de lei. Șase jocuri puzzle și 7 rummy costă 460 de lei. Un rummy costă:

a) 40 lei
b) 20 lei
c) 100 lei
d) 80 lei

6. Trei covrigi și 4 pâini cântăresc 2 300 g, iar 7 covrigi și 7 pâini cântăresc 4 200 g. Un covrig cântărește:

a) 40 g
b) 20 g
c) 100 g
d) 80 g

7. Într-o poieniță se jucau veverițe și vrăbiuțe, în total 15 capete și 50 de picioare. Numărul veverițelor este:

a) 7
b) 10
c) 8
d) 9

8. În 12 vase avem 71 de litri de apă. Unele vase au capacitatea de 3 litri, iar altele de 10 litri. Numărul vaselor de 3 litri este egal cu:

a) 7
b) 10
c) 8
d) 9

9. Împărțind un număr natural la un alt număr natural, obținem câtul 3 și restul 7. Să se afle cele două numere, știind că suma lor este egală cu 631.

10. Într-o clasă sunt 30 de elevi. Dacă lipsesc doi băieți, atunci numărul fetelor devine de trei ori mai mare ca al băieților. Câți băieți și câte fete erau în clasă?

11. În tabelul alăturat este prezentată oferta unui aprozar pentru câteva produse.

Produs	Prețul/1 kg
Roșii	5 lei
Castraveți	3 lei
Fasole lată	12 lei
Căpșuni	6 lei

Calculați suma de bani necesară achiziționării a 3 kg de roșii, 2 kg de castraveți, 2 kg de fasole lată și 3 kg de căpșuni.

12. Determinați numerele A, B, și C din tabelul de mai jos.

A	B
$94 + x = 100$ și $y : 17 = 6$	$A = 43 + 3x + 3y$
$56 - 28 : (x + 2) = 54$ și $(38 + y) \cdot 3 = 168$	$B = [152 - 5(x + y)]$
$28 \cdot (x + 235) = 6\,860$ și $y - 37 = 13$	$C = 300 - (5y - 3x)$

Eratostene din Cyrene (cca 276 – cca 195 î.H.) a fost un matematician, poet, atlet, geograf și astronom antic grec, care a aparținut Școlii din Alexandria (Egipt). A fost membru al Academiei din Alexandria, fiind considerat fondatorul geografiei matematice.

În aritmetică, a descoperit un procedeu de a găsi numerele prime, numit *ciurul lui Eratostene*, care presupune eliminarea numerelor compuse dintr-un tabel ce cuprinde în ordine numerele naturale nenule mai mari decât 1.

Astfel, primul număr diferit de 1, și anume 2, este prim; multiplii lui 2, numerele pare, sunt numere compuse și se elimină. Primul număr neeliminat după 2 este 3, care este prim, iar toți multiplii săi sunt numere compuse și se elimină de asemenea. Următorul număr rămas este 5, care este prim, iar toți multiplii săi se elimină și așa mai departe.

Κόσκινον Ἐρατοσθένους

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Unitatea
III

Divizibilitatea numerelor naturale

Domeniul de conținut:
NUMERE NATURALE

Lecția 1 Divizibilitatea numerelor naturale

1.1. Divizor. Multiplu

Mate practică

Dina vrea să planteze 120 de fire de flori în grădină. Vlad, ca un bun prieten, o ajută la proiectarea rondurilor.

Dina: Vlad, vreau să pun același număr de flori în fiecare rond. Și să am cel puțin patru ronduri.

Vlad: Sunt mai multe posibilități, Dina. Ai putea să îți organizezi grădina în 4, 5 sau 6 ronduri.

Poți face 4 ronduri, cu 30 de flori fiecare, deoarece $120 = 4 \cdot 30$. La fel, poți face 5 ronduri cu câte 24 de flori sau 6 ronduri cu câte 20 de flori, pentru că $120 = 5 \cdot 24 = 6 \cdot 20$.

Dina: Vlad, sunt și alte variante. Asta pentru că 120 poate fi scris ca produs de două numere naturale și astfel: $120 = 8 \cdot 15 = 10 \cdot 12$.

Ce observăm?

Soluțiile problemei sunt numerele naturale n pentru care 120 poate fi scris ca produsul dintre n și un alt număr natural. Altfel spus, numerele la care 120 se împarte exact (cu rest 0).

De reținut

Un număr natural a este divizibil cu numărul natural b dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$.

Numărul a se numește *multiplu* al numărului b, iar b se numește *divizor* al lui a.

Se folosesc scrierile matematice:

$a \,\vdots\, b$ – citim „a este divizibil cu b" sau $b \mid a$ – citim „b divide pe a".

Exemple

14 este divizibil cu 7, deoarece există numărul natural 2, astfel încât $14 = 7 \cdot 2$.

Scriem: $14 \,\vdots\, 7$ (14 – multiplu, 7 – divizor)

13 divide pe 143, deoarece există numărul natural 11, astfel încât $143 = 13 \cdot 11$.

Scriem: $13 \mid 143$ (13 – divizor, 143 – multiplu)

Observații

Numărul natural a este divizibil cu numărul natural nenul b dacă restul împărțirii lui a la b este 0.

Exemple:
1. 68 este divizibil cu 4, deoarece $68 : 4 = 17$, rest 0 (68 se împarte exact la 4).
2. 59 nu este divizibil cu 7, deoarece $59 : 7 = 8$, rest 3 (59 nu se împarte exact la 7).
3. 5 divide pe 100, deoarece $100 : 5 = 20$, rest 0.
4. 11 nu divide pe 79, deoarece $79 : 11 = 7$, rest 2.

1.2. Divizori comuni

Situație problemă

Pentru proiectul la geografie, Dina trebuie să confecționeze cel puțin trei planșe, folosind 40 de fotografii și 24 de decupaje din reviste. Ea ar vrea ca fiecare planșă să aibă aceeași combinație de fotografii și decupaje, utilizând toate materialele. Câte planșe poate realiza?

Analiză:

Numărul de planșe trebuie să se cuprindă exact atât în numărul de fotografii, cât și în numărul de decupaje, deci divide atât pe 40, cât și pe 24. Cu alte cuvinte, numărul de planșe este un *divizor comun* al numerelor 40 și 24.

Răspuns:

Divizorii lui 40 sunt: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 și 40.

Divizorii lui 24 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 și 24.

Divizorii comuni sunt 1, 2, 4 și 8, și, întrucât Dina are nevoie de cel puțin trei planșe, ar putea face fie 4, fie 8 planșe.

De reținut

Numărul natural d este un divizor comun a două sau mai multe numere naturale $a_1, a_2, \dots, a_n$ dacă d divide fiecare dintre numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Exemple:

1. 4 este divizor comun al numerelor 8 și 20, deoarece $4 \mid 8$ și $4 \mid 20$ (avem $8 = 4 \cdot 2$ și $20 = 4 \cdot 5$).
2. 9 este divizor comun al numerelor 27, 36 și 108, deoarece $27 = 9 \cdot 3$, $36 = 9 \cdot 4$ și $108 = 9 \cdot 12$.
3. 7 este un divizor comun al numerelor 0, 7 și 1 001, deoarece $0 = 7 \cdot 0$, $7 = 7 \cdot 1$ și $1\,001 = 7 \cdot 143$.
4. 3 nu este divizor comun al numerelor 9 și 14, deoarece 3 nu divide 14 (avem $14 : 3 = 4$, rest 2).

1.3. Multipli comuni

Mate practică

Vlad își organizează cele aproape 100 de DVD-uri cu filme în cutii egale ca dimensiune. Observă că, fără a lăsa vreun disc pe dinafară, acestea ar încăpea în cutii de câte 8 DVD-uri, sau în cutii mai mari, de câte 12 DVD-uri. Câte DVD-uri are Vlad?

Analiză:

Numărul de DVD-uri se împarte exact atât la 8, cât și la 12, adică este atât multiplu al lui 8, cât și multiplu de 12. El este un *multiplu comun* al numerelor 8 și 12.

Răspuns:

Multiplii lui 8 mai mici decât 100 sunt: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96.

Multiplii lui 12 mai mici decât 100 sunt: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84 și 96.

Multiplii comuni sunt 24, 28, 72 și 96 și, deoarece cunoaștem o estimare a numărului de DVD-uri — aproape 100, putem afirma că Vlad are 96 de DVD-uri.

De reținut

Numărul natural m este un multiplu comun a două sau mai multe numere naturale $a_1, a_2, \dots, a_n$, dacă m este divizibil cu fiecare dintre numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Exemple:

1. 48 este un multiplu comun al numerelor 8 și 6, deoarece $48 \vdots 8$ și $48 \vdots 6$ (avem $48 = 8 \cdot 6$).
2. 120 este un multiplu comun al numerelor 8, 12 și 30, deoarece $120 = 8 \cdot 15 = 12 \cdot 10 = 30 \cdot 4$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Eliza candidează pentru Consiliul Elevilor. Echipa ei, formată din Vlad și Dina, vrea să distribuie materialele de campanie: 60 de fluturași și 48 de insigne, la cel puțin 4 clase din școală.

a) La câte clase se pot împărți materialele, dacă fiecare clasă primește un set identic?

b) Care este cel mai mare număr de clase la care se pot distribui materialele și câte obiecte din fiecare fel va conține un set în acest caz?

Rezolvare:

a) Numărul de clase este un divizor comun al numerelor 60 și 48.

Divizorii lui 60 sunt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 și 60.

Divizorii lui 48 sunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 și 48.

Divizorii comuni sunt 1, 2, 3, 4, 6 și 12, deci, pentru a respecta condiția ca distribuirea să se facă la minim 4 clase, putem împărți materialele la 4 clase, la 6 clase sau la 12 clase.

b) Dacă materialele se distribuie la 12 clase (numărul maxim posibil), fiecărei clase îi va reveni un set compus din 5 fluturași și 4 insigne, deoarece $60 : 12 = 5$ și $48 : 12 = 4$.

2. Pe un circuit cu mașini teleghidate, mașina roșie face un tur complet în 15 secunde, iar mașina albastră în 18 secunde. Știind că pleacă în același timp, de câte ori se vor afla cele două mașini în același moment la linia de start de-a lungul unei curse care durează 7 minute?

Rezolvare:

Pentru fiecare mașină, timpul scurs după un număr complet de tururi este multiplu de timpul necesar parcurgerii unui tur.

Multiplii lui 15 sunt: 15, 30, 45, 60, 75, **90**, 105, 120,...
Multiplii lui 18 sunt: 18, 36, 54, 72, **90**, 108, 126,...
Ca urmare, cele două mașini se află din nou una lângă alta la start după 90 de secunde (cel mai mic dintre multipli comuni ai numerelor 15 și 18). Același lucru se va întâmpla și după $2 \cdot 90 = 180$ de secunde, și după $3 \cdot 90 = 270$ de secunde și așa mai departe.
Întrucât 7 minute au $7 \cdot 60 = 420$ de secunde și $420 : 90 = 4$, rest 60, rezultă că cele două mașini se vor întâlni la linia de start de 4 ori (după 90, 180, 270 și 360 de secunde).

3. Determinați numerele naturale n care verifică simultan relațiile $21 \mid (n+4)$ și $131 \le n \le 215$.

Rezolvare:
Cum 21 divide $n+4$, există un număr natural k astfel încât $n+4 = 21k$.
Din inegalitățile $131 \le n \le 215$ obținem $135 \le n+4 \le 219$, deci $135 \le 21k \le 219$.
Întrucât $135 : 21 = 6$, rest 9 și $215 : 21 = 10$, rest 5, rezultă $7 \le k \le 10$, deci $n+4$ poate lua valorile $21 \cdot 7 = 147$, $21 \cdot 8 = 168$, $21 \cdot 9 = 189$ sau $21 \cdot 10 = 210$.
Soluțiile problemei sunt: 143, 164, 185 și 206.

4. Demonstrați că numărul $N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \ldots + 2^{2017}$ se divide cu 3.

Rezolvare:

Grupând termenii sumei câte doi, putem scrie:

$$N = (2^0 + 2^1) + (2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5) + \ldots + (2^{2016} + 2^{2017}) =$$
$$= (1+2) + 2^2 \cdot (1+2) + 2^4 \cdot (1+2) + \ldots + 2^{2016} \cdot (1+2) =$$
$$= 3 + 2^2 \cdot 3 + 2^4 \cdot 3 + \ldots + 2^{2016} \cdot 3 =$$
$$= 3 \cdot (1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2016}).$$

Întrucât N se poate scrie ca produsul dintre 3 și un număr natural, N se divide cu 3.

Probleme propuse

1. Verificați dacă:
a) 16 este divizibil cu 4;
b) 30 este divizibil cu 5;
c) 27 este divizibil cu 13;
d) 42 se divide cu 7;
e) 22 se divide cu 4;
f) 72 se divide cu 9;
g) 7 divide pe 65;
h) 10 divide pe 90;
i) 6 divide pe 0.

2. Scrieți toți divizorii numărului:
a) 5; b) 16; c) 23; d) 27; e) 28;
f) 33; g) 42; h) 63; i) 64; j) 80.

3. a) Scrieți multiplii numerelor 4, 6 și 9, cuprinși între 21 și 77.
b) Scrieți multiplii numerelor 7, 15 și 29, mai mari decât 19 și mai mici decât 98.

4. a) Arătați că 18 este un divizor al lui 108 și un multiplu al lui 6.
b) Arătați că 91 este un divizor al lui 2184, dar nu este un multiplu al lui 21.
c) Arătați că $11 \cdot 12$ este un multiplu al lui $2 \cdot 3$, dar nu este un divizor al lui $22 \cdot 33$.

5. a) Aflați divizorii lui 34 și determinați numerele naturale n știind că 34 este divizibil cu $3n - 1$.
b) Aflați divizorii lui 98 și determinați numerele naturale n știind că $5n - 1$ divide 98.

6. a) Determinați numerele naturale m pentru care $m + 1$ este multiplu de 7 și $34 \le m \le 69$.
b) Determinați numerele naturale n pentru care 45 este un divizor al lui $2n + 1$ și $0 \le n \le 89$.

7. Fie a, b, c trei numere naturale.
a) Dacă $x = 35 \cdot a + 63 \cdot b$, arătați că x este divizibil cu 7.
b) Dacă $u = 5 \cdot a + 3 \cdot b + 2 \cdot c$ și $v = 4 \cdot a + 6 \cdot b + 7 \cdot c$, arătați că $u + v$ este multiplu de 9.

8. a) Restul împărțirii numărului natural a la 12 este 9. Arătați că a se divide cu 3.
b) Restul împărțirii numărului natural b la 57 este 38. Arătați că b se divide cu 19.

9. Arătați că $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2003} + 3^{2016}$ este divizibil cu 4.

10. a) Aflați divizorii comuni ai numerelor 60 și 72. Precizați care este cel mai mare dintre divizorii comuni ai celor două numere.
b) Aflați multiplii comuni ai numerelor 9 și 12, mai mici decât 121. Precizați cel mai mic multiplu comun nenul al celor două numere.

11. Luca pregătește pachete pentru o petrecere. Baloanele se vând în seturi de câte 18, fluierele în seturi de câte 12 și coifurile în seturi de câte 8. Câte seturi din fiecare ar trebui să cumpere Luca pentru a putea pune în fiecare pachet un număr egal de baloane, fluiere și coifuri?

12. Bogdan și Corina parcurg un circuit oval: Bogdan cu bicicleta, Corina cu rolele. Bogdan face un tur în 9 minute, Corina face un tur în 12 minute. Dacă pleacă în același timp, aflați câte tururi efectuează fiecare până când se întâlnesc din nou la linia de start.

13. La intrarea într-un parc de distracții, fiecare vizitator primește câte un săculeț cadou, unii conținând și câte un mic cadou. Diana observă anunțul afișat.
a) Arătați că dacă un vizitator primește rucsac, atunci primește și insignă.
b) Cât de des va conține săculețul cadou insignă și tricou? Dar insignă și ochelari de soare?
c) Câți vizitatori din primii 1 000 primesc toate cele patru obiecte cadou?

Ofertă promoțională!

insignă	din 4 în 4 vizitatori
tricou	din 9 în 9 vizitatori
ochelari de soare	din 15 în 15 vizitatori
rucsac	din 24 în 24 vizitatori

14. Matei vrea să trimită prin curier 12 DVD-uri cu filme de comedie, 24 cu desene animate și 30 cu concerte de muzică, împachetate în cutii identice, astfel încât în fiecare cutie să se afle DVD-uri cu același tip de conținut. Care este cel mai mic număr de cutii de care are nevoie?

15. Olimpia are 30 de portocale, 24 de piersici și 18 pere. Ea vrea să pună fructele în coșuri astfel încât fiecare coș să aibă același număr de fructe, toate de același fel.
a) Poate pune Olimpia câte trei fructe în fiecare coș? Dar câte patru fructe?
b) Care este cel mai mare număr de fructe care ar putea fi puse într-un coș? De câte coșuri are Olimpia nevoie în acest caz?

16. Tabelul alăturat prezintă numărul elevilor din corul școlii. Profesorul dorește să îi așeze în rânduri egale numeric, astfel încât să fie îndeplinite două condiții:
a) pe fiecare rând să se afle fie numai băieți, fie numai fete, indiferent de la ce clasă provin;
b) numărul total de rânduri să fie mai mic decât numărul elevilor de pe un rând.
Determinați numărul elevilor de pe fiecare rând și numărul rândurilor.

Clasa	a V-a A	a V-a B	a V-a C	a V-a D
Fete	7	8	12	9
Băieți	6	7	3	8

Minitest

1. Verificați dacă:
a) 75 este divizibil cu 15; b) 80 îl divide pe 40; c) 6 divide pe 96;
d) 42 este multiplu de 7; e) 26 este divizor al lui 13; f) 49 se divide cu 7.
3 puncte

2. a) Determinați câte numere de forma $\overline{4a}$ sunt divizibile cu 3.
b) Aflați câți multipli de 6 conține secvența 24, 30, 36, 42, …, 84, 90.
2 puncte

3. Două proiectoare de scenă pornesc în același timp. Unul clipește o dată la 7 secunde, celălalt o dată la 5 secunde. De câte ori vor clipi simultan cele două proiectoare în 10 minute?
2 puncte

4. La radio *Mate Fun* o campanie promoțională oferă fiecărui al doisprezecelea ascultător care sună o invitație la un concert, iar fiecărui al 28-lea o plimbare cu limuzina. Câți dintre primii 1 000 de ascultători primesc ambele premii?
2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 2 Criterii de divizibilitate

2.1. Criteriile de divizibilitate cu 2, 5, 10, 10^n

Mate practică

La campionatul de fotbal între școli, fiecare echipă gazdă, vinde în loc de bilete, carduri cadou.
Din vânzarea cardurilor s-au strâns următoarele fonduri:

Etapa	Vulturii	Șoimii	Cocoșii de munte
Suma (lei)	720	575	628

Cum putem afla ce valoare are fiecare dintre cele trei carduri?

Dina: Deoarece $720 = 72 \cdot 10$, numărul 720 este divizibil cu 10.

Vlad: Corect! De fapt, dacă înmulțim un număr cu 10, ultima cifră a produsului este 0, deci un număr se divide cu 10 doar dacă ultima cifră a sa este 0. Așadar numerele 575 și 628 nu sunt divizibile cu 10, deci cardul pentru parcul de distracții este al vulturilor.

Dina: Atunci e simplu! Separând unitățile, fiecare număr natural se scrie ca suma dintre un număr întreg de zeci și ultima sa cifră, pentru că aceasta reprezintă numărul de unități. Cum zecile se pot împărți și în grupe de câte două și de câte cinci, rămâne de analizat ultima cifră.

Vlad: Putem organiza cele 8 unități ale numărului 628 în grupe de câte două, dar nu și de câte 5, deci 628 este divizibil cu 2, dar nu și cu 5. Așadar echipa cocoșilor a oferit cardurile verzi!

Dina: Iar șoimii au dat biletele pentru cinema, pentru că unitățile lui 575 formează o grupă de 5, dar nu pot fi împărțite în grupe de câte 2, deci 575 este divizibil cu 5, dar nu și cu 2!

Ce observăm?

Pentru a verifica divizibilitatea unor numere cu 2, 5 sau 10, nu este neapărat nevoie să efectuăm împărțirile, ci este suficient să studiem ultima cifră a numărului respectiv. De exemplu, am observat că 628 se divide cu 2 pentru că ultima sa cifră se divide cu 2.

O metodă prin care putem indica dacă un număr se divide printr-un alt număr fără a efectua împărțirea se numește *criteriu de divizibilitate*.

De reținut

Criteriul de divizibilitate cu 2
Un număr natural este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este 0, 2, 4, 6 sau 8 (o cifră pară).

Criteriul de divizibilitate cu 5
Un număr natural este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5.

Criteriul de divizibilitate cu 10
Un număr natural este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este 0.

Criteriul de divizibilitate cu 10^n ($n \geq 1$)
Un număr natural este divizibil cu 10^n dacă ultimele sale n cifre sunt egale cu 0.

Pentru $n = 2$, respectiv $n = 3$, rezultă că:
- un număr natural este divizibil cu 100 dacă ultimele două cifre ale sale sunt egale cu 0;
- un număr natural este divizibil cu 1 000 dacă ultimele trei cifre ale sale sunt egale cu 0.

Exemple

1. Se consideră numerele: 48, 73, 90, 115, 224, 349, 401, 636, 777, 875, 1 002. Dintre acestea:
   - numerele divizibile cu 2 sunt: 48, 90, 224, 636 și 1 002;
   - numerele divizibile cu 5 sunt: 90, 115 și 875.
   - numerele 73, 349, 401 și 777 nu sunt divizibile nici cu 2, nici cu 5.
2. Numerele 400, 1 010, 3 400, 12 000 și 40 910 sunt divizibile cu 10, deoarece ultima lor cifră este 0. Dintre acestea, numerele 400, 3 400 și 12 000 sunt divizibile și cu 100, deoarece au ultimele două cifre egale cu 0, iar 12 000 este divizibil cu 1 000, întrucât ultimele trei cifre ale sale sunt 0.

2.2. Criteriile de divizibilitate cu 3 și cu 9

De reținut

Criteriul de divizibilitate cu 3

Un număr natural este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3.

Criteriul de divizibilitate cu 9

Un număr natural este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 9.

Exemple

1. Numărul natural 6498 are suma cifrelor $6+4+9+8=27$, deci 6498 se divide și cu 3, și cu 9.
2. 741 este multiplu de 3, dar nu este multiplu de 9, deoarece suma cifrelor sale este $7+4+1=12$, care se divide cu 3, dar nu se divide cu 9.
3. 3 nu este un divizor al numărului 9085, întrucât suma cifrelor numărului 9085 este 22, care nu este divizibil cu 3. Evident, 9085 nu este nici multiplu de 9.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați cifrele a și b, știind că numărul $\overline{7ab}$ este divizibil cu 10, iar numărul $\overline{a4b}$ este divizibil cu 9.

Rezolvare:

Numărul $\overline{7ab}$ este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este 0, deci $b=0$. Apoi, $\overline{a5b}$ este divizibil cu 9 dacă suma cifrelor sale, adică $a+5+b$, este și ea divizibilă cu 9. Obținem că 9 divide $a+5$, deci $a=4$.

2. Arătați că numărul 10^n+461 este divizibil cu 3, pentru orice valoare a numărului natural n.

Rezolvare:

Dacă $n \geq 3$, atunci numărul 10^n are cel puțin patru cifre, deci $10^n+461=10\ldots0461$, unde cifra 0 apare de $n-3$ ori. Suma cifrelor acestui număr este 12, deci 10^n+461 se divide cu 3, pentru orice $n \geq 3$. Verificăm valorile rămase: dacă $n=0$: $10^0+461=462$; pentru $n=1$: $10^1+461=471$; pentru $n=2$: $10^2+461=561$. Numerele 462, 471 și 561 sunt toate divizibile cu 3, având suma cifrelor 12, deci 10^n+461 este divizibil cu 3, pentru orice număr natural n.

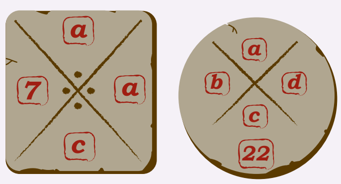
3. În tabăra de arheologie, Vlad și Dina încearcă să descifreze tăblițele alăturate, pe care este inscripționat codul $\overline{abcd}$, format din patru cifre. Studiind detaliile, ei află că:

a) a și d sunt egale;

b) suma lor este egală cu 22;

c) numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 2.

Ajutați-i să descopere codul! Aflați toate posibilitățile!



Rezolvare:

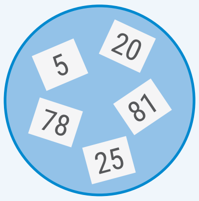
Comparând imaginile, rezultă că $b=7$. Deoarece $\overline{abcd}$ se divide cu 2, d este cifră pară, deci d poate fi 2, 4, 6, 8 (d nu poate fi 0, deoarece $d=a$). Dacă $a=d=2$, atunci $2+7+c+2=22$, de unde $c=11$, care nu este cifră. Pentru $a=d=4$ se obține $c=7$, iar pentru $a=d=6$ se găsește $c=3$. Dacă $a=d=8$, s-ar obține $23+c=22$, imposibil. Așadar, sunt două soluții posibile: 4774 și 6736.

Probleme propuse

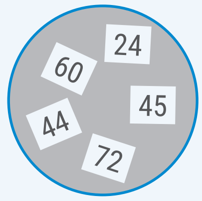
1. Copiați tabelul următor pe caiet și completați-l, folosind semnele (✓) și (×)

Numărul	10	36	40	135	300	978	2400	22500
divizibil cu 2	✓	…	…	×	…	…	…	…
divizibil cu 3	…	✓	×	…	…	…	…	…
divizibil cu 5	✓	…	…	…	✓	×	…	✓
divizibil cu 9	…	…	…	✓	…	…	…	…
divizibil cu 10	…	×	…	…	…	…	✓	…

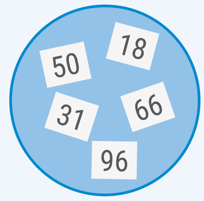
2. Vlad, Dina, Eliza și Luca au ales, la întâmplare, câte un set de 5 bilețele, pe care sunt scrise numere de la 1 la 100.



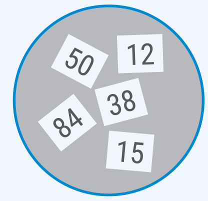
Vlad



Eliza



Dina



Luca

Aplicând criteriile de divizibilitate, identificați:

a) numerele divizibile cu 2 din setul lui Luca;
b) multiplii lui 5 din setul lui Vlad;
c) multiplii de 3, dar nu de 9 din setul Elizei;
d) numerele divizibile cu 9 din setul Dinei;
e) numerele din seturile băieților care se divid și cu 2, și cu 3;
f) multiplii de 3 și de 5 din seturile fetelor.

3. Folosind cifrele 0, 1, 5, 6 și 9 se formează numere de trei cifre distincte. Scrieți numerele care verifică proprietățile indicate:

a) sunt divizibile cu 5, dar nu cu 10;
b) au prima cifră 9 și se divid cu 2;
c) se divid cu 3, dar nu cu 2;
d) se divid și cu 5, și cu 3.

4. Știind că a și b sunt cifre distincte, determinați numerele divizibile cu 10 de forma:

a) $\overline{12a}$; b) $\overline{a4b}$; c) $\overline{63a0}$; d) $\overline{9ab}$.

Rezolvare: d) Un număr este divizibil cu 10 dacă ultima sa cifră este 0. Așadar, $\overline{9ab}$ este divizibil cu 10 dacă $b = 0$. Cum a poate lua orice valoare (dar diferită de b), numerele căutate sunt 910, 920, 930, 940, 950, 960, 970, 980, 990.

5. Scrieți toate numerele divizibile cu 2 de forma:

a) $\overline{19a}$; b) $\overline{5aa}$; c) $\overline{7a8}$; d) $\overline{a0a}$.

6. Aflați toate numerele divizibile cu 5 de forma:

a) $\overline{74a}$; b) $\overline{8a0}$; c) $\overline{4a2a}$; d) $\overline{a5ab}$.

7. Scrieți toate numerele divizibile cu 3 de forma:

a) $\overline{7a5}$; b) $\overline{98a}$; c) $\overline{4a8a}$; d) $\overline{a45a}$.

Rezolvare: b) Dacă numărul $\overline{98a}$ este divizibil cu 3, atunci suma cifrelor sale este divizibilă cu 3. Așadar, 3 divide $17 + a$, relație care este verificată de $a = 1$, $a = 4$ și $a = 7$. Numerele căutate sunt 981, 984 și 987.

8. Determinați numerele naturale divizibile cu 9, de forma:

a) $\overline{15a}$; b) $\overline{2a9}$; c) $\overline{333a}$; d) $\overline{12ab0}$.

9. Determinați cifra x pentru care următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $\overline{44x} \vdots 10$; b) $\overline{88x} \vdots 3$; c) $\overline{29x} \vdots 5$; d) $\overline{65xx}$ se divide cu 2;
e) $9 \mid \overline{30x}$; f) $3 \mid \overline{407x}$; g) $100 \mid \overline{780x}$; h) 9 divide pe $\overline{45x2}$.

10. a) Determinați numerele de forma $\overline{87ab}$ divizibile cu 2 și care au suma cifrelor egală cu 29.

b) Aflați numerele de forma $\overline{aa97b}$ divizibile cu 5 și care au suma cifrelor egală cu 22.

c) Determinați numerele de forma $\overline{45abc}$ divizibile cu 10 și care au suma cifrelor egală cu 11.

11. a) Determinați toate numerele de forma $\overline{7ab}$ care se divid simultan cu 3 și 10.

b) Scrieți toate numerele de forma $\overline{9a6b}$ care sunt atât multipli de 3, cât și multipli de 5.

c) Aflați numerele de forma $\overline{a26ab}$ divizibile atât cu 2, cât și cu 9.

Indicație:

b) Dacă $\overline{9a6b}$ se divide cu 5, atunci ultima sa cifră este 0 sau 5.

Dacă $b = 0$, numărul capătă forma $\overline{9a60}$; suma cifrelor sale este $15 + a$, care se divide cu 3 dacă a este una din cifrele 0, 3, 6 sau 9. Se obțin soluțiile 9 060, 9 360, 9 660, 9 990.

Studiați în continuare cazul $b = 5$ și finalizați problema!

12. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $A = 2 \cdot 6^n + 7 \cdot 4^n + 1$ se divide cu 5.

Gândire critică

Analizați cu atenție explicațiile de mai jos:

Împărțind numerele 10, 100, 1 000 etc., atât la 3, cât și la 9, se obține de fiecare dată restul 1:

10 : 3 = 3, rest 1	10 : 9 = 1, rest 1
100 : 3 = 33, rest 1	100 : 9 = 11, rest 1
1 000 : 3 = 333, rest 1	1 000 : 9 = 111, rest 1

Împărțirile cu rest arată că din fiecare 10, 100 sau 1 000 de obiecte putem da unul la o parte pentru a forma atât grupe de câte 3 cât și grupe de câte 9 obiecte.

Atunci, dacă după formarea grupelor de câte 3 sau de câte 9, din 10, 100 sau 1 000 de obiecte rămâne unul, înseamnă că din 20, din 200 sau 2 000 rămân 2 obiecte negrupate (rest), din 70 sau 700 rămân 7 obiecte negrupate și tot așa.

Să analizăm ce se întâmplă cu 2 745 de obiecte, respectiv cu 3 965 de obiecte:

$\boxed{2\,748}$

$2 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8$

$\boxed{2}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ $\boxed{8}$

obiecte negrupate: $2 + 7 + 4 + 8 = 21$

21 este divizibil cu 3 → 2 748 este divizibil cu 3

21 nu se divide cu 9 → 2 748 nu se divide cu 9

$\boxed{3\,965}$

$3 \cdot 1\,000 + 9 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 5$

$\boxed{3}$ $\boxed{9}$ $\boxed{6}$ $\boxed{5}$

obiecte negrupate: $3 + 9 + 6 + 5 = 23$

23 : 3 = 7, rest 2 → restul împărțirii lui 3 965 la 3 este 2

23 : 9 = 2, rest 5 → restul împărțirii lui 3 965 la 9 este 5

Sarcini de grup

1. Argumentați valabilitatea afirmațiilor:

a) Restul împărțirii unui număr natural n la 3 este egal cu restul împărțirii sumei cifrelor lui n la 3.

b) Restul împărțirii unui număr natural n la 9 este egal cu restul împărțirii sumei cifrelor lui n la 9.

2. Exemplificați, prin câte 5 exemple, afirmațiile de mai sus.

3. Creați un model asemănător pentru a justifica afirmația:
Restul împărțirii unui număr natural n la 5 este egal cu restul împărțirii la 5 a ultimei cifre a lui n.

4. Lucrând pe echipe, fără a efectua împărțirile, stabiliți ce rest dau numerele 415, 611, 503, 937, 746, 2 017, dacă le împărțim, pe rând, la:

a) 2; b) 3; c) 5; d) 9.

Minitest

1. Se consideră numerele naturale 28, 35, 49, 120, 1 294, 2 373, 5 401, 145 340, 225 035.
Dintre aceste numere stabiliți care sunt:

a) divizibile cu 2; b) divizibile cu 5; c) divizibile cu 3.

3 puncte

2. Un stadion are 6 135 de locuri pe scaune. Administratorul stadionului dorește ca scaunele să fie colorate, astfel încât să aibă același număr de scaune de fiecare culoare. Fără a efectua calculele, decideți dacă acest lucru este posibil folosind:

a) 5 culori; b) 10 culori; c) 3 culori; d) 9 culori.

2 puncte

3. Numărul $N = \overline{a68a}$ este divizibil cu 5. Arătați că N este divizibil cu 3.

2 puncte

4. Determinați multiplii de 3 de forma $\overline{123ab}$ care sunt, în același timp, și multipli de 10.

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 3 Numere prime. Numere compuse

3.1. Numere prime. Numere compuse

Situații problemă

Profesorul de matematică le propune elevilor clasei a V-a următoarea activitate în perechi: să scrie divizorii tuturor numerelor de la 1 la 20 și, atunci când este posibil, să exprime aceste numere ca produs al cât mai multor numere naturale diferite de 1.

Vlad și Dina rezolvă sarcina primită în următoarele tabele:

Numărul	Divizorii	Exprimarea ca produs
1	1	–
2	1, 2	–
3	1, 3	–
4	1, 2, 4	$2 \cdot 2$
5	1, 5	–
6	1, 2, 3, 6	$2 \cdot 3$
7	1, 7	–
8	1, 2, 4, 8	$2 \cdot 2 \cdot 2$
9	1, 3, 9	$3 \cdot 3$
10	1, 2, 5, 10	$2 \cdot 5$

Numărul	Divizorii	Exprimarea ca produs
11	1, 11	–
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	$2 \cdot 2 \cdot 3$
13	1, 13	–
14	1, 2, 7, 14	$2 \cdot 7$
15	1, 3, 5, 15	$3 \cdot 5$
16	1, 2, 4, 8, 16	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
17	1, 17	–
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	$2 \cdot 3 \cdot 3$
19	1, 19	–
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	$2 \cdot 2 \cdot 5$

Ce observăm?

Fiecare dintre numerele naturale 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sau 19 admite doar doi divizori: pe 1 și pe el însuși. Cu excepția lui 1, celelalte numere (4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20) au cel puțin trei divizori și se pot exprima ca produs de cel puțin două numere naturale mai mari decât 1.

De reținut

Un număr natural diferit de 1 care are ca divizori numai pe 1 și pe el însuși se numește *număr prim*.

Numerele naturale diferite de 1 care nu sunt prime se numesc numere *compuse*.

Numărul natural 1 nu este *nici prim*, *nici compus*, deoarece admite un singur divizor.

Singurul număr prim par este 2. Toate numerele prime mai mari ca 2 sunt impare.

Se observă că numerele prime sunt cele care au exact doi divizori (divizori *improprii*), iar un număr este compus dacă are cel puțin trei divizori (altfel spus, admite cel puțin un divizor *propriu*).

Exemple

Din studiul efectuat mai sus pentru numerele de la 1 la 20, se constată că:

1. Numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 și 19 sunt prime.
2. Numerele 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 și 20 sunt numere compuse.
3. Numerele compuse mai mici sau egale cu 20 se pot scrie ca produs de două sau mai multe numere prime, nu neapărat distincte.

3.2. Recunoașterea numerelor prime

Observații

Numerele prime mai mici decât 20 sunt 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 și 19. Este ușor de verificat că aceste numere nu se divid prin numere mai mici decât ele. Pentru numere mai mari, efectuarea tuturor împărțirilor poate crește foarte mult volumul calculelor. De aceea, pentru a stabili dacă un număr este prim sau nu, vom proceda astfel:

- împărțim, pe rând, numărul dat la toate numerele prime mai mici decât el, în ordine crescătoare, până când câtul devine mai mic decât împărțitorul;

- dacă la toate împărțirile se obține rest nenul, numărul dat este prim;
- în caz contrar, el este număr compus, deoarece, dacă o împărțire se efectuează exact, atunci împărțitorul este divizor propriu al numărului dat.

Exemple

$71 : 2 = 35$, rest 1
$71 : 3 = 23$, rest 2
$71 : 5 = 14$, rest 1
$71 : 7 = 10$, rest 1
$71 : 11 = 6$, rest 5
$6 < 11$
71 este număr prim

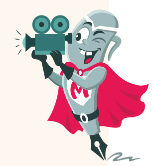
$157 : 2 = 78$, rest 1
$157 : 3 = 52$, rest 1
$157 : 5 = 31$, rest 2
$157 : 7 = 22$, rest 3
$157 : 11 = 14$, rest 3
$157 : 13 = 12$, rest 1
$12 < 13$
157 este număr prim

$221 : 2 = 110$, rest 1
$221 : 3 = 73$, rest 2
$221 : 5 = 44$, rest 1
$221 : 7 = 31$, rest 4
$221 : 11 = 20$, rest 1
$221 : 13 = 17$, rest 0
221 este număr compus
$221 = 13 \cdot 17$

Observații

1. Numerele prime până la 100 sunt:

2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61
	67	71	73	79	83	89	97	



2. În loc de împărțiri, putem aplica, acolo unde este cazul, criteriile de divizibilitate. Spre exemplu, considerând numărul 467, acesta nu este divizibil cu 2 sau cu 5, deoarece ultima sa cifră nu este nici pară, nici egală cu 5. În plus, suma cifrelor lui 467 este 17, care nu se divide cu 3, deci 467 nu este divizibil cu 3. În continuare, efectuând împărțiri, constatăm că:

$467 : 7 = 66$, rest 5 $\quad$ $467 : 11 = 42$, rest 5 $\quad$ $467 : 13 = 35$, rest 12
$467 : 17 = 27$, rest 8 $\quad$ $467 : 19 = 24$, rest 11 $\quad$ $467 : 23 = 20$, rest 7

La ultima împărțire, am obținut câtul mai mic decât împărțitorul, deci 467 este număr prim.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați numerele prime a și b, cu $a < b$, știind că suma lor este 2019.

Rezolvare:
Suma numerelor a și b este un număr impar, deci unul dintre numere este par, iar celălalt număr este impar. Întrucât singurul număr prim par este 2, rezultă $a = 2$. Efectuând diferența, se obține $b = 2017$. Se verifică, prin împărțiri, că 2017 este număr prim, deci soluția problemei este $a = 2$, $b = 2017$.

2. Verificați dacă există numere prime a, b, c care îndeplinesc simultan condițiile:
i) $a - b = 41$; $\quad$ ii) $a + b + c = 180$.

Rezolvare:
Dacă ar exista două numere prime care verifică relația i), atunci din $a - b = 41$ și 41 număr impar, rezultă că unul dintre numerele a și b este par și, fiind prim, este egal cu 2. Ca urmare, $b = 2$ (scăzătorul este mai mic decât descăzutul) și atunci $a = 43$, care este prim. Înlocuind $a = 43$ și $b = 2$ în egalitatea $a + b + c = 180$, se obține $c = 135$, care nu este număr prim, fiind divizibil cu 5. Așadar, nu există numere prime care să verifice condițiile date.

Probleme propuse

1. Verificați că următoarele numere naturale sunt prime:
a) 241; b) 317; c) 179; d) 421; e) 521; f) 617.

2. Indicați câte un divizor propriu pentru a arăta că următoarele numere sunt compuse:
a) 219; b) 117; c) 675; d) 308; e) 299; f) 731.

3. Aflați cifrele *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* pentru care următoarele numere sunt prime:
a) $\overline{4a}$; b) $\overline{7b}$; c) $\overline{c3}$; d) $\overline{10d}$; e) $\overline{21e}$; f) $\overline{f17}$.

4. Înlocuiți literele cu cifre pentru a obține numere compuse:
a) $\overline{5a}$; b) $\overline{4b}$; c) $\overline{6c}$; d) $\overline{d1}$; e) $\overline{11e}$; f) $\overline{2ff}$.

5. Exprimați următoarele numere ca suma, diferența sau produsul a două numere prime, după caz:
a) $30 = \square + \square$; b) $22 = \square + \square$; c) $46 = \square - \square$;
d) $26 = \square - \square$; e) $77 = \square \cdot \square$; f) $39 = \square \cdot \square$.
Rezolvare: a) $30 = 13 + 17$.

6. Scrieți următoarele numere ca suma, diferența sau produsul a două numere compuse, după caz:
a) $31 = \square + \square$; b) $13 = \square - \square$; c) $36 = \square \cdot \square$;
d) $38 = \square + \square$; e) $23 = \square - \square$; f) $84 = \square \cdot \square$.
Rezolvare: a) $31 = 25 + 6$.

7. a) Suma dintre un număr prim și un număr par este egală cu 15. Determinați cele două numere.
b) Suma a două numere prime este 75. Determinați cele două numere.
c) Diferența a două numere prime este 41. Determinați cele două numere.
d) Produsul a două numere prime este 85. Determinați cele două numere.

8. a) Determinați numerele prime *a* și *b*, care verifică relația $5a + 12b = 89$.
b) Determinați numerele prime *a* și *b* știind că $15a + 3b = 180$.
c) Determinați numerele prime *a*, *b*, *c* știind că $6a + 2b + 9c = 99$.

9. a) Determinați numărul natural *n* știind că $A = (n+1)(n+13)$ este număr prim.
b) Determinați numărul natural *n* știind că $B = n^2 + 30n$ este număr prim.
c) Determinați numărul natural n știind că $C = n^2 - 6n$ este număr prim.

Indicație: a) Dacă *A* este prim, divizorii săi sunt 1 și *A*. Cum $n + 1 < n + 13$, rezultă că $n + 1 = 1$.

10. Arătați că numerele următoare sunt compuse pentru orice valoare a numărului natural *n*:
a) $A = 6^n + 3^n + 2^n + 1$; b) $B = 15^n + 5^{n+1} + 3^n + 5$.

11. Determinați numerele naturale *n* pentru care fiecare dintre numerele $n + 1$, $n + 11$ și $n + 27$ este număr prim.

Temă de proiect

Numărul natural 6 este numit *număr perfect* deoarece el este egal cu suma tuturor divizorilor săi mai mici decât el însuși. Astfel, divizorii lui 6 sunt 1, 2, 3, 6 și are loc egalitatea: $1 + 2 + 3 = 6$.

1. Aflați un alt număr perfect.

2. Pot fi numerele prime numere perfecte? Explicați!

3. Folosiți internetul sau biblioteca pentru a defini alte două tipuri de numere:
a) numere deficiente; b) numere abundente.

Discutați în clasă rezultatele găsite.

Minitest

1. Verificați că:
a) 137 este număr prim; b) 187 este număr compus; c) 263 este număr prim.
3 puncte

2. a) Determinați câte numere prime de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 3.
b) Aflați câte numere compuse de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 5.
2 puncte

3. Determinați numerele prime *a*, *b*, *c* știind că $2a + 7b + 6c = 78$.
2 puncte

4. Aflați numerele prime *m*, *n*, *p* pentru care $m \cdot n = 28 - p$.
2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Evaluare

Divizor; multiplu; divizori comuni; multipli comuni • Criterii de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9 • Numere prime; numere compuse

1. Un divizor propriu al lui 72 este egal cu:
a) 72
b) 9
c) 5
d) 1

2. Un multiplu nenul al lui 15 este egal cu:
a) 25
b) 35
c) 50
d) 45

3. Care dintre următoarele numere au pe 9 ca divizor:
a) 123
b) 246
c) 468
d) 680

4. Care dintre următoarele numere nu este multiplu al lui 3?
a) 1 209
b) 2 340
c) 6 309
d) 7 913

5. Un multiplu comun al numerelor 12 și 18 este egal cu:
a) 48
b) 72
c) 24
d) 60

6. Care dintre următoarele două numere au ca divizor comun pe 5?
a) 20 și 37
b) 45 și 15
c) 25 și 32
d) 84 și 35

7. Care dintre următoarele numere este număr compus?
a) 17
b) 43
c) 75
d) 31

8. Care dintre următoarele numere este număr prim?
a) 91
b) 29
c) 85
d) 39

9. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (A) și care este fals (F).

Orice număr natural de forma $\overline{aa}$ este număr compus.
Există două numere compuse a căror sumă este un număr prim.
Suma divizorilor improprii ai lui 12 este 13.

10. Asociați fiecare literă din coloana **A** cu cifra din coloana **B** corespunzătoare răspunsului corect.

A	B
a) 15 este divizor al lui n b) 18 este multiplu al lui n c) 12 este divizor propriu al lui n	1. $n = 36$ 2. $n = 45$ 3. $n = 12$ 4. $n = 9$

11. Asociați fiecărui număr din coloana **A** un divizor al său din coloana **B**.

A	B
36 45 84	2 9 5 3

12. Asociați fiecărui număr din coloana **A** un multiplu al său din coloana **B**.

A	B
2 3 5	80 39 75 37

13. Determinați numerele prime a și b care verifică relația $3a + 5b = 36$.

14. Restul împărțirii numărului natural n la 24 este egal cu 15. Arătați că numărul natural n este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 2.

Noțiunea de fracție (care provine din cuvântul latinesc *fractio* = a rupe, a sparge în bucăți) a fost folosită de egipteni încă din anul 1800 î.H. Orice fracție semnifica o anumită parte a unui întreg, astfel încât fracțiile egiptenilor aveau numărătorul 1, iar orice altă fracție în înțelesul de azi al termenului era exprimată printr-o sumă de fracții cu numărătorul 1.

O formă de scriere a fracțiilor apropiată de cea actuală se folosea în lucrările matematicienilor indieni Aryabhatta (500 d.H.), Brahmagupta (628 d.H.) și Bhaskara (1150 d.H.), care scriau fracțiile ca perechi de două numere naturale puse unul sub altul, dar fără linia de fracție. Aceasta a fost introdusă de arabi, fiind întâlnită pentru prima dată în opera matematicianului arab Al-Hassār (1200 d.H.) și preluată în Europa de Leonardo Fibonacci.

Unitatea
IV
Fracții ordinare

Domeniul de conținut:
NUMERE. ORGANIZAREA DATELOR

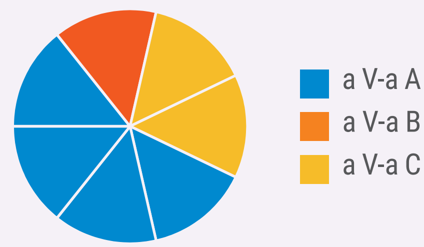
IV Fracții ordinare

Lecția 1 Fracții ordinare. Fracții echivalente. Procente

1.1. Fracții ordinare

Mate practică

În *Săptămâna legumelor și fructelor donate*, elevii clasei a V-a B au donat morcovi. Elevii clasei a V-a C au donat cartofi, în cantitate dublă față de morcovi, iar elevii clasei a V-a A mere, în cantitate dublă față de cartofi. Diagrama alăturată arată, comparativ, cantitățile strânse.



Aflați cât reprezintă contribuția fiecărei clase din cantitatea totală.

Dina: Cantitatea totală se poate împărți în 7 părți egale, întrucât, dacă morcovii reprezintă o parte, atunci cartofii, fiind în cantitate dublă, reprezintă două părți, iar merele patru părți.

Vlad: Atunci putem da răspunsul sub formă de fracții, așa cum am învățat în clasa a IV-a: morcovii donați de clasa a V-a B reprezintă $\frac{1}{7}$ din total, cartofii $\frac{2}{7}$, iar merele $\frac{4}{7}$.

De reținut

O parte dintr-un întreg împărțit în părți de mărimi egale se numește *unitate fracționară*.

O *fracție ordinară* (numită, pe scurt, *fracție*) reprezintă una sau mai multe din părțile de mărimi egale în care a fost împărțit un întreg, adică una sau mai multe unități fracționare.

O fracție se reprezintă printr-o pereche de numere naturale, *a* și *b*, cu $b \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{a}{b}$.

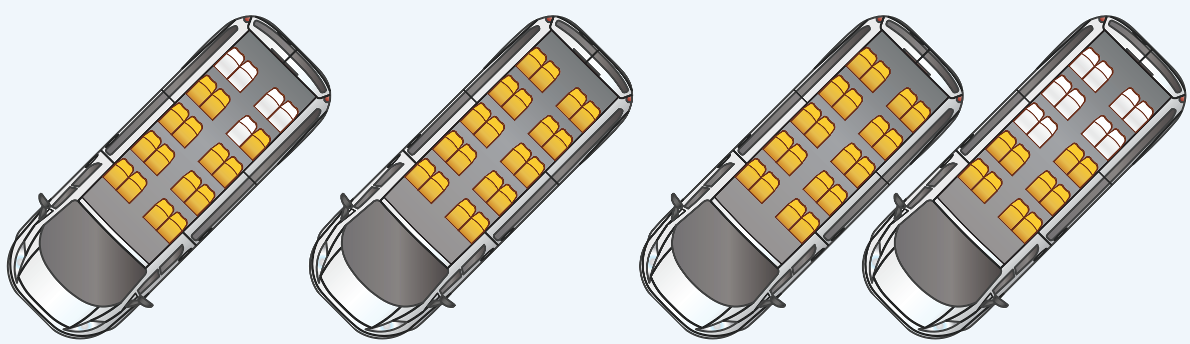
a → *a* se numește *numărător* – arată câte unități fracționare s-au luat

b → *b* se numește *numitor* – arată în câte părți egale a fost împărțit întregul

1.2. Fracții subunitare, echiunitare, supraunitare

Mate practică

O firmă organizatoare de tabere școlare a primit 15 cereri de înscriere pentru tabăra de la Alba Iulia, 20 de cereri pentru tabăra de la Hațeg și 30 de cereri pentru cea de la Hunedoara. Dacă transportul se face cu microbuze de 20 de locuri, scrieți sub formă de fracție gradul de ocupare al fiecărui microbuz.



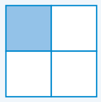
Alba Iulia $\frac{15}{20}$ Hațeg $\frac{20}{20}$ Hunedoara $\frac{30}{20}$

De reținut

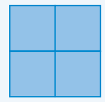
O fracție se numește
- *subunitară* dacă numărătorul este mai mic decât numitorul.
- *echiunitară* dacă numărătorul este egal cu numitorul.
- *supraunitară* dacă numărătorul este mai mare decât numitorul.

O fracție subunitară exprimă o cantitate mai mică decât un întreg, o fracție echiunitară arată o cantitate *egală* cu un întreg, iar o fracție supraunitară indică o cantitate *mai mare* decât un întreg.

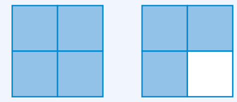
Exemple


$\frac{1}{4}$

fracție subunitară


$\frac{4}{4}$

fracție echiunitară


$\frac{7}{4}$

fracție supraunitară

1.3. Fracții echivalente

Mate practică

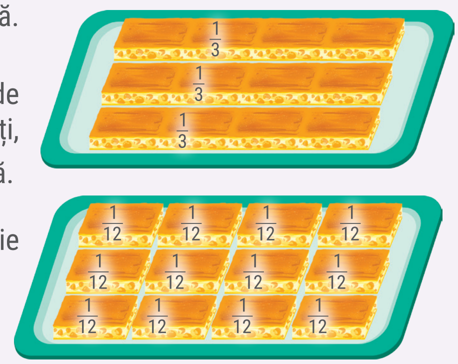
Bunica lui Vlad a făcut plăcintă cu mere. Dina și Vlad o ajută la porționat.

Vlad: Am împărțit plăcinta în 3 porțiuni egale, tăind pe orizontală. Fiecare porțiune reprezintă o treime din plăcintă.

Dina: Iar eu, tăind pe verticală, am împărțit fiecare felie tăiată de tine în câte patru bucăți egale. Întrucât am obținut 12 bucăți, fiecare dintre acestea reprezintă $\frac{1}{12}$ din întreaga plăcintă.

Vlad: Așadar, $\frac{1}{3}$ și $\frac{4}{12}$ reprezintă aceeași parte. Am putea scrie $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$.

Dina: Chiar așa! Te rog să observi că între numitorii și numărătorii celor două fracții există o relație specială: $1\cdot 12=3\cdot 4$.



De reținut

Două fracții $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ sunt *echivalente* dacă $a\cdot d=b\cdot c$. Se notează $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Două fracții *echivalente* reprezintă aceeași cantitate dintr-un întreg.

Exemple

1. Fracțiile $\frac{2}{7}$ și $\frac{6}{21}$ sunt echivalente, deoarece $2\cdot 21=7\cdot 6$. Scriem $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$.

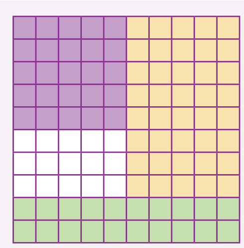
2. Fracțiile $\frac{4}{3}$ și $\frac{12}{9}$ sunt echivalente, întrucât $4\cdot 9=3\cdot 12$. Scriem $\frac{4}{3}=\frac{12}{9}$.

3. Fracțiile $\frac{3}{5}$ și $\frac{7}{11}$ nu sunt echivalente, pentru că $3\cdot 11\neq 5\cdot 7$. Vom nota $\frac{3}{5}\neq\frac{7}{11}$.

1.4. Procente

Mate practică

Dina, Vlad și Bianca au colorat unele dintre cele 100 de pătrățele identice în care a fost împărțit pătratul 10×10 alăturat.



Ce fracție este reprezentată prin fiecare dintre zonele colorate?

Răspuns:

Din cele 100 de pătrățele, 25 sunt colorate cu mov, ceea ce reprezintă $\frac{25}{100}$.

Ne amintim că fracția $\frac{25}{100}$ se mai notează și 25%, care se citește 25 de procente sau douăzeci și cinci la sută. Păstrând notația, cele 40 de pătrățele galbene reprezintă $\frac{40}{100}$ sau 40%, iar cele 20 de pătrățele colorate cu verde înseamnă $\frac{20}{100}$ sau 20% din întregul pătrat.

IV Fracții ordinare

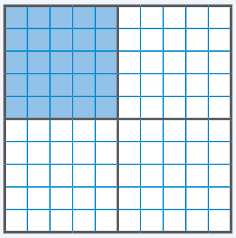
De reținut

Dacă p este un număr natural, fracția $\frac{p}{100}$ se notează $p\%$ și se citește *p procente* sau *p la sută*.

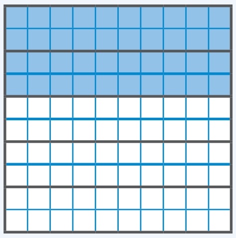
Procentul este o fracție cu numitorul 100.

Exemple

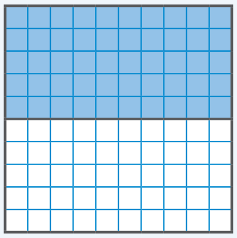
1. Zona albă din pătratul 10×10 colorat de cei trei copii conține 15 pătrățele, deci reprezintă 15% din întregul pătrat.
2. Pentru a scrie procentele sub formă de fracții ordinare, pot fi folosite și fracții echivalente, așa cum rezultă din imaginile de mai jos:



$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$



$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$



$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați numerele naturale n pentru care:

a) fracția $\frac{12}{7n+6}$ este supraunitară;

b) fracția $\frac{3n+2}{2n+5}$ este subunitară.

Rezolvare:

a) Fracția $\frac{12}{7n+6}$ este supraunitară dacă $12 > 7n+6$, adică $7n < 6$. Singurul soluție este $n = 0$.

b) Fracția $\frac{3n+2}{2n+5}$ este subunitară dacă $3n+2 < 2n+5$, adică $n < 3$. Soluțiile problemei sunt 0, 1, 2.

2. Determinați numărul natural n pentru care fracțiile $\frac{50}{55}$ și $\frac{n+1}{n+2}$ sunt echivalente.

Rezolvare:

Cele două fracții sunt echivalente dacă $50 \cdot (n+2) = 55 \cdot (n+1)$, adică $50n + 100 = 55n + 55$. Scăzând $55n + 55$ din ambii membri ai acestei egalități, obținem $5n = 45$, de unde $n = 9$.

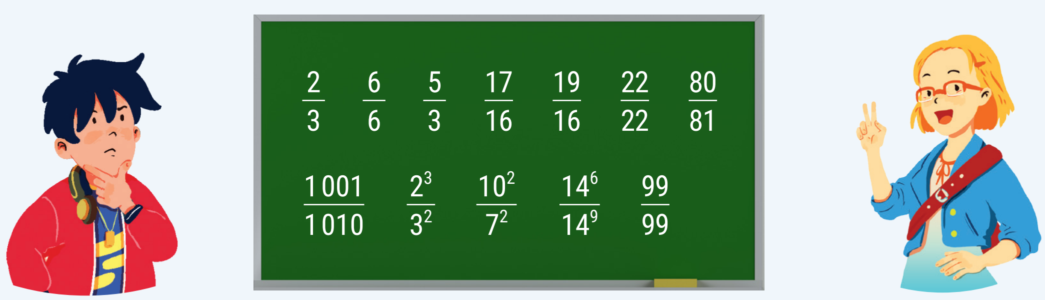
Probleme propuse

1. Scrieți:

a) trei fracții supraunitare cu numitorul 7;

b) trei fracții subunitare cu numărătorul 7.

2. Grupați pe trei coloane distincte fracțiile subunitare, echiunitare, respectiv supraunitare scrise pe tablă:



3. Determinați numerele naturale n pentru care afirmațiile următoare sunt adevărate:

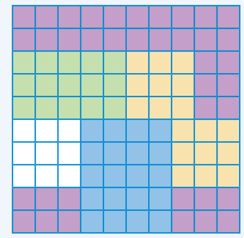
a) fracția $\frac{4}{n+1}$ este echiunitară;

b) fracția $\frac{5}{3n+1}$ este supraunitară;

c) fracția $\frac{4n+2}{13}$ este subunitară;

d) fracția $\frac{7n+2}{4n+11}$ este echiunitară.

4. Vlad, Dina, Luca și Eliza au colorat un pătrat format din 100 de pătrățele. Vlad a folosit culoarea mov, Dina verde, Eliza albastru și Luca a colorat cu galben. Scrieți ca procent fracțiile care indică:



a) partea colorată de fiecare;
b) partea colorată de băieți;
c) partea colorată de fete;
d) partea rămasă necolorată.

5. Verificați care dintre următoarele perechi de fracții sunt formate din fracții echivalente:

a) $\frac{1}{3}$ și $\frac{3}{9}$;
b) $\frac{12}{7}$ și $\frac{36}{21}$;
c) $\frac{11}{41}$ și $\frac{22}{84}$;
d) $\frac{28}{42}$ și $\frac{4}{6}$;
e) $\frac{3}{5}$ și $\frac{39}{75}$;
f) $\frac{9}{10}$ și $\frac{99}{100}$;
g) $\frac{24}{30}$ și $\frac{28}{35}$;
h) $\frac{13}{31}$ și $\frac{12}{21}$.
i) $\frac{7}{4}$ și $\frac{49}{2^4}$.

6. Determinați numărul natural n știind că următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $\frac{6}{5}=\frac{n}{25}$;
b) $\frac{n}{12}=\frac{4}{6}$;
c) $\frac{24}{n}=\frac{14}{28}$;
d) $\frac{60}{40}=\frac{9}{n}$;
e) $\frac{n}{3}=\frac{48}{n}$;
f) $\frac{4}{n+1}=\frac{24}{30}$;
g) $\frac{2n+1}{7}=\frac{15}{21}$;
h) $\frac{3n-2}{n}=\frac{5}{2}$.
i) $\frac{n}{n+1}=\frac{12}{15}$.

Minitest

1. Stabiliți care dintre următoarele fracții sunt subunitare, echiunitare, respectiv supraunitare:

a) $\frac{1}{8}$;
b) $\frac{3^4}{81}$;
c) $\frac{4^3}{36}$.

3 puncte

2. Determinați numărul natural n pentru care fracțiile din următoarele perechi sunt echivalente:

a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{n}{4}$;
b) $\frac{6}{n}$ și $\frac{18}{15}$;
c) $\frac{n+1}{22}$ și $\frac{2n}{40}$.

3 puncte

3. Determinați numărul natural n pentru care sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) fracția $\frac{n+1}{7}$ este subunitară;

b) fracția $\frac{2n+3}{11}$ este supraunitară.

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

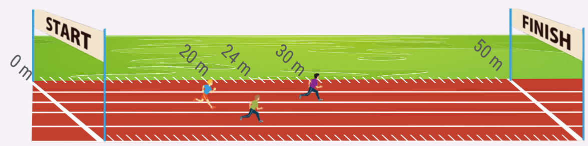
Lecția 2 Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător. Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor

2.1. Compararea fracțiilor cu același numitor

Mate practică

Dina, Vlad și Luca se antrenează pentru cursa de 50 de metri plat. La un moment dat, după start, Dina se afla la marcajul de 20 de metri, Vlad la marcajul de 30 de metri, iar Luca la marcajul de 24 de metri.

Exprimați, cu ajutorul fracțiilor, ce parte din întreaga pistă a parcurs fiecare dintre cei trei concurenți. Care dintre ei a parcurs o porțiune mai mare de pistă?



Răspuns:

Dina a parcurs $\frac{20}{50}$ din pistă, Vlad $\frac{30}{50}$, iar Luca $\frac{24}{50}$.

Dina a alergat mai puțin decât Vlad, deci $\frac{20}{50} < \frac{30}{50}$.

Vlad a parcurs o distanță mai mare decât Luca, deci $\frac{30}{50} > \frac{24}{50}$.

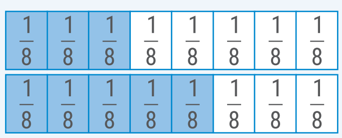
De reținut

Dintre două fracții care au același numitor, este mai mare fracția cu numărătorul mai mare.

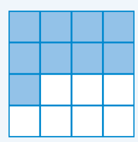
Regula 1. dacă $a < b$, atunci $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$

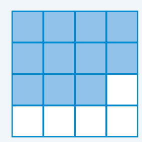
Regula 2. dacă $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$, atunci $a < b$

Exemple



$3 < 5 \longrightarrow \frac{3}{8} < \frac{5}{8}$





$\frac{9}{16} < \frac{11}{16} \longrightarrow 9 < 11$

2.2. Compararea fracțiilor cu același numărător

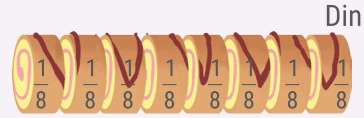
Mate practică

Dintr-o ruladă împărțită în 8 felii egale, Dina a mâncat 3 felii, iar Vlad a mâncat $\frac{3}{5}$ dintr-o ruladă identică. Cine a mâncat mai mult?

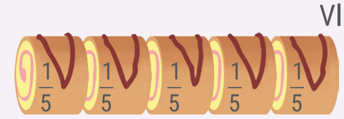
Analiză: Când numitorul fracției este mai mic, întregul este împărțit în mai puține părți, deci părțile sunt mai mari.

Răspuns: Vlad a mâncat mai mult, deci $\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$.

Dina



Vlad



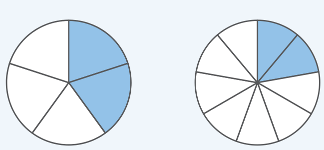
De reținut

Dintre două fracții care au același numărător, este mai mare fracția cu numitorul mai mic.

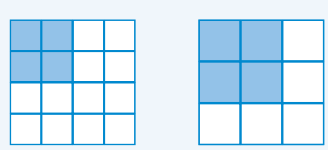
Regula 1. Dacă $m < n$, atunci $\frac{a}{m} > \frac{a}{n}$.

Regula 2. Dacă $\frac{a}{m} < \frac{a}{n}$, atunci $m > n$.

Exemple



$5 < 9 \longrightarrow \frac{2}{5} > \frac{2}{9}$



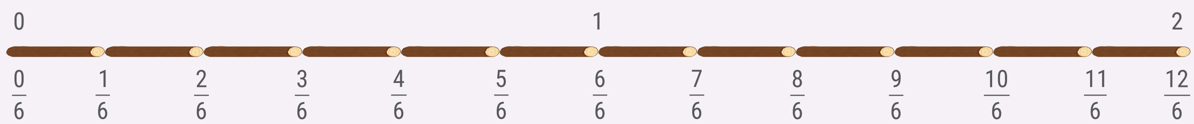
$\frac{4}{16} < \frac{4}{9} \longrightarrow 16 > 9$

2.3. Reprezentarea fracțiilor ordinare pe axa numerelor

Mate practică

La clubul de navomodelism, Vlad și Luca confecționează catarge pentru goeleta *La Volla*. Unde trebuie executate marcajele pentru decupaj pe o bucată de lemn de doi metri, știind că dintr-un metru se pot realiza 6 catarge?

Răspuns: Fiecare lungime de catarg reprezintă $\frac{1}{6}$ dintr-un metru.



De reținut

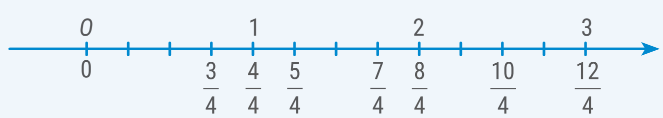
Ne amintim că *axa numerelor* este o dreaptă pe care se fixează:
- un punct numit *origine*;
- un sens de parcurgere de la stânga la dreapta, indicat de o săgeată, numit *sens pozitiv*;
- o *unitate de măsură* indicată de un segment.

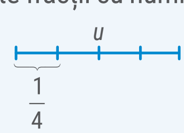
Știm că fiecărui număr natural îi corespunde, pe axa numerelor, un punct, numit *coordonata punctului*. Originea are coordonata 0 (zero).

Pentru a reprezenta o fracție pe axa numerelor, împărțim unitatea de măsură în atâtea părți egale câte arată numitorul și considerăm, începând din origine, atâtea părți câte arată numărătorul.

Exemple

Pentru a reprezenta pe axa numerelor fracția $\frac{3}{4}$, împărțim unitatea de măsură în 4 părți egale și luăm, începând din origine, trei astfel de părți. Pe aceeași axă, putem reprezenta mai multe fracții cu numitorul 4:





Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați numerele naturale n pentru care $\frac{n+1}{5}<\frac{3}{5}$.

Rezolvare:
Dintre două fracții cu același numitor, este mai mică cea cu numărătorul mai mic. Rezultă că $n+1<3$, adică n poate fi 0 sau 1.

2. Scrieți toate fracțiile de forma $\frac{13}{2n+3}$, unde n este număr natural, știind că $\frac{13}{2n+3}>\frac{13}{10}$.

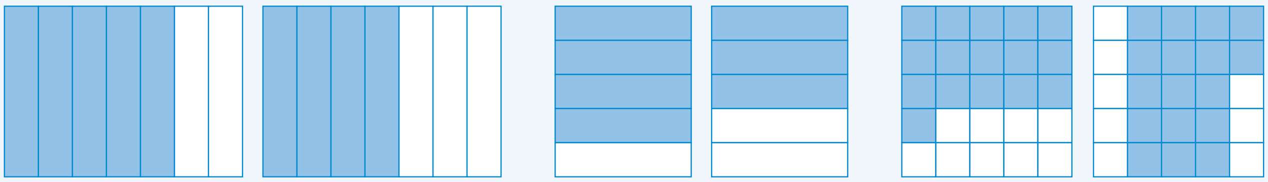
Rezolvare:
Dintre două fracții cu același numărător, este mai mare cea cu numitorul mai mic. Obținem $2n+3<10$, adică n poate fi 0, 1, 2 sau 3. Fracțiile căutate sunt $\frac{13}{3}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{13}{7}$ și $\frac{13}{9}$.

Probleme propuse

1. Ordonați crescător fracțiile:

a) $\frac{12}{7}, \frac{2}{7}, \frac{7}{7}, \frac{14}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$; b) $\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9}, \frac{4}{9}, \frac{16}{9}, \frac{9}{9}$; c) $\frac{4}{11}, \frac{4}{5}, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{91}, \frac{4}{4}$.

2. Comparați fracțiile reprezentate prin desene:



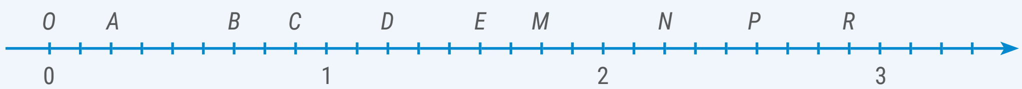
3. Reprezentați prin desene și comparați următoarele perechi de fracții cu același numitor:

a) $\frac{2}{7}$ și —; b) $\frac{4}{9}$ și $\frac{5}{9}$; c) $\frac{3}{2}$ și $\frac{5}{2}$.

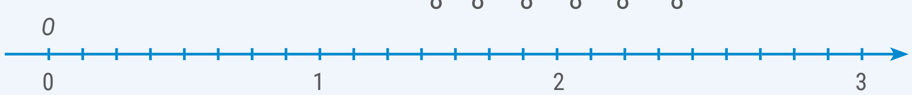
4. Reprezentați prin desene și comparați următoarele perechi de fracții cu același numărător:

a) $\frac{3}{5}$ și $\frac{3}{7}$; b) $\frac{5}{5}$ și $\frac{5}{6}$; c) $\frac{5}{4}$ și $\frac{5}{8}$.

5. Aflați coordonata fiecăruia dintre punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *M*, *N*, *P*, *R* reprezentate pe axa de mai jos:.

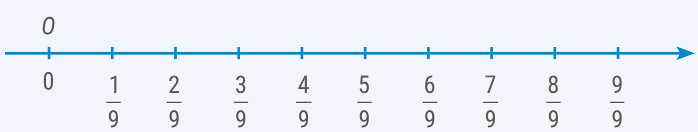


6. Pe axa numerelor de mai jos reprezentați fracțiile: $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{15}{8}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{11}{8}$; $\frac{20}{8}$.



7. Copiați axa de mai jos pe caiet și reprezentați fracțiile $\frac{7}{24}$; $\frac{15}{24}$; $\frac{20}{24}$; $\frac{31}{24}$; $\frac{13}{24}$; $\frac{8}{24}$ pe axă:

8. Folosind axa numerelor de mai jos, ordonează descrescător fracțiile: $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{9}$ și $\frac{4}{9}$.



9. Reprezentați pe aceeași axă a numerelor următoarele fracții: $\frac{2}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{4}$; $\frac{2}{4}$.
Câte puncte distincte ați obținut pe axă?

10. Determinați numerele naturale *n* pentru care:

a) $\frac{n}{3} < \frac{2}{3}$; b) $\frac{7}{4} > \frac{4n+5}{4}$; c) $\frac{7}{n} > \frac{7}{2}$; d) $\frac{11}{17} < \frac{11}{5n+4}$.

Minitest

1. Reprezentați prin desene și comparați fracțiile $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$. **3 puncte**

2. Reprezentați pe aceeași axă a numerelor fracțiile $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{3}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{1}{3}$. **3 puncte**

3. Determinați numărul natural *n* știind că $\frac{n}{5} < \frac{4}{5}$ și $\frac{5}{n} < \frac{5}{2}$. **3 puncte**

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 3 Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție

3.1. Introducerea întregilor în fracție

Mate practică

Cantitatea de lapte prevăzută de rețetă pentru prepararea prăjiturii „Fractino" este de 2 căni și trei sferturi.

Exprimați această cantitate cu ajutorul unei fracții.

$1=\frac{4}{4}$ $1=\frac{4}{4}$ $\frac{3}{4}$

Răspuns:

Fiecare cană are patru sferturi, deci cantitatea de lapte necesară este de 11 sferturi de cană, adică $\frac{11}{4}$.

Ce observăm?

Cantitatea necesară, reprezentată de 2 întregi și $\frac{3}{4}$ poate fi descrisă, echivalent, prin fracția $\frac{11}{4}$.

Numărătorul fracției poate fi obținut din relația $11=2\cdot 4+3$.

Pentru a nota numărul alcătuit din 2 întregi și 3 pătrimi, utilizăm scrierea $2\frac{3}{4}$. Așadar, $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$.

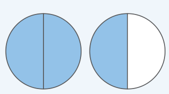
De reținut

Un număr alcătuit din n întregi și o fracție $\frac{a}{b}$, unde n, a, b sunt numere naturale, $b\neq 0$, $n\neq 0$, se numește *număr mixt* și se notează $n\frac{a}{b}$.

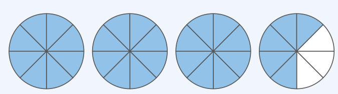
Operația de scriere a unui număr mixt sub formă de fracție se numește *introducerea întregilor în fracție*.
Pentru a reprezenta un număr mixt sub forma unei singure fracții, se utilizează egalitatea:

$$n\frac{a}{b}=\frac{n\cdot b+a}{b}.$$

Exemple



$1\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$

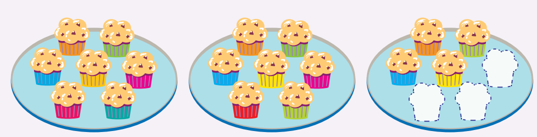


$3\frac{5}{8}=\frac{3\cdot 8+5}{8}=\frac{29}{8}$

3.2. Scoaterea întregilor din fracție

Mate practică

Pe un platou încap 7 brioșe. Vlad și Dina calculează, folosind fracții, câte platouri se pot umple folosind un pachet care conține 18 brioșe.



Dina: Fiecare brioșă umple $\frac{1}{7}$ dintr-un platou. Cu un pachet de 18 brioșe se pot completa $\frac{18}{7}$ platouri.

Vlad: Împărțind pe 18 la 7 obținem câtul 2 și restul 4. Ca urmare, dintr-un pachet putem umple complet două platouri, deci avem doi întregi, iar pe al treilea platou se mai pot pune încă patru brioșe, adică $\frac{4}{7}$ dintr-un platou. Răspunsul este $2\frac{4}{7}$.

Ce observăm?

Deoarece $18:7=2$, rest 4, fracția $\frac{18}{7}$ poate fi reprezentată sub forma numărului mixt $2\frac{4}{7}$.

În general, deoarece o fracție supraunitară reprezintă o cantitate mai mare decât un întreg, putem pune în evidență numărul de întregi conținuți în fracție exprimând fracția dată sub forma unui număr mixt.

De reținut

Operația de scriere a unei fracții supraunitare sub forma unui număr mixt se numește *scoaterea întregilor din fracție*.

Pentru a scoate întregii dintr-o fracție, se împarte numărătorul la numitor. Câtul reprezintă întregii, iar restul se trece la numărătorul fracției subunitare, care are același numitor ca fracția inițială. Altfel spus,

$$\text{dacă } a : b = c, \text{ rest } r, \text{ atunci } \frac{a}{b} = c\frac{r}{b}.$$

Când împărțirea se face exact, fracția exprimă un număr de întregi egal cu câtul:

$$\text{dacă } a : b = c, \text{ rest } 0, \text{ atunci } \frac{a}{b} = c.$$

Exemple

1. $\frac{23}{8} = 2\frac{7}{8}$, deoarece $23 : 8 = 2$, rest 7;

2. $\frac{41}{5} = 8\frac{1}{5}$, deoarece $41 : 5 = 8$, rest 1;

3. $\frac{62}{11} = 5\frac{7}{11}$, deoarece $62 : 11 = 5$, rest 7;

4. $\frac{27}{9} = 3$, deoarece $27 : 9 = 3$, rest 0.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Un buștean are 12 metri. El trebuie tăiat în 5 părți egale. Câți metri are fiecare parte? Exprimați răspunsul sub forma unui număr mixt.

Rezolvare:

Fiecare bucată rezultată după tăiere are $\frac{12}{5}$ metri. Întrucât $12 : 5 = 2$, rest 2, rezultă că $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$. Așadar, fiecare parte are $2\frac{2}{5}$ metri.

2. Precizați între ce două numere naturale consecutive se află, pe axa numerelor, fracția $\frac{13}{4}$.

Rezolvare:

Deoarece $13 : 4 = 3$, rest 1, prin scoaterea întregilor din fracție, putem scrie: $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$.

Ca urmare, fracția $\frac{13}{4}$ se află între numerele 3 și 4. Putem scrie $3 < \frac{13}{4} < 4$ sau $3 < 3\frac{1}{4} < 4$.

Probleme propuse

1. Scoateți întregii din fracțiile:

a) $\frac{7}{5}$; b) $\frac{13}{5}$; c) $\frac{19}{5}$; d) $\frac{26}{5}$; e) $\frac{43}{8}$; f) $\frac{64}{9}$.

2. Introduceți întregii în fracțiile:

a) $2\frac{1}{7}$; b) $3\frac{2}{7}$; c) $4\frac{3}{7}$; d) $5\frac{4}{9}$; e) $6\frac{5}{9}$; f) $7\frac{8}{9}$.

3. Indicați între ce două numere naturale consecutive se află fracțiile:

a) $\frac{13}{6}$; b) $\frac{17}{6}$; c) $\frac{38}{10}$; d) $\frac{65}{21}$; e) $\frac{165}{13}$; f) $\frac{723}{100}$.

4. 6 greutăți identice cântăresc 23 de kilograme împreună. Cât cântărește o singură greutate? Exprimați răspunsul sub forma unui număr mixt.

Lecția 4 Cel mai mare divizor comun a două numere naturale. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile

4.1. Cel mai mare divizor comun a două numere naturale

Mate practică

Mama a pregătit 18 sendvișuri cu cașcaval și 24 de sendvișuri cu șuncă pentru invitații Dinei. Care este cel mai mare număr de sendvișuri care pot fi puse pe un platou, astfel încât fiecare platou să conțină același număr de sendvișuri, toate de același fel?

Răspuns:
Numărul de sendvișuri de pe fiecare platou este un *divizor comun* al numerelor 18 și 24.

Divizorii lui 18 sunt 1, 2, 3, 6, 9, 18, iar divizorii lui 24 sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, deci cel mai mare număr de sendvișuri care pot fi puse pe un platou este 6, adică cel mai mare dintre divizorii comuni ai numerelor 18 și 24.

În particular, se observă că orice alt divizor comun al numerelor 18 și 24 este divizor al lui 6.

De reținut

Cel mai mare divizor comun a două numere naturale a și b, nu ambele nule, este numărul natural d care are proprietățile:

a) d divide a și d divide b;

b) d este divizibil cu orice divizor comun al numerelor a și b.

Proprietățile de mai sus arată că, de fapt, cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b este cel mai mare număr natural d care divide numerele a și b.

Se notează $d=(a,b)$ sau, folosind prescurtări, $d=\text{c.m.m.d.c.}(a,b)$.

Exemple

nr.	divizori	divizori comuni	c.m.m.d.c.
5	1, 5	1	$(5,13)=1$
13	1, 13		
5	1, 5	1	$(5,8)=1$
8	1, 2, 4, 8		
7	1, 7	1, 7	$(7,35)=7$
35	1, 5, 7, 35		

nr.	divizori	divizori comuni	c.m.m.d.c.
15	1, 3, 5, 15	1, 3, 5, 15	$(15,30)=15$
30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30		
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	1, 3, 9	$(18,27)=9$
27	1, 3, 9, 27		
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	1, 2, 3, 4, 6, 12	$(24,36)=12$
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36		

Observații

Analizând exemplele de mai sus, se constată că au loc următoarele proprietăți, general valabile:

1. Dacă a și b sunt două numere naturale astfel încât $a \mid b$, unde $a \neq 0$, atunci $(a,b)=a$.

2. Dacă p este un număr prim și a este un număr natural oarecare, atunci:

$$(p,a)=\begin{cases} p, & \text{dacă } a \text{ este multiplu de } p \\ 1, & \text{dacă } a \text{ nu este multiplu de } p \end{cases}.$$

3. Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, iar x și y sunt numere naturale astfel încât $a=d\cdot x$ și $b=d\cdot y$ (x și y sunt câturile împărțirilor lui a și b la d), atunci cel mai mare divizor comun al numerelor x și y este egal cu 1.

În mod similar, prin cel mai mare divizor comun a trei sau mai multe numere naturale înțelegem acel divizor comun care se divide cu toți divizorii numerelor date. Din acest motiv, el este cel mai mare număr natural care divide numerele date.

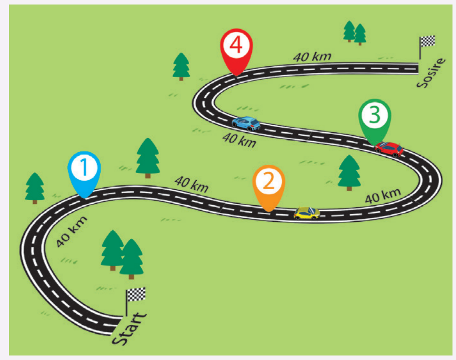
Exemplu:
Privind tabelul de mai sus și comparând listele divizorilor, deducem că:

- cel mai mare divizor comun al numerelor 24, 30 și 36 este 6.
- cel mai mare divizor comun al numerelor 15, 24, 27 și 36 este 3.

4.2. Amplificarea fracțiilor

Mate practică

La Raliul Carpaților, traseul primei etape este împărțit, prin 4 puncte de control, în 5 sectoare de câte 40 de kilometri fiecare. Pilotul preferat al lui Vlad se află la al treilea punct de control.



Vlad: Până acum a parcurs trei sectoare din cele cinci ale traseului, adică $\frac{3}{5}$ din drumul total.

Dina: Ai putea spune și astfel: întrucât $5\cdot 40=200$ și $3\cdot 40=120$, până acum a parcurs 120 km din cei 200 km ai traseului, adică $\frac{120}{200}$ din traseul total.

Ce observăm?

Fracția $\frac{120}{200}$ este echivalentă cu fracția $\frac{3}{5}$ (ambele reprezintă aceeași porțiune a traseului) și poate fi obținută din aceasta înmulțind atât numărătorul cât și numitorul cu numărul natural 40. Spunem că fracția $\frac{120}{200}$ s-a obținut prin *amplificarea* fracției $\frac{3}{5}$ cu 40. Așadar, are loc egalitatea:

$$\frac{3}{5}=\frac{40\cdot 3}{40\cdot 5}=\frac{120}{200}.$$

De reținut

A *amplifica* o fracție cu un număr natural nenul înseamnă a înmulți atât numărătorul, cât și numitorul fracției date cu acel număr.

Numărul natural cu care se amplifică se scrie mic, sus, în stânga fracției care se amplifică, despărțit printr-o paranteză.

Astfel, dacă a, b, n sunt numere naturale, cu $b, n\neq 0$, notăm:

$$^{n)}\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{n\cdot b}.$$

Prin amplificare se obține o fracție echivalentă cu cea dată, deoarece $a\cdot(n\cdot b)=b\cdot(n\cdot a)$.

Exemple

1. $^{2)}\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{2\cdot 5}=\frac{8}{10}$; **2.** $^{4)}\frac{12}{25}=\frac{4\cdot 12}{4\cdot 25}=\frac{48}{100}$; **3.** $^{7)}\frac{5}{11}=\frac{7\cdot 5}{7\cdot 11}=\frac{35}{77}$;

4. $^{6)}\frac{3}{10}=\frac{6\cdot 3}{6\cdot 10}=\frac{18}{60}$; **5.** $^{5)}\frac{7}{12}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 12}=\frac{35}{60}$; **6.** $^{4)}\frac{8}{15}=\frac{4\cdot 8}{4\cdot 15}=\frac{32}{60}$.

4.3. Simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile

Mate practică

Vlad: Din cei 30 de lei pe care îi aveam, am cheltuit 20 de lei pe un album cu formația mea preferată.

Dina: Mai simplu, albumul a costat două treimi din suma pe care o aveai.

Ce observăm?

Suma cheltuită reprezintă $\frac{20}{30}$, cât și $\frac{2}{3}$ din suma totală (cele două fracții sunt echivalente).

Fracția $\frac{2}{3}$ se obține prin împărțirea numărătorului și a numitorului fracției $\frac{20}{30}$ la 10, deci avem:

$$\frac{20}{30}=\frac{20:10}{30:10}=\frac{2}{3}.$$

Spunem că fracția $\frac{2}{3}$ s-a obținut prin *simplificarea* fracției $\frac{20}{30}$ cu numărul natural 10.

De reținut

A *simplifica* o fracție cu un număr natural nenul înseamnă a împărți atât numărătorul, cât și numitorul fracției date cu acel număr.

Numărul natural prin care se efectuează simplificarea este un divizor comun, diferit de 1, al numărătorului și numitorului fracției date. Fracția obținută după simplificare este echivalentă cu cea dată.

Numărul natural cu care se simplifică se notează mic, sus, în dreapta fracției care se simplifică, despărțit printr-o paranteză. Astfel, dacă *a*, *b* sunt numere naturale, cu $b\neq 0$, iar $d\neq 1$ este un divizor comun al numerelor *a* și *b*, vom scrie:

$$\frac{a}{b}^{(d}=\frac{a:d}{b:d}.$$

Exemple

1. $\frac{10}{18}^{(2}=\frac{10:2}{18:2}=\frac{5}{9}$;
2. $\frac{42}{49}^{(7}=\frac{42:7}{49:7}=\frac{6}{7}$;
3. $\frac{99}{909}^{(9}=\frac{99:9}{909:9}=\frac{11}{101}$;
4. $\frac{24}{36}^{(3}=\frac{24:3}{36:3}=\frac{8}{12}$;
5. $\frac{24}{36}^{(4}=\frac{24:4}{36:4}=\frac{6}{9}$;
6. $\frac{24}{36}^{(6}=\frac{24:6}{36:6}=\frac{4}{6}$.

De reținut

O fracție care nu se poate simplifica prin niciun număr natural se numește *fracție ireductibilă*.

O fracție se numește *reductibilă* dacă se poate simplifica.

O fracție este ireductibilă dacă cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului fracției este egal cu 1.

Exemple

Fracțiile $\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{9}{22},\frac{24}{25},\frac{25}{27}$ sunt ireductibile.

Fracțiile $\frac{6}{8}$ și $\frac{12}{18}$ sunt reductibile, deoarece se pot simplifica prin 2.

Observații

1. Pentru a obține fracții ireductibile din fracții ordinare date, simplificăm fracția prin cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului.

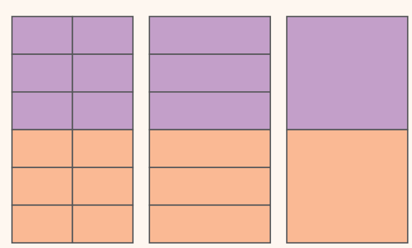
   Exemplu:

   Cel mai mare divizor comun al numerelor 50 și 75 este 25, deci $\frac{50}{75}^{(25}=\frac{50:25}{75:25}=\frac{2}{3}$.

2. Alternativ, pentru a obține o fracție ireductibilă, putem simplifica fracția, succesiv, prin divizori comuni ai numărătorului și numitorului, până când aceasta nu se mai poate simplifica. Această metodă este foarte utilă când numărătorul și numitorul au valori mai mari.

   Exemplu:

   $$\frac{504}{840}^{(2}=\frac{252}{420}^{(2}=\frac{126}{210}^{(2}=\frac{63}{105}^{(3}=\frac{21}{35}^{(7}=\frac{3}{5}.$$



$$\frac{6}{12}^{(2}=\frac{3}{6}^{(3}=\frac{1}{2}$$

IV Fracții ordinare

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{n+5}{12}$ este subunitară și ireductibilă.

Rezolvare:

Fracția $\frac{n+5}{12}$ este subunitară dacă $n+5<12$, adică n ia una din valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5 sau 6, valori pentru care verificăm dacă fracția este sau nu ireductibilă. Obținem $n=0, n=2$ sau $n=6$, pentru care fracțiile ireductibile corespunzătoare sunt $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$ și $\frac{11}{12}$.

2. Prin amplificarea unei fracții cu un anumit număr natural s-a obținut fracția $\frac{30}{72}$. Aflați fracția.

Rezolvare:

Întrucât operația inversă amplificării este simplificarea, vom determina prin ce numere se poate simplifica fracția $\frac{30}{72}$ și care sunt fracțiile ce se pot obține. Divizorii comuni ai numerelor 30 și 72 sunt 2, 3 și 6, deci au loc simplificările:

$\frac{30}{72}^{(2}=\frac{15}{36}$; $\frac{30}{72}^{(3}=\frac{10}{24}$; $\frac{30}{72}^{(6}=\frac{5}{12}$.

Așadar, fracția din enunț poate fi $\frac{5}{12}$, $\frac{10}{24}$ sau $\frac{15}{36}$.

Probleme propuse

1. Amplificați cu 4 următoarele fracții:

a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $\frac{2}{25}$; d) $\frac{29}{10}$; e) $\frac{17}{50}$; f) $\frac{35}{12}$.

2. Amplificați cu 6 următoarele fracții:

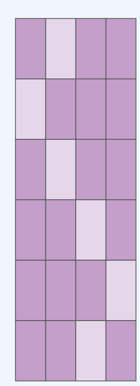
a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{2}{7}$; c) $\frac{11}{3}$; d) $\frac{4}{9}$; e) $\frac{16}{25}$; f) $\frac{11}{36}$.

3. Simplificați prin 3 fracțiile:

a) $\frac{3}{21}$; b) $\frac{12}{15}$; c) $\frac{27}{6}$; d) $\frac{39}{72}$; e) $\frac{66}{99}$; f) $\frac{36}{96}$.

4. Simplificați prin 5 fracțiile:

a) $\frac{5}{10}$; b) $\frac{10}{25}$; c) $\frac{50}{15}$; d) $\frac{40}{90}$; e) $\frac{60}{75}$; f) $\frac{25}{100}$.



5. Dreptunghiul alăturat este împărțit în părți egale, dintre care unele sunt colorate.

a) Precizați care dintre următoarele fracții este echivalentă cu aria necolorată:

$\frac{6}{20}$ $\frac{18}{24}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{15}{50}$ $\frac{24}{84}$

b) Precizați care dintre următoarele fracții nu este echivalentă cu aria colorată:

$\frac{9}{12}$ $\frac{16}{20}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{36}{48}$ $\frac{28}{42}$

6. Cu ce număr natural trebuie amplificată:

a) fracția $\frac{3}{4}$ pentru a obține numărătorul 12?

b) fracția $\frac{25}{10}$ pentru a obține numitorul 100?

7. Cu ce număr natural trebuie simplificată:

a) fracția $\frac{25}{40}$ pentru a obține numărătorul 5? b) fracția $\frac{33}{84}$ pentru a obține numitorul 28?

8. Identificați care dintre următoarele fracții sunt ireductibile:

a) $\frac{1}{18}$; b) $\frac{8}{11}$; c) $\frac{12}{10}$; d) $\frac{49}{64}$; e) $\frac{39}{52}$; f) $\frac{25}{27}$.

9. Simplificați fracțiile următoare pentru a obține fracții ireductibile:

a) $\frac{6}{24}$; b) $\frac{35}{15}$; c) $\frac{36}{60}$; d) $\frac{35}{70}$; e) $\frac{84}{48}$; f) $\frac{64}{200}$.

10. Determinați numerele naturale *n* pentru care sunt îndeplinite, în fiecare caz indicat, condițiile:

a) fracția $\frac{3n+1}{20}$ este subunitară și ireductibilă; b) fracția $\frac{18}{n+3}$ este supraunitară și reductibilă.

11. a) Determinați fracțiile de forma $\frac{\overline{64a}}{885}$ care se simplifică prin 5.

b) Aflați fracțiile de forma $\frac{\overline{11a2}}{\overline{2b70}}$ care se pot obține în urma unei operații de amplificare cu 3.

12. Vlad a scris pe tablă o fracție, iar Dina a amplificat-o cu un număr natural. Luca a șters tabla, lăsând doar rezultatul obținut în urma amplificării: $\frac{18}{36}$. Ce fracție a scris Vlad?

Gândire critică

Două numere naturale se numesc *prime între ele* (sau *relativ prime*) dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

Sarcini de grup

1. a) Verificați, prin câte trei exemple, valabilitatea afirmațiilor:
(i) Orice două numere naturale consecutive sunt prime între ele.
(ii) Orice două numere naturale impare consecutive sunt prime între ele.

b) Dezbateți și argumentați, cu colegii sau împreună cu profesorul, dacă afirmațiile precedente sunt valabile în cazul general.

2. Pe baza afirmațiilor de la exercițiul 1 argumentați dacă:
a) O fracție în care numărătorul și numitorul sunt numere naturale consecutive este ireductibilă.
b) O fracție în care numărătorul și numitorul sunt numere impare consecutive este ireductibilă.

3. Decideți, folosindu-vă eventual de discuțiile purtate, dacă:

a) fracțiile $\frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}, \frac{16}{15}, \frac{100}{99}$ sunt ireductibile;

b) fracțiile $\frac{3}{5}, \frac{9}{11}, \frac{23}{25}, \frac{51}{49}, \frac{101}{99}$ sunt ireductibile.

Minitest

1. Amplificați cu 4 fracțiile: a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{5}{19}$; c) $\frac{13}{25}$.

3 puncte

2. Simplificați prin 9 fracțiile: a) $\frac{9}{90}$; b) $\frac{81}{72}$; c) $\frac{36}{63}$.

3 puncte

3. Determinați fracțiile de forma $\frac{\overline{47a}}{\overline{1a6a}}$, care se pot simplifica prin 3.

3 puncte

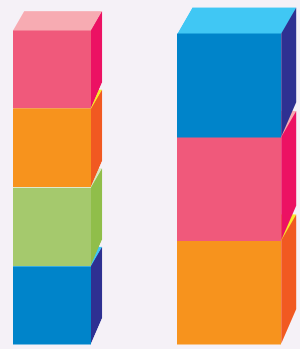
Din oficiu: **1 punct**

Lecția 5 Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

5.1. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale

Mate practică

Fratele lui Vlad ar dori să construiască două turnuri la fel de mari: un turn format doar din piese cu înălțimea de 6 cm, iar celălalt turn din piese cu înălțimea de 8 cm. Care este înălțimea minimă a turnurilor?



Răspuns:

Înălțimea minimă este cel mai mic număr nenul care se împarte exact la fiecare dintre înălțimile celor două tipuri de piese; altfel spus, este cel mai mic dintre *multiplii comuni* ai numerelor 6 și 8.

Multiplii lui 6 sunt: 6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, 54, 60, 66, **72**, 78, 84,...

Multiplii lui 8 sunt: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**, 80, 88,...

Turnurile construite de Vlad au înălțimea minimă de 24 cm.

În particular, se observă că orice alt multiplu comun al numerelor 6 și 8 este multiplu de 24.

De reținut

Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale a și b este numărul natural m care are proprietățile:

a) a divide m și b divide m;

b) m divide orice multiplu comun al numerelor a și b.

Proprietățile de mai sus arată că cel mai mic multiplu comun a două numere naturale nenule a și b este cel mai mic număr natural *diferit de* 0 care se divide cu a și b.

Se notează $m = [a, b]$ sau $m =$ c.m.m.m.c. (a, b).

Exemple

nr.	multiplii nenuli	c.m.m.m.c.
3	3, 6, 9, 12, **15**, 18,...	[3, 5] = 15
5	5, 10, **15**, 20, 25,...	
6	6, 12, **18**, 24,...	[6, 18] = 18
18	**18**, 36, 54,...	

nr.	multiplii nenuli	c.m.m.m.c.
4	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, **36**, ...	[4, 9] = 36
9	9, 18, 27, **36**, 45, ...	
12	12, 24, 36, 48, 60, 72, **84**, 96, ...	[12, 28] = 84
28	28, 56, **84**, 112, ...	

Observații

Analizând exemplele de mai sus, se constată că au loc următoarele proprietăți, valabile în caz general:

1. Deși 0 este un multiplu comun a oricăror numere nenule a și b, el nu este cel mai mic multiplu comun, deoarece 0 nu divide nici un alt multiplu al numerelor a și b (0 nu verifică proprietatea b) de mai sus).
2. Dacă a și b sunt două numere naturale astfel încât $a \mid b$, unde $a \neq 0$, atunci $[a, b] = b$.
3. Dacă cel mai mare divizor comun a două numere este egal cu 1 (altfel spus, dacă două numere sunt *prime între ele*), atunci cel mai mic multiplu comun al celor două numere este produsul lor.
4. Dacă d este cel mai mare divizor comun al numerelor a și b, iar $a = d \cdot x$ și $b = d \cdot y$, atunci cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b este egal cu $d \cdot x \cdot y$.

   Rezultă de aici că produsul dintre cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun a două numere naturale este egal cu produsul celor două numere: $(a,b) \cdot [a,b] = a \cdot b$.
5. În mod similar, prin cel mai mic multiplu comun a trei sau mai multe numere naturale nenule înțelegem cel mai mic număr natural nenul care se divide cu toate numerele date.

   Exemplu:

   Privind tabelul de mai sus și comparând listele multiplilor, deducem că:
   - cel mai mic multiplu comun al numerelor 3, 4 și 12 este 12;
   - cel mai mic multiplu comun al numerelor 6, 9, 12 și 18 este 36.

5.2. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

Mate practică

Vlad și Luca sunt la ora de activități practice.

Care dintre cei doi băieți a vopsit mai mult?

Analiză:

Formăm fracții echivalente cu cele date, care să aibă numitori egali, astfel încât să le putem compara.

Avem ${}^{3)}\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, respectiv ${}^{2)}\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ și, întrucât $\frac{9}{12}<\frac{10}{12}$, rezultă că $\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$.

În concluzie, Luca a vopsit mai mult decât Vlad.

De reținut

Prin *aducerea la un numitor comun* (sau *aducerea la același numitor*) a două sau mai multe fracții se înțelege procedeul prin care se obțin fracții cu numitori egali, echivalente cu cele date.

Pentru a aduce două fracții la un numitor comun, se parcurg, de regulă, următorii pași:

- se simplifică fiecare fracție până devine ireductibilă;
- se calculează cel mai mic multiplu comun al numitorilor, adică cel mai mic numitor comun la care pot fi aduse fracțiile date;
- se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre cel mai mic multiplu comun al numitorilor și numitorul fracției respective.

Exemple

fracția	forma ireductibilă	cel mai mic numitor comun	factorul de amplificare	aducerea la același numitor
$\frac{10}{12}$	$\frac{10}{12}^{(2}=\frac{5}{6}$	$[6,15]=30$	$30:6=5$	${}^{5)}\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$
$\frac{12}{45}$	$\frac{12}{45}^{(3}=\frac{4}{15}$		$30:15=2$	${}^{2)}\frac{4}{15}=\frac{8}{30}$
$\frac{32}{40}$	$\frac{32}{40}^{(8}=\frac{4}{5}$	$[5,11]=55$	$55:5=11$	${}^{11)}\frac{4}{5}=\frac{44}{55}$
$\frac{18}{66}$	$\frac{18}{66}^{(6}=\frac{3}{11}$		$55:11=5$	${}^{5)}\frac{3}{11}=\frac{15}{55}$

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Scrieți două fracții ireductibile cuprinse între $\frac{2}{3}$ și $\frac{11}{12}$.

Rezolvare:

Pentru a putea aplica criterii de comparație, vom aduce cele două fracții la același numitor. Deoarece $[3,12]=12$, cel mai mic numitor comun este 12. Cum ${}^{4)}\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, trebuie să găsim două fracții cuprinse între $\frac{8}{12}$ și $\frac{11}{12}$. Observând că $\frac{8}{12}<\frac{9}{12}<\frac{10}{12}<\frac{11}{12}$ și $\frac{9}{12}^{(3}=\frac{3}{4}$, respectiv $\frac{10}{12}^{(2}=\frac{5}{6}$, putem lua, ca soluții, fracțiile $\frac{3}{4}$ și $\frac{5}{6}$.

2. La săritura în lungime, Vlad a sărit mai întâi $3\frac{1}{2}$ metri, apoi $3\frac{2}{5}$ metri, iar a treia oară a sărit $3\frac{5}{6}$ metri. Stabiliți care a fost cea mai lungă săritură.

Rezolvare:

Este suficient să comparăm fracțiile $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ și $\frac{5}{6}$. Cel mai mic număr natural care se divide cu 2, 5 și 6 simultan este 30, deci amplificăm fracția $\frac{1}{2}$ cu 15, fracția $\frac{2}{5}$ cu 6 și fracția $\frac{5}{6}$ cu 5. Obținem:

$^{15)}\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$, $^{6)}\frac{2}{5}=\frac{12}{30}$ și $^{5)}\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$. Întrucât $12<15<25$, rezultă $\frac{12}{30}<\frac{15}{30}<\frac{25}{30}$, adică $\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{5}{6}$.

Ca urmare, a treia săritură a fost cea mai lungă.

Probleme propuse

1. Pentru fiecare dintre următoarele perechi de fracții, verificați că numitorul uneia dintre fracții este divizor al numitorului celeilalte fracții, apoi aduceți fracțiile la un numitor comun:

a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{5}{6}$; b) $\frac{1}{4}$ și $\frac{3}{8}$; c) $\frac{4}{21}$ și $\frac{13}{84}$; d) $\frac{5}{16}$ și $\frac{49}{96}$.

2. Observând că numitorii următoarelor perechi de fracții au cel mai mare divizor comun egal cu 1, aduceți-le la cel mai mic numitor comun și apoi stabiliți care dintre ele este mai mare:

a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{7}{15}$; b) $\frac{3}{4}$ și $\frac{16}{25}$; c) $\frac{3}{14}$ și $\frac{2}{9}$; d) $\frac{7}{12}$ și $\frac{8}{5}$.

3. Indicați, pentru fiecare dintre perechile de fracții următoare, cel mai mic multiplu comun al numitorilor și aduceți fracțiile la un numitor comun:

a) $\frac{1}{10}$ și $\frac{11}{15}$; b) $\frac{5}{12}$ și $\frac{9}{20}$; c) $\frac{7}{18}$ și $\frac{8}{27}$; d) $\frac{3}{14}$ și $\frac{5}{49}$.

4. Scrieți fracțiile următoare sub forma ireductibilă, apoi aduceți fracțiile obținute la un numitor comun:

a) $\frac{6}{12}$ și $\frac{14}{21}$; b) $\frac{5}{20}$ și $\frac{22}{55}$; c) $\frac{9}{27}$ și $\frac{9}{36}$; d) $\frac{48}{60}$ și $\frac{32}{56}$.

5. Într-un turneu, mai multe echipe au jucat același număr de meciuri. Dintre partidele jucate de fiecare, echipa roșie a câștigat $\frac{7}{10}$, echipa galbenă a câștigat $\frac{2}{3}$, iar echipa albastră a câștigat $\frac{4}{5}$. Aduceți la același numitor fracțiile care exprimă meciurile câștigate de fiecare dintre cele trei echipe și stabiliți care echipă a câștigat cele mai puține meciuri.

6. Aduceți la același numitor, apoi ordonați crescător fracțiile:

a) $\frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{3}{4}$; b) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{20}{24}$; c) $\frac{11}{12}, \frac{6}{16}, \frac{25}{30}$; d) $3\frac{1}{6}, 1\frac{2}{3}, 2\frac{3}{4}$.

Minitest

1. Aduceți la același numitor fracțiile: a) $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$ și $\frac{11}{12}$; c) $\frac{7}{16}$ și $\frac{11}{24}$.

3 puncte

2. a) Aducând mai întâi la un numitor comun, stabiliți care dintre fracțiile $\frac{1}{6}$ și $\frac{2}{7}$ este mai mică.

b) Aducând mai întâi la un numitor comun, stabiliți care dintre fracțiile $\frac{5}{7}$ și $\frac{33}{55}$ este mai mare.

4 puncte

3. Aduceți la același numitor, apoi ordonați descrescător fracțiile $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$ și $\frac{11}{12}$.

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 6 Adunarea și scăderea fracțiilor

6.1. Adunarea și scăderea fracțiilor cu același numitor

Mate practică

Dintr-o ruladă împărțită în porții identice, Vlad a mâncat $\frac{2}{9}$, iar Luca a mâncat cu $\frac{1}{9}$ mai mult.

Ce fracție din ruladă reprezintă bucata rămasă?

Rezolvare:

Ne amintim, din clasele anterioare, că pentru a efectua suma a două fracții cu același numitor, se adună numărătorii și se păstrează numitorul comun. Astfel, obținem că:

• porția lui Luca reprezintă $\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{3}{9}$ din ruladă;

• împreună, cei doi băieți au mâncat $\frac{2}{9}+\frac{3}{9}=\frac{5}{9}$ din ruladă.

Asemănător, pentru a afla diferența a două fracții cu același numitor, se scad numărătorii și se păstrează numitorul comun. Scriind întregul ca pe o fracție echiunitară cu numitorul 9, fracția din ruladă reprezentată de bucata rămasă este $\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

De reținut

Suma a două fracții cu același numitor este fracția al cărei numărător este egal cu suma numărătorilor celor două fracții, iar numitorul este numitorul comun al celor două fracții:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \text{ pentru orice numere naturale } a, b, n, \text{ cu } n \geq 1.$$

Diferența a două fracții cu același numitor este fracția al cărei numărător este egal cu diferența numărătorilor celor două fracții, iar numitorul este numitorul comun al celor două fracții:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n} \text{ pentru orice numere naturale } a, b, n, \text{ cu } n \geq 1.$$

Altfel spus, folosind un limbaj simplificat:

- pentru a aduna două fracții cu același numitor, se adună numărătorii și se păstrează numitorul;
- pentru a scădea două fracții cu același numitor, se scad numărătorii și se păstrează numitorul.

Exemple

1. $\frac{5}{11}+\frac{16}{11}=\frac{5+16}{11}=\frac{21}{11}$;

2. $\frac{7}{18}+\frac{5}{18}=\frac{7+5}{18}=\frac{^{(6}12}{18}=\frac{2}{3}$;

3. $\frac{7}{31}-\frac{5}{31}=\frac{7-5}{31}=\frac{2}{31}$;

4. $\frac{17}{8}-\frac{5}{8}=\frac{17-5}{8}=\frac{^{(4}12}{8}=\frac{3}{2}$.

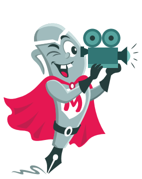
Observații

1. Egalitatea $\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}$ reprezintă *descompunerea numărului* $\frac{a+b}{n}$ *ca o sumă de două fracții* (se distribuie numitorul fiecăruia din termenii sumei de la numărător).

Exemple:

1. $\frac{16+9}{7}=\frac{16}{7}+\frac{9}{7}$;

2. $\frac{17}{23}=\frac{10+7}{23}=\frac{10}{23}+\frac{7}{23}$.



2. Egalitatea $\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}$ reprezintă *descompunerea numărului* $\frac{a-b}{n}$ *ca diferență de două fracții* (se distribuie numitorul fiecăruia din termenii diferenței de la numărător).

Exemple:

1. $\frac{12-4}{5}=\frac{12}{5}-\frac{4}{5}$;

2. $\frac{37}{11}=\frac{40-3}{11}=\frac{40}{11}-\frac{3}{11}$.

6.2. Adunarea și scăderea fracțiilor cu numitori diferiți

Mate practică

Vlad și Dina pleacă în drumeție.

În prima zi vom parcurge $\frac{1}{3}$ din traseul propus, a doua zi încă $\frac{2}{5}$ din traseu, iar a treia zi vom ajunge la destinație.

a) Ce parte din traseu reprezintă distanța parcursă în primele două zile?

b) Ce parte din traseu au parcurs în a treia zi?

Analiză:

Vom aduce la un numitor comun fracțiile care exprimă distanțele parcurse în cele două zile.

Cel mai mic multiplu comun al numerelor 3 și 5 este 15, deci:

- în prima zi au parcurs ${}^{5)}\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ din traseu;
- a doua zi au parcurs ${}^{2)}\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ din traseu;
- întregul traseu poate fi scris sub forma $1=\frac{15}{15}$.

${}^{5)}\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ ${}^{2)}\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$

Rezolvare:

a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$, deci în primele două zile au parcurs $\frac{11}{15}$ din traseul propus;

b) $\frac{1}{1}-\frac{11}{15}=\frac{15}{15}-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}$, deci în a treia zi au parcurs $\frac{4}{15}$ din traseul propus.

De reținut

Pentru a aduna, respectiv pentru a scădea două fracții cu numitori diferiți, se procedează astfel:
- se aduc mai întâi fracțiile la un numitor comun;
- se adună, respectiv se scad, fracțiile obținute folosind regulile de adunare, respectiv de scădere, a fracțiilor cu același numitor.

Exemplu

Pentru a calcula suma, respectiv diferența fracțiilor $\frac{7}{15}$ și $\frac{5}{12}$, procedăm astfel:

a) determinăm cel mai mic multiplu comun al numitorilor: $[12,15]=60$;

b) amplificăm fracția $\frac{7}{15}$ cu câtul dintre 60 și 15, adică cu 4, și obținem ${}^{4)}\frac{7}{15}=\frac{28}{60}$.

c) amplificăm fracția $\frac{5}{12}$ cu câtul dintre 60 și 12, adică cu 5, și obținem ${}^{5)}\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$.

d) Suma fracțiilor $\frac{7}{15}$ și $\frac{5}{12}$ este suma fracțiilor $\frac{28}{60}$ și $\frac{25}{60}$, adică $\frac{25}{60}+\frac{28}{60}=\frac{53}{60}$.

e) Diferența fracțiilor $\frac{7}{15}$ și $\frac{5}{12}$ este diferența fracțiilor $\frac{28}{60}$ și $\frac{25}{60}$, adică $\frac{28}{60}-\frac{25}{60}=\frac{3}{60}^{(3}=\frac{1}{20}$.

Pe scurt, calculele se organizează astfel:

${}^{4)}\frac{7}{15}+{}^{5)}\frac{5}{12}=\frac{28}{60}+\frac{25}{60}=\frac{53}{60}$; ${}^{4)}\frac{7}{15}-{}^{5)}\frac{5}{12}=\frac{28}{60}-\frac{25}{60}=\frac{3}{60}^{(3}=\frac{1}{20}$.

Observații

Uneori, înainte de a aduce fracțiile la același numitor, este de preferat să le simplificăm pentru a obține fracții ireductibile.

Exemplu: $\frac{1212}{1313}^{(101}+\frac{143}{169}^{(13}=\frac{12}{13}+\frac{11}{13}=\frac{23}{13}$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Pe toată suprafața cultivată a unei ferme, s-au repartizat culturile astfel: grâu $\frac{3}{14}$ din suprafață, porumb $\frac{11}{56}$ din suprafață, floarea-soarelui $\frac{2}{7}$, iar legume pe restul de suprafață.

a) Cât reprezintă suprafața cultivată cu grâu și porumb la un loc?
b) Cât reprezintă suprafața cultivată cu legume?

Rezolvare:

a) Vom aduna fracțiile ce reprezintă suprafețele cultivate cu grâu și porumb. Cel mai mic multiplu comun al numitorilor este 56. Avem ${}^{4)}\frac{3}{14}+\frac{11}{56}=\frac{12}{56}+\frac{11}{56}=\frac{23}{56}$, deci suprafața cultivată cu grâu și porumb la un loc este $\frac{23}{56}$ din suprafața totală.

b) Cu grâu, porumb și floarea-soarelui este ocupată $\frac{3}{14}+\frac{11}{56}+\frac{2}{7}=\frac{12}{56}+\frac{11}{56}+\frac{16}{56}=\frac{39}{56}$, deci suprafața cultivată cu legume reprezintă $\frac{56}{56}-\frac{39}{56}=\frac{17}{56}$ din întreaga suprafață.

2. Suma a două fracții ireductibile ce au același numitor este o fracție echiunitară. Determinați cele două fracții, știind că unul dintre numărători este dublul celuilalt.

Rezolvare:

Cele două fracții au forma $\frac{a}{b}$, respectiv $\frac{2a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale nenule. Suma lor este $\frac{a}{b}+\frac{2a}{b}=\frac{3a}{b}$, care este o fracție echiunitară dacă $b=3a$. Întrucât $\frac{a}{3a}^{(a}=\frac{1}{3}$ și $\frac{2a}{3a}^{(a}=\frac{2}{3}$, cele două fracții ireductibile cerute de enunț sunt $\frac{1}{3}$ și $\frac{2}{3}$.

Probleme propuse

1. Efectuați următoarele adunări și scăderi de fracții cu același numitor:

a) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$; b) $\frac{6}{13}+\frac{2}{13}$; c) $\frac{22}{15}-\frac{9}{15}$; d) $\frac{31}{21}-\frac{11}{21}$.

2. Observând că numitorul uneia dintre fracții este divizor al numitorului celeilalte fracții, efectuați:

a) $\frac{4}{15}+\frac{2}{3}$; b) $\frac{16}{93}+\frac{6}{31}$; c) $\frac{7}{32}-\frac{1}{16}$; d) $\frac{23}{42}-\frac{5}{14}$.

3. Efectuați operațiile, scriind rezultatul sub forma unei fracții ireductibile:

a) $\frac{5}{12}+\frac{5}{24}$; b) $\frac{26}{21}+\frac{13}{14}$; c) $\frac{4}{15}+\frac{3}{20}$; d) $\frac{5}{24}+\frac{1}{12}+\frac{3}{8}$;

e) $\frac{7}{30}-\frac{3}{20}$; f) $\frac{8}{15}-\frac{9}{20}$; g) $\frac{8}{21}-\frac{4}{35}$; h) $\frac{7}{6}-\frac{3}{4}-\frac{1}{12}$.

4. Efectuați calculele, și, dacă este cazul, aduceți rezultatul la forma ireductibilă și scoateți întregii din fracția rezultată:

a) $2\frac{1}{7}+1\frac{3}{7}$; b) $1\frac{2}{5}+3\frac{1}{10}$; c) $3\frac{1}{3}+2\frac{2}{5}$; d) $3\frac{5}{21}+1\frac{7}{12}$;

e) $5\frac{5}{6}-1\frac{1}{6}$; f) $4\frac{5}{18}-3\frac{1}{9}$; g) $7\frac{1}{7}-4\frac{2}{3}$; h) $9\frac{2}{3}-8\frac{1}{4}$.

5. Efectuați:

a) $\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$; b) $\frac{7}{36}-\frac{1}{18}+\frac{3}{4}$; c) $\frac{37}{18}-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$; d) $\frac{11}{18}-\frac{4}{9}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}$;

6. Într-o grădină, merii reprezintă $\frac{8}{17}$, iar caișii reprezintă $\frac{4}{17}$ din numărul total de pomi. Restul grădinii este cultivat cu pruni. Ce fracție reprezintă prunii din numărul total de pomi?

7. Dintr-un balot de pânză, într-o zi, s-a vândut: dimineața 4 metri și încă $\frac{7}{10}$ metri, iar după amiază, $8\frac{1}{5}$ metri . Aflați lungimea totală a pânzei vândute în acea zi.

8. Pentru un proiect la biologie, Vlad, Luca și Dina experimentează creșterea plantelor în diferite tipuri de soluri. Rezultatele obținute le-au trecut în tabelul alăturat. Aflați care a fost creșterea totală de-a lungul celor două săptămâni, pentru fiecare tip de sol.

Creșterea plantelor

Perioada	Solul A	Solul B	Solul C
Săptămâna 1	$\frac{1}{2}$ cm	$\frac{1}{3}$ cm	$\frac{1}{4}$ cm
Săptămâna 2	$\frac{7}{12}$ cm	$\frac{3}{4}$ cm	$\frac{3}{12}$ cm

9. Dintr-un vas plin cu ulei, cu capacitatea de $25\frac{3}{4}$ litri, s-au scos $18\frac{5}{6}$ litri de ulei. Ce cantitate de ulei a rămas în vas?

10. Suma a două fracții ce au același numărător este $1\frac{1}{7}$. Determinați cele două fracții, știind că unul dintre numitori este de trei ori mai mic decât celălalt.

Activitate pe grupe

Egiptenii priveau numerele fracționare ca pe niște numere aparte, care reprezentau o anumită parte a unității. Ei utilizau numai așa-numitele fracții *alicote*, adică fracții cu numărătorul 1. Fracțiile $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{35}$ sunt fracții alicote.

Celelalte fracții le descompuneau în sumă de fracții alicote; de exemplu, fracția $\frac{5}{6}$ se poate reprezenta ca o sumă de fracții alicote, scriind $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

1. Scrieți toate fracțiile subunitare cu numărătorul cel mult egal cu 4 și numitorul cel mult egal cu 5 și identificați fracțiile alicote dintre acestea.

2. Fiecare dintre fracțiile scrise la cerința anterioară poate fi scrisă ca sumă de fracții alicote, astfel încât oricare doi termeni să aibă numitori diferiți. Scrieți aceste sume.

3. Folosiți internetul sau biblioteca pentru a afla mai multe despre scrierea fracțiilor și evoluția reprezentării fracțiilor din antichitate până în timpurile moderne.
Prezentați în clasă rezultatele găsite și dezbateți pe această temă.

Minitest

1. Efectuați adunările: a) $\frac{17}{41}+\frac{8}{41}$; b) $\frac{11}{25}+\frac{3}{50}$; c) $\frac{7}{12}+\frac{5}{18}$.

3 puncte

2. Efectuați scăderile: a) $\frac{14}{37}-\frac{9}{37}$; b) $\frac{7}{9}-\frac{4}{27}$; c) $\frac{11}{6}-\frac{13}{9}$.

3 puncte

3. Un ciclist a parcurs în prima zi $\frac{5}{12}$ din tot drumul, iar în a doua zi $\frac{1}{3}$ din tot drumul. Ce fracție din tot drumul i-a mai rămas de parcurs?

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 7 Înmulțirea fracțiilor

7.1. Înmulțirea unui număr natural cu o fracție ordinară

Mate practică

Fiecare sesiune de lucru de o oră consumă $\frac{2}{9}$ din bateria calculatorului portabil al lui Luca.
Ce fracție din baterie se consumă după 4 sesiuni de lucru?

Răspuns:

$\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{2+2+2+2}{9}=\frac{4\cdot 2}{9}=\frac{8}{9}$.

Întrucât adunarea repetată are aceeași semnificație cu operația de înmulțire, putem scrie:

$$4\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4\cdot 2}{9}=\frac{8}{9}.$$

De reținut

Produsul dintre un număr natural și o fracție este o fracție în care:
- numărătorul este produsul dintre numărul natural respectiv și numărătorul fracției date;
- numitorul este același cu numitorul fracției date.

$$n\cdot\frac{a}{b}=\frac{n\cdot a}{b},$$ pentru orice numere naturale a, b, n, unde $b\neq 0$.

Altfel spus, pentru a înmulți un număr natural cu o fracție ordinară, păstrăm numitorul și înmulțim numărul dat cu numărătorul.

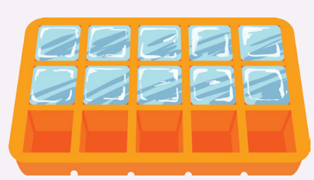
Exemple

1. $6\cdot\frac{4}{35}=\frac{6\cdot 4}{35}=\frac{24}{35}$; **2.** $9\cdot\frac{8}{18}=\frac{72^{(18}}{18}=\frac{4}{1}=4$; **3.** $6\cdot\frac{5}{36}=\frac{30^{(6}}{36}=\frac{5}{6}$.

7.2. Înmulțirea a două fracții ordinare

Mate practică

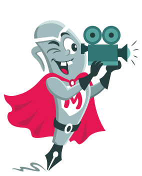
Vlad are o tăviță de cuburi de gheață plină în proporție de $\frac{2}{3}$. El folosește $\frac{4}{5}$ din cuburi. Ce fracție din întreaga tăviță reprezintă cuburile folosite?



Analiză:

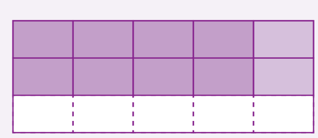
Pasul 1

Imaginându-ne tăvița sub forma unui dreptunghi, trasăm linii orizontale prin care împărțim dreptunghiul în trei părți egale și colorăm două părți, reprezentând partea plină a tăviței.



Pasul 2

Trasăm linii verticale prin care împărțim zona colorată în cinci părți egale, dintre care hașurăm patru, reprezentând fracția din tăviță folosită de Vlad. Prelungind liniile, zona necolorată se împarte și ea în cinci părți egale.



În urma celei de-a doua secționări, dreptunghiul a fost împărțit în $3\times 5=15$ părți egale, din care sunt hașurate $2\times 4=8$ părți. Cuburile folosite de Vlad ocupă $\frac{8}{15}$ din întreaga tăviță.

Observăm că $\frac{8}{15}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$, deci putem scrie că $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$.

IV Fracții ordinare

De reținut

Produsul a două fracții ordinare este o fracție în care:
- numărătorul este egal cu produsul numărătorilor celor două fracții date;
- numitorul este egal cu produsul numitorilor celor două fracții date.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\text{ pentru orice numere naturale } a,b,c,d,\text{ unde } b,d\neq 0.$$

Altfel spus, pentru a înmulți două fracții se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei.

Exemple

1. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}$; **2.** $\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2\cdot 5}{15\cdot 4}=\frac{10}{60}^{(10}=\frac{1}{6}$; **3.** $\frac{9}{5}\cdot\frac{20}{27}=\frac{9\cdot 20}{5\cdot 27}=\frac{180}{135}^{(45}=\frac{4}{3}$.

Observații

1. Simplificarea produsului. Pentru calcule mai rapide, se recomandă să se efectueze simplificările înainte de a calcula produsul numitorilor sau al numărătorilor.

Termenii care se simplifică se barează cu o linie oblică, iar alăturat se scrie câtul obținut prin împărțirea la divizorul cu care se face simplificarea.

Exemple:

1. $\frac{5}{17}\cdot\frac{4}{5}=\frac{5\cdot 4}{17\cdot 5}^{(5}=\frac{\cancel{5}^{1}\cdot 4}{17\cdot\cancel{5}_{1}}=\frac{1\cdot 4}{17\cdot 1}=\frac{4}{17}$; **2.** $\frac{9}{5}\cdot\frac{4}{27}=\frac{\cancel{9}^{1}}{5}\cdot\frac{4}{\cancel{27}_{3}}=\frac{1\cdot 4}{5\cdot 3}=\frac{4}{15}$.

2. Înmulțirea cu numere mixte. Atunci când unul dintre factorii unui produs este o fracție scrisă sub forma unui număr mixt, mai întâi se introduc întregii în fracție, apoi se efectuează înmulțirea. Dacă rezultatul este o fracție supraunitară, se pot scoate apoi întregii din fracție:

Exemple: **1.** $14\cdot 2\frac{5}{21}=14\cdot\frac{2\cdot 21+5}{21}=\cancel{14}^{2}\cdot\frac{47}{\cancel{21}_{3}}=2\cdot\frac{47}{3}=\frac{94}{3}=31\frac{1}{3}$;

2. $4\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{33}=\frac{4\cdot 5+2}{5}\cdot\frac{7}{33}=\frac{\cancel{22}^{2}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{33}_{3}}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3}=\frac{14}{15}$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați produsul dintre suma fracțiilor $2\frac{1}{5}$ și $2\frac{1}{3}$ și diferența fracțiilor $2\frac{1}{8}$ și $\frac{1}{4}$.

Rezolvare:

Suma fracțiilor $2\frac{1}{5}$ și $2\frac{1}{3}$ este $2\frac{1}{5}+2\frac{1}{3}=\frac{11}{5}+\frac{7}{3}=\frac{33}{15}+\frac{35}{15}=\frac{68}{15}$.

Diferența fracțiilor $2\frac{1}{8}$ și $\frac{1}{4}$ este $2\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{17}{8}-\frac{1}{4}=\frac{17}{8}-\frac{2}{8}=\frac{15}{8}$.

Produsul căutat este $\frac{68}{15}\cdot\frac{15}{8}=\frac{68}{8}^{(4}=\frac{17}{2}=8\frac{1}{2}$.

2. Luca mai are $\frac{2}{3}$ din plăcinta preparată de mama lui. La desert, a servit $\frac{3}{8}$ din bucata rămasă. Ce fracție din plăcintă a mâncat? Cât din plăcintă reprezintă bucata rămasă?

Rezolvare:

La desert, Luca a mâncat $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 2}{8\cdot 3}^{(3\cdot 2}=\frac{1}{4}$.

Partea rămasă reprezintă $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$ din plăcintă.

Probleme propuse

1. Efectuați înmulțirile:

a) $3 \cdot \frac{2}{7}$; b) $4 \cdot \frac{7}{31}$; c) $5 \cdot \frac{11}{78}$; d) $7 \cdot \frac{13}{99}$;

e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7}$; f) $\frac{5}{11} \cdot \frac{4}{3}$; g) $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{8}$; h) $\frac{4}{17} \cdot \frac{11}{5}$.

2. Efectuați înmulțirile, scriind rezultatul ca fracție ireductibilă:

a) $16 \cdot \frac{3}{40}$; b) $14 \cdot \frac{5}{84}$; c) $\frac{2}{21} \cdot \frac{7}{5}$; d) $\frac{12}{11} \cdot \frac{5}{36}$;

e) $\frac{14}{27} \cdot \frac{9}{16}$; f) $\frac{11}{65} \cdot \frac{13}{33}$; g) $\frac{42}{35} \cdot \frac{25}{36}$; h) $\frac{24}{35} \cdot \frac{14}{64}$.

3. Introduceți întregii în fracție, calculați și, unde este posibil, simplificați și scoateți întregii din fracția rezultată:

a) $3\frac{1}{5} \cdot 8\frac{3}{4}$; b) $1\frac{2}{7} \cdot 1\frac{13}{15}$; c) $5\frac{5}{8} \cdot 1\frac{7}{25}$; d) $3\frac{3}{13} \cdot 2\frac{11}{14}$.

4. Efectuați:

a) $\frac{12}{20} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{22}$; b) $\frac{22}{36} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{81}{11}$; c) $\frac{50}{26} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{15}$; d) $3\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{13}$.

5. Scrieți fiecare din fracțiile de mai jos ca produs de două fracții ireductibile:

a) $\frac{18}{49}$; b) $\frac{15}{28}$; c) $\frac{1}{8}$; d) $\frac{5}{7}$.

6. Dina își organizează CD-urile în cutii cu înălțimea de 38 cm. Încap într-o cutie 24 de CD-uri cu grosimea de $\frac{3}{2}$ cm?

7. Pentru confecționarea unei perdele se folosesc $4\frac{3}{5}$ metri de material.

a) Arătați că dintr-un un balot de 18 metri de material nu se pot confecționa 4 perdele.
b) Este suficient un balot de 28 de metri de material pentru confecționarea a 6 perdele?

8. Determinați:

a) produsul dintre numărul $\frac{13}{36}$ și suma numerelor $\frac{7}{26}$ și $\frac{1}{13}$;

b) produsul dintre numărul $\frac{6}{31}$ și diferența numerelor $2\frac{1}{5}$ și $1\frac{1}{6}$.

Minitest

1. Efectuați calculele: a) $4 \cdot \frac{1}{8}$; b) $13 \cdot \frac{3}{65}$; c) $7 \cdot 1\frac{1}{14}$.

3 puncte

2. Aduceți la forma ireductibilă: a) $\frac{3}{25} \cdot \frac{5}{9}$; b) $\frac{8}{12} \cdot \frac{9}{28}$; c) $\frac{4}{11} \cdot 2\frac{4}{9}$.

3 puncte

3. Pentru a prepara o porție de sirop pentru baclava sunt necesare $\frac{1}{2}$ kg zahăr, $1\frac{2}{5}$ pahare de apă și $\frac{3}{4}$ lingurițe de esență. Ce cantități sunt necesare pentru a prepara trei porții de sirop?

3 puncte

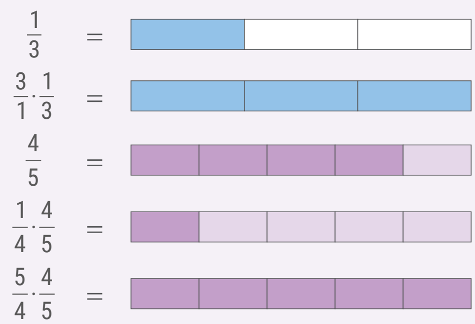
Din oficiu: **1 punct**

Lecția 8 Împărțirea fracțiilor ordinare

8.1. Inversa unei fracții ordinare

Situații problemă

În imaginile alăturate, întregul a fost împărțit în 3 părți egale, respectiv în 5 părți egale.



Ce observăm?
Au loc egalitățile:

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{3}=1,\ \text{respectiv}\ \frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}=1.$$

Mai general, produsul dintre o fracție dată și fracția obținută *schimbând între ei numărătorul și numitorul fracției date* este egal cu unitatea.

De reținut

Inversa fracției ordinare $\frac{a}{b}$, unde a și b sunt numere naturale nenule, este fracția ordinară $\frac{b}{a}$.
Produsul dintre o fracție și inversa ei este egal cu 1:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,\ \text{pentru orice numere naturale}\ a, b\neq 0.$$

Exemple

1. Inversa fracției $\frac{3}{7}$ este fracția $\frac{7}{3}$, iar inversa fracției $\frac{7}{3}$ este fracția $\frac{3}{7}$.

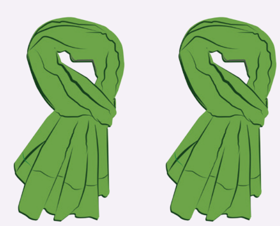
2. Inversa fracției $\frac{1}{3}$ este fracția $\frac{3}{1}$, care este echivalentă cu numărul natural 3.

3. Numărul natural 2 se scrie ca fracție sub forma $\frac{2}{1}$, deci inversul numărului 2 este fracția $\frac{1}{2}$.

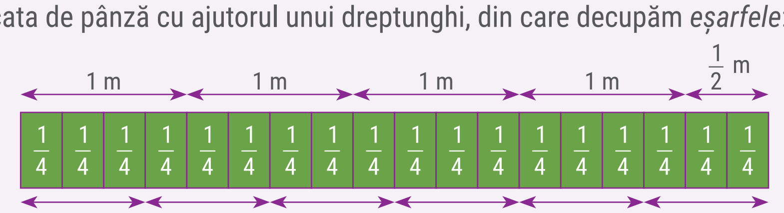
8.2. Împărțirea a două fracții ordinare

Mate practică

Dina și Bianca vor să confecționeze eșarfe pentru echipa de majorete a școlii.
Câte eșarfe se pot realiza dintr-o bucată de pânză cu lungimea de $4\frac{1}{2}$ metri, dacă pentru fiecare eșarfă se utilizează $\frac{3}{4}$ metri?



Rezolvare:
Pentru a rezolva problema, trebuie să aflăm de câte ori se cuprinde fracția $\frac{3}{4}$ în fracția $4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$.
Altfel spus, soluția problemei se află *împărțind* fracția $\frac{9}{2}$ la fracția $\frac{3}{4}$.
Reprezentăm bucata de pânză cu ajutorul unui dreptunghi, din care decupăm *eșarfele*:



Ce observăm?
Numărul de eșarfe n verifică egalitatea: $n\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$.

Prin înmulțirea acestei egalități cu fracția $\frac{4}{3}$, obținem: $n \cdot \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}}_{=1} = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3}$, adică $n = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3}$.

Efectuând calculele, obținem $n = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{36}{6} = \frac{6}{1} = 6$. Așadar, se pot realiza 6 eșarfe.

De reținut

Câtul a două fracții ordinare, dintre care a doua este diferită de zero, este egal cu produsul dintre prima fracție și inversa celei de-a doua fracții:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \text{ unde } b, c, d \neq 0.$$

Exemple

1. $\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{7} = \frac{55}{42}$;

2. $\frac{10}{21} : \frac{5}{7} = \frac{10}{21} \cdot \frac{7}{5} = \frac{10 \cdot 7}{21 \cdot 5}^{(5 \cdot 7} = \frac{2}{3}$;

3. $2 : \frac{16}{7} = 2 \cdot \frac{7}{16} = \frac{2 \cdot 7}{16}^{(2} = \frac{7}{8}$;

4. $6\frac{4}{5} : 17 = \frac{34}{5} : 17 = \frac{34}{5} \cdot \frac{1}{17} = \frac{34}{5 \cdot 17}^{(17} = \frac{2}{5}$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Ce fracție se obține prin împărțirea diferenței fracțiilor $2\frac{4}{9}$ și $\frac{1}{2}$ la suma fracțiilor $\frac{2}{3}$ și $1\frac{11}{27}$?

Rezolvare:

Diferența fracțiilor $2\frac{4}{9}$ și $\frac{1}{2}$ este: $2\frac{4}{9} - \frac{1}{2} = {}^{2)}\frac{22}{9} - {}^{9)}\frac{1}{2} = \frac{44}{18} - \frac{9}{18} = \frac{35}{18}$.

Suma fracțiilor $\frac{2}{3}$ și $1\frac{11}{27}$ este: $\frac{2}{3} + 1\frac{11}{27} = {}^{9)}\frac{2}{3} + \frac{38}{27} = \frac{18}{27} + \frac{38}{27} = \frac{56}{27}$.

Câtul dintre diferență și sumă este: $\frac{35}{18} : \frac{56}{27} = \frac{35}{18} \cdot \frac{27}{56} = \frac{\overset{5}{\cancel{35}}}{\underset{2}{\cancel{18}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{27}}}{\underset{8}{\cancel{56}}} = \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 8} = \frac{15}{16}$.

2. Într-un sac sunt $8\frac{2}{3}$ kilograme de boabe de cafea. Câte pungi de câte $\frac{2}{3}$ kilograme se pot umple dintr-un sac?

Rezolvare:

Numărul pungilor se află împărțind cantitatea de cafea dintr-un sac la cantitatea care intră într-o pungă.

Cum $8\frac{2}{3} : \frac{2}{3} = \frac{26}{3} : \frac{2}{3} = \frac{26}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{26}{2} = 13$, se pot umple 13 pungi de cafea.

Probleme propuse

1. Scrieți inversele următoarelor numere:

a) $\frac{11}{13}$; b) $\frac{16}{7}$; c) $5\frac{2}{9}$; d) $7\frac{1}{7}$.

2. Efectuați împărțirile:

a) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$; b) $\frac{4}{7} : \frac{5}{11}$; c) $\frac{7}{25} : \frac{23}{25}$; d) $\frac{3}{17} : \frac{8}{17}$;

e) $\frac{8}{75} : \frac{11}{25}$; f) $\frac{13}{36} : \frac{13}{11}$; g) $\frac{16}{19} : \frac{16}{47}$; h) $\frac{66}{13} : \frac{33}{5}$.

3. Scrieți rezultatul sub formă de fracție ireductibilă:

a) $\frac{15}{7}:3$; b) $2:\frac{16}{9}$; c) $\frac{16}{27}:\frac{4}{9}$; d) $\frac{42}{55}:\frac{7}{5}$;

e) $\frac{14}{15}:\frac{3}{10}$; f) $\frac{16}{35}:\frac{8}{25}$; g) $\frac{7}{12}:\frac{14}{3}$; h) $\frac{45}{76}:\frac{30}{19}$.

4. Introduceți întregii în fracție, apoi efectuați împărțirile:

a) $4\frac{1}{6}:\frac{5}{4}$; b) $\frac{8}{9}:5\frac{1}{3}$. c) $2\frac{1}{6}:4\frac{1}{3}$; d) $5\frac{1}{7}:3\frac{3}{14}$.

5. a) Determinați o fracție care înmulțită cu $\frac{4}{9}$ dă produsul $\frac{32}{81}$.

b) Produsul dintre o fracție ireductibilă și $1\frac{4}{5}$ este egal cu $1\frac{1}{3}$. Aflați fracția.

6. Determinați:

a) câtul dintre numărul $\frac{31}{12}$ și diferența fracțiilor $3\frac{1}{5}$ și $2\frac{1}{6}$;

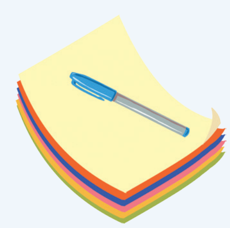
b) câtul dintre suma fracțiilor $\frac{7}{34}$ și $\frac{1}{17}$ și inversa fracției $\frac{17}{72}$;

c) câtul dintre diferența fracțiilor $3\frac{1}{5}$ și $2\frac{1}{2}$ și suma fracțiilor $1\frac{1}{6}$ și $2\frac{1}{3}$.

7. Vlad taie un cablu de sârmă de $2\frac{3}{10}$ metri în bucăți de $\frac{3}{5}$ metri. Aflați:

a) câte bucăți întregi de cablu de lungime $\frac{3}{5}$ metri obține;

b) care este lungimea porțiunii rămase.



8. Eliza confecționează ecusoane de lungime egală cu $7\frac{1}{2}$ cm. Câte ecusoane poate confecționa dintr-o rolă de hârtie de 200 cm lungime?

Minitest

1. Efectuați calculele:

a) $4:\frac{8}{3}$; b) $\frac{18}{7}:9$; c) $\frac{2}{7}:\frac{5}{3}$.

3 puncte

2. Aduceți la forma ireductibilă:

a) $\frac{18}{56}:\frac{27}{35}$; b) $\frac{12}{125}:\frac{9}{25}$; c) $4\frac{2}{7}:\frac{15}{49}$.

3 puncte

3. Dina aleargă câte $\frac{3}{4}$ kilometri în fiecare zi. Câte zile trebuie să alerge pentru a parcurge o distanță totală de $7\frac{1}{2}$ kilometri?

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 9 Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

9.1. Ridicarea la putere a unei fracții ordinare

Situații problemă

Vlad împăturește o coală de hârtie în două părți egale, apoi încă o dată și încă o dată. Despăturind apoi coala, liniile formate prin îndoire împart coala în dreptunghiuri.

Ce fracție din suprafața colii de hârtie reprezintă suprafața fiecărui dreptunghi?

Răspuns:

Suprafața obținută după fiecare împăturire este o doime din suprafața anterioară. Așadar, suprafața unui dreptunghi reprezintă o fracție egală cu $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1\cdot1\cdot1}{2\cdot2\cdot2}=\frac{1^3}{2^3}=\frac{1}{8}$ din suprafața totală.

Ce observăm?

Pentru determinarea rezultatului, am efectuat o înmulțire a trei factori, fiecare fiind o fracție egală cu $\frac{1}{2}$. Se spune că am ridicat fracția $\frac{1}{2}$ la *puterea a treia*.

De reținut

Fie $\frac{a}{b}$ o fracție ordinară (unde *a* și *b* sunt numere naturale, cu $b\neq0$) și $n\geq2$ un număr natural.

Produsul a *n* factori egali cu $\frac{a}{b}$ se numește *puterea* a *n*-a a fracției $\frac{a}{b}$ și se notează $\left(\frac{a}{b}\right)^n$. Avem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ factori}}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Altfel spus, pentru a ridica o fracție la o putere, se ridică la acea putere atât numărătorul, cât și numitorul.

Prin convenție, $\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}$ și $\left(\frac{a}{b}\right)^0=1$.

În scrierea $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, fracția $\frac{a}{b}$ se numește *baza* puterii, iar *n* se numește *exponentul* puterii.

Exemple

1. $\left(\frac{7}{11}\right)^2=\frac{7^2}{11^2}=\frac{49}{121}$;

2. $\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{4^4}{5^4}=\frac{256}{625}$;

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{2^6}{3^6}=\frac{64}{729}$;

4. $\left(\frac{11}{6}\right)^3=\frac{11^3}{6^3}=\frac{1331}{216}$.

9.2. Reguli de calcul cu puteri

Deoarece prin ridicarea la putere a unei fracții se obține o fracție al cărei numărător, respectiv numitor, sunt puteri, cu același exponent, ale unor numere naturale, regulile de calcul cu puteri ale unui număr natural se transferă la fracții, dând naștere unor reguli similare, după cum urmează:

1. Înmulțirea puterilor cu aceeași bază

Pentru a înmulți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se adună exponenții:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}.$$

2. Împărțirea puterilor cu aceeași bază

Pentru a împărți două puteri cu aceeași bază, se păstrează baza și se scad exponenții:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}.$$

3. Puterea unei puteri

Pentru a ridica o putere la o altă putere, se păstrează baza și se înmulțesc exponenții:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}.$$

4. Puterea unui produs. Produsul a două puteri cu același exponent

Pentru a ridica un produs la o putere, se distribuie exponentul fiecărui factor al produsului:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n.$$

Pentru a înmulți două puteri cu același exponent, se înmulțesc bazele și se păstrează exponentul:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n.$$

5. Puterea unui cât. Câtul a două puteri cu același exponent

Pentru a ridica un cât la o putere, se distribuie exponentul fiecărui factor al câtului:

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n.$$

Pentru a împărți două puteri cu același exponent, se împart bazele și se păstrează exponentul:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n.$$

Exemple

1. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^8$; b) $\left(\frac{7}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^7 = \left(\frac{7}{4}\right)^{4+7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{11}$.

2. a) $\left(\frac{9}{4}\right)^{14} : \left(\frac{9}{4}\right)^6 = \left(\frac{9}{4}\right)^{14-6} = \left(\frac{9}{4}\right)^8$; b) $\left(\frac{5}{11}\right)^8 : \left(\frac{5}{11}\right)^7 = \left(\frac{5}{11}\right)^{8-7} = \left(\frac{5}{11}\right)^1 = \frac{5}{11}$.

3. a) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{2 \cdot 4} = \left(\frac{2}{5}\right)^8$; b) $\left[\left(\frac{11}{101}\right)^{99}\right]^0 = \left(\frac{11}{101}\right)^{99 \cdot 0} = \left(\frac{11}{101}\right)^0 = 1$.

4. a) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^3$; b) $\left(\frac{1}{11}\right)^4 \cdot \left(\frac{11}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{11} \cdot \frac{11}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4$.

5. a) $\left(\frac{4}{9} : \frac{2}{7}\right)^5 = \left(\frac{4}{9}\right)^5 : \left(\frac{2}{7}\right)^5$; b) $\left(\frac{3}{13}\right)^6 : \left(\frac{5}{13}\right)^6 = \left(\frac{3}{13} : \frac{5}{13}\right)^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^6$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Aplicând regulile de calcul scrieți sub forma unei singure puteri:

a) produsul fracțiilor: $\left(\frac{144}{49}\right)^6$ și $\left(\frac{7}{9}\right)^{12}$;

b) câtul fracțiilor: $\left(\frac{4}{5}\right)^8$ și $\left(\frac{8}{25}\right)^4$.

Rezolvare:

a) $\left(\frac{144}{49}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{12} = \left[\left(\frac{12}{7}\right)^2\right]^6 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{12} = \left(\frac{12}{7}\right)^{12} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{12} = \left(\frac{12}{7} \cdot \frac{7}{9}\right)^{12} = \left(\frac{4}{3}\right)^{12}$;

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{12} : \left(\frac{8}{25}\right)^4 = \left[\left(\frac{4}{5}\right)^3\right]^4 : \left(\frac{8}{25}\right)^4 = \left(\frac{64}{125}\right)^4 : \left(\frac{8}{25}\right)^4 = \left(\frac{64}{125} : \frac{8}{25}\right)^4 = \left(\frac{64}{125} \cdot \frac{25}{8}\right)^4 = \left(\frac{8}{5}\right)^4$.

2. a) Scrieți fracția $\frac{1331}{729}$ sub forma unei puteri cu baza $\frac{11}{9}$.

b) Scrieți fracția $\frac{243}{1024}$ sub forma unei puteri cu exponentul 5.

Rezolvare:

a) Avem $11^2 = 11 \cdot 11 = 121$ și $11^3 = 11 \cdot 121 = 1\,331$. Cum $9^3 = 81 \cdot 9 = 729$, rezultă $\frac{1331}{729} = \frac{11^3}{9^3} = \left(\frac{11}{9}\right)^3$.

b) Deoarece $243 = 3^5$ și $1\,024 = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5$, obținem $\frac{243}{1024} = \frac{3^5}{4^5} = \left(\frac{3}{4}\right)^5$.

Probleme propuse

1. Calculați:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^7$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; c) $\left(\frac{4}{9}\right)^3$; d) $\left(\frac{11}{7}\right)^3$;

e) $\left(\frac{5}{4}\right)^4$; f) $\left(\frac{3}{3}\right)^{2017}$; g) $\left(\frac{19}{43}\right)^1$; h) $\left(\frac{2011}{2017}\right)^0$.

2. Folosind regulile de calcul, scrieți sub forma unei singure puteri:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7$; b) $\left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{10}$; c) $\left(\frac{11}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{11}{5}\right)^6$;

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{11} : \left(\frac{3}{4}\right)^4$; e) $\left(\frac{8}{3}\right)^9 : \left(\frac{8}{3}\right)^8$; f) $\left(\frac{13}{17}\right)^{22} : \left(\frac{13}{17}\right)^{20}$;

g) $\left[\left(\frac{2}{15}\right)^5\right]^{11}$; h) $\left[\left(\frac{14}{27}\right)^6\right]^4$; i) $\left[\left(\frac{3}{100}\right)^0\right]^{2017}$.

3. Scrieți rezultatul sub forma unei singure puteri:

a) $\left(\frac{35}{95}\right)^6 \cdot \left(\frac{38}{14}\right)^6$; b) $\left(\frac{33}{50}\right)^9 \cdot \left(\frac{25}{22}\right)^9$; c) $\left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{49}{36}\right)^2$;

d) $\left(\frac{7}{17}\right)^5 : \left(\frac{21}{17}\right)^5$; e) $\left(\frac{13}{8}\right)^6 : \left(\frac{39}{32}\right)^6$; f) $\left(4\frac{1}{6}\right)^{12} : \left(11\frac{1}{9}\right)^6$.

4. Scrieți fiecare număr ca putere cu baza indicată:

a) $\frac{1}{256}$ cu baza $\frac{1}{2}$; b) $\frac{16}{81}$ cu baza $\frac{2}{3}$; c) $\frac{125}{216}$ cu baza $\frac{5}{6}$.

5. Scrieți fiecare număr ca putere cu exponentul indicat:

a) $\frac{1}{64}$ cu exponentul 6; b) $\frac{32}{243}$ cu exponentul 5; c) $\frac{343}{216}$ cu exponentul 3.

IV Fracții ordinare

Lecția 10 Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară

10.1. Aflarea unei fracții dintr-un număr natural

Mate practică

Vlad și Luca fac parte din clubul de dezbateri al școlii. Ei observă că, din cei 20 de membri ai clubului, $\frac{3}{5}$ sunt elevi în clasa a VII-a.

Câți elevi de clasa a VII-a sunt în clubul de dezbateri?

Rezolvare:

Vom folosi *metoda reducerii la unitate*. Totalitatea membrilor clubului este un întreg, adică $\frac{5}{5}$ (5 cincimi).

$\frac{5}{5}$ (5 cincimi) din membrii clubului înseamnă 20 de elevi.

$\frac{1}{5}$ (1 cincime) din membrii clubului reprezintă $20:5=4$ elevi.

$\frac{3}{5}$ (3 cincimi) din membrii clubului înseamnă $3\cdot 4=12$ elevi.

Așadar, în clubul de dezbateri sunt 12 elevi de clasa a VII-a.

Ce observăm?

Soluția problemei poate fi obținută rapid efectuând calculul: $\frac{3}{5}\cdot 20=12$.

De reținut

Pentru a afla o fracție dintr-un număr natural, se înmulțește fracția dată cu acel număr.
Așadar, dacă a, b și n sunt numere naturale, cu $b\neq 0$, atunci:

$$\frac{a}{b} \text{ din } n \text{ este egal cu } \frac{a}{b}\cdot n \text{ sau } \frac{a}{b} \text{ din } n \text{ este egal cu } \frac{a\cdot n}{b}.$$

Exemple

1. $\frac{1}{2}$ din 28 este 14, deoarece $\frac{1}{2}\cdot 28=14$;

2. $\frac{1}{9}$ din 81 este 9, deoarece $\frac{1}{9}\cdot 81=9$;

3. $\frac{3}{7}$ din 42 este 18, întrucât $\frac{3}{{}_1\cancel{7}}\cdot \cancel{42}^{6}=18$;

4. $\frac{7}{11}$ din 77 este 49, întrucât $\frac{7}{{}_1\cancel{11}}\cdot \cancel{77}^{7}=49$.

Observație

Pentru a afla un număr dat atunci când se cunoaște o fracție din el, se împarte numărul cunoscut la fracția respectivă.

Exemplu: Dacă $\frac{2}{5}$ dintr-un număr n este egal cu 30, atunci numărul n este $30:\frac{2}{5}=30\cdot\frac{5}{2}=75$.

10.2. Aflarea unei fracții dintr-o fracție

Mate practică

Pentru campania *Un mediu mai curat – o viață mai sănătoasă*, Dina și Bianca intenționează să colecteze $\frac{4}{5}$ kg de PET-uri și ambalaje de plastic. Într-o zi, ele strâng $\frac{5}{8}$ din cantitatea propusă.

Ce cantitate de materiale au colectat fetele în acea zi?

Rezolvare:

Privind cantitatea de materiale propusă ca pe un întreg, aceasta reprezintă $\frac{8}{8}$ (8 optimi).

Cele $\frac{8}{8}$ (8 optimi) din cantitatea propusă corespund cu $\frac{4}{5}$ kg.

Astfel, $\frac{1}{8}$ (o optime) din cantitatea propusă corespunde cu $\frac{4}{5} : 8 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$ kg.

Prin urmare, $\frac{5}{8}$ (5 optimi) din cantitatea propusă corespunde cu $5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ kg.

Așadar, în ziua respectivă, Dina și Bianca au colectat $\frac{1}{2}$ kg de materiale reciclabile.

Ce observăm?

Soluția problemei poate fi obținută rapid efectuând calculul: $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 5}^{(5\cdot 4} = \frac{1}{2}$.

De reținut

Pentru a afla o fracție dintr-o fracție, se efectuează produsul celor două fracții.
Așadar, dacă a, b, c și d sunt numere naturale, cu $b, d \neq 0$, atunci:

$$\frac{a}{b} \text{ din } \frac{c}{d} \text{ este egal cu } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

Exemple

1. $\frac{1}{3}$ din $\frac{1}{2}$ este $\frac{1}{6}$, deoarece $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;
2. $\frac{9}{10}$ din $\frac{10}{11}$ este $\frac{9}{11}$, întrucât $\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{11} = \frac{9}{11}$;
3. $\frac{6}{35}$ din $\frac{7}{3}$ este $\frac{2}{5}$, întrucât $\frac{6}{35} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2}{5}$;
4. $\frac{4}{9}$ din $\frac{9}{4}$ este 1, deoarece $\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4} = 1$.

10.3. Aflarea unui procent dintr-un număr natural

Mate practică

Dintre cei 1 200 de elevi ai unei școli, 40% folosesc autobuzul școlii pentru a veni la cursuri, iar 25% se deplasează cu bicicleta.

a) Câți elevi vin la școală cu autobuzul?

b) Câți elevi vin la școală cu bicicleta?

Rezolvare:

Știm că procentul este o fracție cu numitorul 100. Așadar:

a) numărul elevilor care vin la școală cu autobuzul este:

$$40\% \text{ din } 1200 = \frac{40}{100} \text{ din } 1200 = \frac{40}{100} \cdot 1200 = 480.$$

b) numărul elevilor care vin la școală cu bicicleta este:

$$25\% \text{ din } 1200 = \frac{25}{100} \text{ din } 1200 = \frac{25}{100} \cdot 1200 = 300.$$

De reținut

Pentru a afla un procent $p\%$ dintr-un număr natural (sau dintr-o fracție) se înmulțește fracția $\frac{p}{100}$ cu numărul natural dat (sau cu fracția dată).
Așadar, dacă p, n, a și b sunt numere naturale, cu $b \neq 0$, atunci:

a) $p\%$ din n este egal cu $\frac{p}{100} \cdot n$;

b) $p\%$ din $\frac{a}{b}$ este egal cu $\frac{p}{100} \cdot \frac{a}{b}$.

Exemple

1. 10% din 20 este 2, deoarece $\frac{10}{100} \cdot 20 = 2$;
2. 150% din 40 este 60, întrucât $\frac{150}{100} \cdot 40 = 60$;
3. 40% din 3 este $\frac{6}{5}$, întrucât $\frac{40}{100} \cdot 3 = \frac{6}{5}$;
4. 15% din $\frac{4}{5}$ este $\frac{3}{25}$, deoarece $\frac{15}{100} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{25}$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați numărul natural n știind că $\frac{n}{12}$ din 240 este 140.

Rezolvare:

Înmulțind fracția $\frac{n}{12}$ cu numărul 240, aflăm că $\frac{n}{12}$ din 240 este $\frac{n}{12}\cdot 240=\frac{n\cdot 240^{(12}}{12}=n\cdot 20$.

Așadar, $n\cdot 20=140$, de unde $n=7$.

2. Vlad îi împrumută lui Luca 10 CD-uri cu jocuri electronice, adică $\frac{2}{7}$ din CD-urile cu jocuri pe care le are. Câte CD-uri cu jocuri electronice are Vlad?

Rezolvare:

Trebuie să aflăm un număr atunci când se cunoaște o fracție din el, deci vom efectua o operație de împărțire. Dacă cele 10 CD-uri reprezintă $\frac{2}{7}$ din jocurile lui Vlad, atunci Vlad are $10:\frac{2}{7}=10\cdot\frac{7}{2}=35$ de jocuri.

Probleme propuse

1. Calculați:

a) $\frac{1}{4}$ din 100; b) $\frac{2}{3}$ din 336; c) $\frac{2}{5}$ din 75; d) $\frac{3}{7}$ din 777;

e) $\frac{11}{8}$ din 64; f) $\frac{4}{9}$ din 162; g) $\frac{3}{11}$ din 143; h) $1\frac{1}{13}$ din $1\,001$.

2. Calculați, aducând rezultatul la forma ireductibilă și, unde este cazul, scoateți întregii din fracție:

a) $\frac{1}{3}$ din $\frac{3}{7}$; b) $\frac{3}{4}$ din $\frac{4}{3}$; c) $\frac{7}{5}$ din $\frac{15}{19}$; d) $\frac{5}{12}$ din $\frac{18}{5}$;

e) $\frac{9}{11}$ din $\frac{22}{27}$; f) $\frac{2}{5}$ din $6\frac{3}{7}$; g) $2\frac{3}{11}$ din $\frac{11}{45}$; h) $1\frac{4}{5}$ din $2\frac{1}{27}$.

3. Determinați:

a) 1% din 100; b) 5% din 20; c) 10% din 40; d) 12% din 375;

e) 25% din 256; f) 80% din 405; g) 200% din 208; h) 350% din 72.

4. Calculați 7% din:

a) 1 200 kg; b) 800 litri; c) 12 000 lei; d) 500 km.

5. Eliza are $4\frac{1}{2}$ metri de panglică. Pentru decorarea clasei, folosește $\frac{5}{6}$ din panglica pe care o are. Câți metri de panglică a folosit?

6. Față de stadion, casa lui Vlad se află la $5\frac{1}{4}$ km, iar casa lui Luca, la $\frac{3}{7}$ din această distanță. La câți kilometri se află casa lui Luca de stadion?

7. La un spectacol s-au vândut 2 500 de bilete de trei categorii: 15% cu prețul de 14 lei biletul, 56% cu prețul de 10 lei biletul, iar restul cu prețul de 5 lei biletul. Calculați suma totală încasată.

8. Pe un teren agricol împărțit în 320 de parcele egale s-a cultivat: grâu pe $\frac{7}{16}$ din parcele, porumb pe 30% din parcele, iar pe restul floarea-soarelui. Calculați câte parcele s-au cultivat cu grâu și câte cu floarea-soarelui.

9. O tonă de combustibil costă 4 800 de lei. Prețul se mărește cu 3%. Cât va costa o tonă de combustibil după mărirea prețului?

10. Un televizor cu ecran plat costă 2 400 de lei. La o promoție, se oferă o reducere a prețului cu 12%. Cât costă televizorul în promoție?

11. În drumeția din săptămâna *Școala altfel*, grupul de exploratori a parcurs dimineața 9 km, adică $\frac{3}{5}$ din drumul total. Cât a rămas de parcurs?

12. În prima zi de la lansarea noii cărți a scriitorului favorit al Elizei s-au vândut 24 de volume, adică $\frac{6}{11}$ din toate volumele aduse în librărie. Câte volume au fost aduse la librărie?

13. Pentru ca o tabără de copii să funcționeze pe timp de o lună de vară este necesară suma de 180 000 de lei. Tabelul de mai jos conține cheltuielile în procente. Calculați și scrieți în tabel cheltuielile în lei.

Cheltuieli	masă	întreținere	transport	**Activități**		**Alte cheltuieli**
				culturale	sportive	
în procente	52%	23%	9%	7%	5%	4%
în lei						

14. Dina și mama ei pregătesc, pentru invitați, două feluri de salată: Caesar și Gourmet. Cantitățile prevăzute de rețetă pentru o porție se află în tabel.

ingredient / **Salată**	roșii	salată	ceapă	castraveți	ardei	măsline
Caesar	$\frac{1}{4}$ kg	$\frac{1}{6}$ kg	$\frac{1}{10}$ kg	$\frac{1}{5}$ kg	$\frac{1}{10}$ kg	–
Gourmet	$\frac{1}{5}$ kg	$\frac{1}{5}$ kg	$\frac{}{10}$ kg	–	$\frac{1}{10}$ kg	$\frac{1}{7}$ kg

a) Câte kilograme de castraveți sunt necesare pentru două porții de salată Caesar și trei porții de salată Gourmet?
b) Aflați unde se folosesc mai multe roșii: pentru prepararea a șapte salate Caesar sau pentru prepararea a nouă salate Gourmet?
c) Care preparat cântărește mai mult: o salată Caesar sau o salată Gourmet?

Minitest

1. Determinați:
a) $\frac{1}{8}$ din 1 000 lei; b) $\frac{3}{5}$ din 240 kilograme; c) $\frac{4}{9}$ din 270 metri.

3 puncte

2. Calculați:
a) 17% din 1 700 lei; b) 24% din 25 centimetri; c) 41% din 1 400 grame.

3 puncte

3. În echipa de baschet a școlii sunt 20 de elevi. Trei cincimi dintre ei sunt în clasa a V-a. Câți elevi de clasa a V-a sunt în echipa de baschet?

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Evaluare

Fracții ordinare; fracții subunitare, echiunitare, supraunitare; procente • Fracții echivalente (prin reprezentări) • Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător; reprezentarea pe axa numerelor a unei fracții ordinare

1. Numitorul fracției $\frac{21}{5}$ este:

a) 21 b) 5

2. Numărătorul fracției $\frac{36}{47}$ este:

a) 36 b) 47

3. Dacă fracția $\frac{41}{n}$ este echiunitară, atunci n este:

a) 12 b) 14 c) 41 d) 67

4. Fracția $\frac{n}{16}$ este supraunitară pentru n egal cu:

a) 5 b) 16 c) 18 d) 9

5. Fracția $\frac{n}{16}$ este subunitară pentru n egal cu:

a) 16 b) 5 c) 37 d) 25

6. Dacă $p\% = \frac{16}{100}$, atunci p este egal cu:

a) 100 b) 16 c) 116 d) 84

7. Dacă $\frac{15}{7} < \frac{n}{7}$, atunci n poate fi:

a) 17 b) 11

8. Dacă $\frac{18}{11} < \frac{18}{n}$, atunci n poate fi:

a) 9 b) 13

9. Dacă $\frac{125}{9} = n\frac{8}{9}$ și n este număr natural, atunci n este egal cu:

a) 125 b) 13 c) 117 d) 8

10. Știind că $5\frac{5}{7} = \frac{n}{7}$, atunci n este egal cu:

a) 5 b) 7 c) 40 d) 32

11. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 24 și 16 este egal cu:

a) 48 b) 32 c) 64 d) 80

12. 24 este cel mai mic multiplu comun al numerelor:

a) 5 și 6 b) 9 și 6 c) 4 și 9 d) 3 și 8

13. Cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 24 este egal cu:

a) 18 b) 12 c) 36 d) 4

14. 6 este cel mai mare divizor comun al numerelor:

a) 12 și 36 b) 12 și 18 c) 14 și 18 d) 16 și 21

15. Amplificând fracția $\frac{7}{16}$ cu 5, obținem fracția:

a) $\frac{12}{21}$ b) $\frac{35}{80}$ c) $\frac{2}{11}$ d) $\frac{75}{165}$

16. Simplificând fracția $\frac{24}{39}$ cu 3, obținem fracția:

a) $\frac{4}{13}$ b) $\frac{72}{117}$ c) $\frac{324}{393}$ d) $\frac{8}{13}$

17. Rezultatul calculului $\frac{21}{5} + \frac{8}{5}$ este egal cu:

a) $\frac{29}{5}$ b) $\frac{29}{10}$

18. Rezultatul calculului $\frac{37}{9} - \frac{12}{9}$ este egal cu:

a) $\frac{25}{81}$ b) $\frac{25}{9}$

19. Rezultatul calculului $\frac{5}{21} \cdot \frac{7}{10}$ este egal cu:

a) $\frac{12}{210}$ b) $\frac{35}{210}$

20. Rezultatul calculului $\frac{16}{27} : \frac{32}{9}$ este egal cu:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{2}{3}$

21. Inversa fracției $\frac{31}{25}$ este:

a) $\frac{13}{52}$ b) $\frac{25}{31}$

22. Rezultatul calculului $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ este:

a) $\frac{6}{9}$ b) $\frac{8}{27}$

23. Determinați numerele naturale *a*, *b*, *c*, *d* și *e* din tabelul de mai jos.

Fracții inițiale	Fracții la același numitor
$\frac{3}{4}$ și $\frac{a}{6}$	$\frac{b}{12}$ și $\frac{10}{12}$
$\frac{4}{5}$ și $\frac{7}{15}$	$\frac{c}{15}$ și $\frac{7}{15}$
$\frac{d}{e}$ și $\frac{11}{9}$	$\frac{63}{90}$ și $\frac{110}{90}$

24. Asociați fiecărei fracții din coloana **A** denumirea corespunzătoare din coloana **B**.

A	B
$\frac{34}{16}$	Fracție echiunitară
$\frac{15}{35}$	Fracție subunitară
$\frac{22}{22}$	Fracție supraunitară
	Fracție ireductibilă

25. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (A) și care este fals (F):

a) Fracțiile $\frac{3}{5}$ și $\frac{12}{20}$ sunt echivalente
b) Fracția $\frac{91}{21}$ este ireductibilă
c) $\frac{^{5)}3}{5}=\frac{8}{10}$
d) $\frac{36^{(3}}{81}=\frac{12}{27}$

26. Determinați numerele *a*, *b*, *c* și *d* din tabelul de mai jos.

$\frac{2}{3}$ și $\frac{a}{6}$ fracții echivalente
$\frac{b}{5}$ și $\frac{28}{10}$ fracții echivalente
$\frac{4}{c}$ și $\frac{2}{9}$ fracții echivalente
$\frac{12}{5}$ și $\frac{24}{d}$ fracții echivalente

27. Efectuați:

a) $2:\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{5}:\frac{11}{10}$;

b) $\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2-\left(1\frac{1}{2}\right)^2$;

c) $\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right):\frac{7}{12}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}\right]\cdot\frac{1}{4}:\left(5\cdot\frac{12}{25}-1\frac{1}{3}\right)$;

d) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{50}\right)$.

28. Un biciclist a parcurs un traseu de 240 km în trei zile. În prima zi, a parcurs $\frac{1}{3}$ din lungimea traseului și încă 15 km, în a doua zi 40% din rest și încă 4 km, iar în a treia zi a terminat traseul. Câți kilometri a parcurs biciclistul în a treia zi?

29. O persoană are o sumă *S* de bani. În prima zi cheltuiește $\frac{3}{10}$ din suma *S*, a doua zi $\frac{2}{5}$ din suma *S*, iar a treia zi 25% din *S*. Știind că persoanei îi rămân la final 600 de lei, determinați suma de bani cheltuită în prima zi.

30. Determinați toate fracțiile ordinare de forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$ echivalente cu fracția $\frac{7}{15}$.

Simon Stevin (1548/49 – 1620) a fost un matematician și inginer flamand, activ în mai multe domenii ale științei și tehnicii.

Stevin se referă la introducerea fracțiilor zecimale. În lucrarea sa intitulată *De Thiende* (*Arta zecimalelor*), publicată în 1585, sunt introduse fracțiile unitare și fracțiile egiptene.

Fracțiile zecimale fuseseră utilizate încă de pe vremea matematicienilor islamici, ca Al-Kashi, dar Stevin a fost cel care a consacrat utilizarea acestora. Notația utilizată de Stevin este greoaie, în locul virgulei care separă întregii de zecimale fiind folosit un zero încercuit, iar fiecare zecimală numerotată.

184 ⓪ 5 ① 4 ② 2 ③ 9 ④ 0   Numărul 184,54290 în scrierea lui Simon Stevin

Virgula a fost introdusă abia la începutul secolului al XVII-lea, de către matematicianul german Bartholomaeus Pitiscus.

Unitatea V

Fracții zecimale

Lecția 1	Fracții zecimale; scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub forma de fracții zecimale; transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară
Lecția 2	Aproximări; compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
Lecția 3	Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
Lecția 4	Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule
Lecția 5	Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multe numere naturale; transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate
Lecția 6	Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul; împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară
Lecția 7	Număr rațional pozitiv; ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive
Lecția 8	Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură pentru lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp și unități monetare
Lecția 9	Probleme de organizare a datelor. Frecvență. Grafice cu linii. Media unui set de date statistice
Evaluare	Exerciții și probleme recapitulative

Domeniul de conținut:
NUMERE. ORGANIZAREA DATELOR

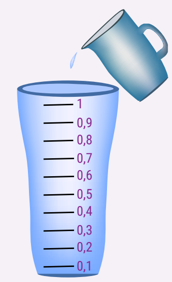
V Fracții zecimale

Lecția 1 Fracții zecimale; scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale; transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară

1.1. Scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale

Situație problemă

Dina observă că poate umple cu 10 căni cu apă un vas gradat, ca în figura alăturată. Ea toarnă în vasul gradat 3 pahare cu apă și observă că apa a ajuns la gradația 0,3.



Analiză:

Un pahar cu apă reprezintă $\frac{1}{10}$ din cantitatea totală ce încape în vas. Trei pahare reprezintă $\frac{3}{10}$ din cantitatea totală ce încape în vas. Concluzia Dinei a fost că $\frac{3}{10}$ este egal cu 0,3.

De reținut

Fracția $\frac{1}{10}$ reprezintă ***o zecime***, se scrie 0,1 și se citește *zero virgulă unu*.

Fracția $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$ reprezintă ***o sutime***, se scrie 0,01 și se citește *zero virgulă zero unu*.

Fracția $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$ reprezintă ***o miime***, se scrie 0,001 și se citește *zero virgulă zero zero unu*.

Regulă

Orice fracție ordinară cu numitorul putere a lui zece se scrie sub formă de **fracție zecimală**, punând o virgulă înaintea unui număr de cifre ale numărătorului, numărate de la dreapta la stânga, egal cu exponentul lui 10 de la numitor. Dacă este necesar, se scriu zerouri în fața numărătorului.

Exemple

1. $\frac{325}{10} = 32,5$; **2.** $\frac{78}{10} = 7,8$; **3.** $\frac{9}{100} = 0,09$; **4.** $\frac{37}{100} = 0,37$;

5. $\frac{1234}{100} = 12,34$; **6.** $\frac{76}{1000} = 0,076$; **7.** $\frac{4\,567}{1000} = 4,567$; **8.** $\frac{7}{10\,000} = 0,0007$.

Observații

1. Amplificând fracția $\frac{3}{10}$ cu 10, 100, 1 000, se obține $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000} = \frac{3\,000}{10\,000}$, adică $0,3 = 0,30 = 0,300 = 0,3000$. În concluzie, dacă adăugăm zerouri după partea zecimală a unei fracții zecimale, obținem aceeași fracție zecimală.

2. Fracția zecimală are două părți despărțite prin virgulă: partea întreagă, formată din numărul din stânga virgulei, și partea zecimală, formată din numărul din dreapta virgulei. Denumirea zecimalelor (a cifrelor din dreapta virgulei) și numărul lor sunt prezentate în tabelul de mai jos, pentru fracțiile zecimale 47,392; 123,75 și 5,234:

Exemple

Fracția zecimală	Cifra zecimilor	Numărul zecimilor	Cifra sutimilor	Numărul sutimilor	Cifra miimilor	Numărul miimilor
47,392	3	473	9	4 739	2	47 392
123,75	7	1 237	5	12 375	0	123 750
5,234	2	52	3	523	4	5 234

1.2. Transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară

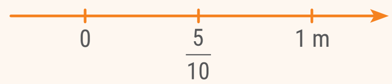
Ce observăm

Fracția zecimală 0,5 este egală cu fracția ordinară $\frac{5}{10}$.

Fracția zecimală 1,5 este egală cu fracția ordinară $\frac{15}{10}$.

Fracția zecimală 0,53 este egală cu fracția ordinară $\frac{53}{100}$.

Fracția zecimală 4,53 este egală cu fracția ordinară $\frac{453}{100}$.



Regulă

Orice fracție zecimală cu un număr finit de zecimale se transformă într-o fracție ordinară cu numărătorul format din numărul natural obținut din fracția zecimală prin eliminarea virgulei și numitorul o putere a lui 10 cu exponentul egal cu numărul de zecimale finite ale fracției.

Exemple

1. Pentru a transforma fracția zecimală 4,35 în fracție ordinară procedăm astfel:
- numărul natural obținut prin eliminarea virgulei este 435, deci numărătorul va fi 435;
- fracția zecimală 4,35 are două zecimale, 3 și 5, deci numitorul va fi $10^2 = 100$.

În concluzie, $4,35 = \frac{435}{100}$.

2. Pentru fracția zecimală 0,123 vom proceda asemănător:
- numărul natural obținut prin eliminarea virgulei este 123, deci numărătorul va fi 123;
- fracția zecimală 0,123 are trei zecimale, 1, 2 și 3, deci numitorul va fi $10^3 = 1\,000$.

În concluzie, $0,123 = \frac{123}{1000}$. În general, $\overline{0,a} = \frac{a}{10}$, $\overline{a,b} = \frac{\overline{ab}}{10}$, $\overline{ab,c} = \frac{\overline{abc}}{10}$, $\overline{0,ab} = \frac{\overline{ab}}{100}$, $\overline{a,bc} = \frac{\overline{abc}}{100}$.

3. Numărul 6,584 se poate scrie sub formă de sumă, astfel: $6,584 = 6 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{4}{1000}$, deoarece

$$6,584 = \frac{6584}{1000} = \frac{6000}{1000} + \frac{500}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{4}{1000} = 6 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100} + \frac{4}{1000}.$$

În general, $\overline{n,abc} = n + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000}$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Determinați numerele a, b, c, d și e știind că $\overline{a3,cd7} = 2 \cdot 10 + b + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{e}{1000}$.

Rezolvare:

$\overline{a3,cd7} = a \cdot 10 + 3 + \frac{c}{10} + \frac{d}{100} + \frac{7}{1000}$.

$a \cdot 10 + 3 + \frac{c}{10} + \frac{d}{100} + \frac{7}{1000} = 2 \cdot 10 + b + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{e}{1000}$. Obținem $a = 2, b = 3, c = 3, d = 4, e = 7$.

2. Determinați numărul natural n, știind că: a) $0,32 = \frac{n}{10^3}$; b) $\frac{n}{5} = 24,6$.

Rezolvare:

a) $0,32 = \frac{n}{10^3}$ sau ${}^{10)}\frac{32}{100} = \frac{n}{1000}$ sau $\frac{320}{1000} = \frac{n}{1000}$, de unde obținem $n = 320$.

b) $\frac{n}{5} = 24,6$ sau $\frac{n}{5} = \frac{246^{(2}}{10}$ sau $\frac{n}{5} = \frac{123}{5}$, de unde obținem $n = 123$.

Probleme propuse

1. Scrieți următoarele fracții zecimale:
a) trei zecimi; b) doi întregi și șapte sutimi; c) patruzeci și trei de mimi;
d) douăzeci și opt miimi; e) șase întregi și șapte sutimi; f) nouă sutimi.

2. Fie numărul 26,784. Rescrieți propozițiile următoare, completând spațiile punctate corespunzător:
a) Cifra zecilor este egală cu … , iar cifra zecimilor este egală cu … .
b) Partea întreagă a numărului este egală cu … , iar partea zecimală este egală cu … .
c) Cifra sutimilor este egală cu … , iar numărul sutimilor este egal cu … .
d) Numărul dat conține … miimi, iar cifra miimilor este egală cu … .

3. Scrieți sub formă de fracție zecimală fracțiile: $\frac{2}{10}, \frac{32}{100}, \frac{32}{10\,000}, \frac{7}{1000}, \frac{2\,567}{100}, \frac{7\,958}{10\,000}, \frac{79}{1000}$.

4. Transformați următoarele fracții zecimale în fracții ordinare: $0{,}02; 1{,}023; 45{,}32; 156{,}003; 7{,}8; 0{,}9$.

5. Precizați în care dintre perechile următoare fracția zecimală este egală cu fracția ordinară: $\left(\frac{234}{10}; 2{,}34\right)$, $\left(0{,}235; \frac{235}{100}\right)$, $\left(\frac{123}{1000}; 0{,}123\right)$, $\left(0{,}0023; \frac{2\,300}{1000}\right)$, $\left(\frac{234}{1000}; 0{,}234\right)$.

6. Amplificați fracțiile, astfel încât să obțineți la numitor o putere a lui 10 și apoi scrieți fracțiile sub formă zecimală: $\frac{3}{25}, \frac{4}{5}, \frac{21}{4}, \frac{3}{125}, \frac{7}{50}, \frac{423}{25}, \frac{497\,358}{2\,500}, \frac{312}{5\,000}, \frac{173\,005}{2\,000}$.

7. Scrieți sub formă de fracție zecimală:
a) $40+3+\frac{5}{10}+\frac{6}{100}$; b) $3\cdot100+0\cdot10+5+\frac{1}{10}+\frac{0}{100}+\frac{7}{1000}$.

8. Determinați numărul natural *n* știind că:
a) $6{,}37=\frac{n}{10^2}$; b) $4{,}187=\frac{4\,187}{10^n}$; c) $1{,}3=\frac{n}{100}$.

Activitate pe grupe

Elevii clasei a V-a se împart în trei grupe. Fiecare grupă primește câte un cartonaș pe care sunt scrise fracții zecimale și fracții ordinare, ca în figura alăturată. Sarcina de lucru este ca elevii să realizeze perechi formate dintr-o fracție zecimală și o fracție ordinară, astfel încât cele două fracții să fie egale.

$\frac{11}{10}$ 2,4 $\frac{2}{5}$ 0,3 1,4
1,1 $\frac{7}{2}$ 0,4
0,03 $\frac{24}{25}$
0,11 0,96 $\frac{3}{100}$

Minitest

1. Transformați în fracții zecimale: a) $\frac{28}{1000}$; b) $\frac{1234}{100}$. **2 puncte**

2. Scrieți sub formă de fracție ordinară: a) 0,034; b) 11,08. **2 puncte**

3. Determinați suma numerelor naturale *a* și *b*, știind că $1{,}12=\frac{a}{50}$ și $4{,}24=\frac{b}{25}$. **2 puncte**

4. Determinați cifrele *a*, *b* și *c*, știind că $\overline{a3{,}92c}=73+\frac{\overline{b2}}{100}+\frac{4}{500}$. **3 puncte**

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 2 Aproximări; compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale

Mate practică

Dina și-a cumpărat o ciocolată, pentru care a plătit 14,75 lei, iar Vlad și-a cumpărat un suc, pentru care a plătit 14,3 lei.
a) Care dintre cei doi copii a plătit mai mult pentru produsul cumpărat?
b) Care dintre cele două prețuri este mai apropiat de 14 lei? Dar de 14,5 lei? Dar de 15 lei?

Rezolvare:
a) Comparăm fracțiile zecimale $14{,}75 = 1\,475$ sutimi $> 1\,430$ sutimi $= 14{,}3$. Pentru compararea celor două prețuri, putem utiliza și transformarea lor în fracții ordinare. Avem $14{,}75 = \frac{1475}{100}$ și $14{,}3 = {}^{10)}\frac{143}{10} = \frac{1430}{100}$.
Deoarece fracțiile au același numitor și $1\,475 > 1\,430$, obținem că Dina a plătit mai mult decât Vlad.

b) Pentru *apropierea de 14,* vom compara diferențele:
$14{,}75 - 14 = \frac{1475-1400}{100} = \frac{75}{100}$, $14{,}3 - 14 = \frac{1430-1400}{100} = \frac{30}{100}$ și, cum $30 < 75$, obținem că 14,3 este mai apropiat de 14.
Asemănător, $14{,}75 - 14{,}5 = \frac{1475-1450}{100} = \frac{25}{100}$, $14{,}5 - 14{,}3 = \frac{1450-1430}{100} = \frac{20}{100}$ și, cum $25 > 20$, obținem că 14,3 este mai apropiat de 14,5, iar 14,75 este mai apropiat de 15.
Spunem că *14 este aproximarea prin lipsă la unități a numărului 14,3*, iar *15 este aproximarea prin adaos a lui 14,75 la unități*.

De reținut

În general, pentru *a compara două fracții zecimale* oarecare, comparăm părțile întregi.
1. Dacă acestea nu sunt egale, mai mare este numărul cu partea întreagă mai mare.

Exemple
a) Dintre numerele 34,12 și 32,988, mai mare este 34,12, deoarece $34 > 32$.
b) Dintre numerele 306,99 și 99,10, mai mare este 306,99, deoarece $306 > 99$.
c) Dintre numerele 123,4 și 12,34, mai mare este 123,4, deoarece $123 > 12$.

2. Dacă părțile întregi sunt egale, se compară, de la stânga la dreapta, zecimalele de același ordin; mai mare este numărul corespunzător zecimalei mai mari din prima pereche de zecimale diferite.

Exemple:
a) Comparând 39,47 cu 39,49, observăm că: $39 = 39$ (părțile întregi), $4 = 4$ (zecimile) și $7 < 9$ (sutimile), deci $39{,}47 < 39{,}49$.
b) Comparând 124,456 cu 124,462, observăm că: $124 = 124$ (părțile întregi), $4 = 4$ (zecimile) și $5 < 6$ (sutimile), deci $124{,}456 < 124{,}462$.
c) Comparând 76,5 cu 76,49, observăm că: $76 = 76$ (părțile întregi) și $5 > 4$ (zecimile), deci $76{,}5 > 76{,}49$.

Ordonarea fracțiilor zecimale se poate face, ca și la numere naturale, astfel:
- crescător (de la mic la mare): $2{,}5 < 3{,}14 < 45{,}18 < 309{,}2 < 6\,005{,}1$;
- descrescător (de la mare la mic): $204{,}9 > 185{,}63 > 23{,}4 > 5{,}9876 > 0{,}74$.

Regulă

În multe situații, pentru a ușura calculele, suntem nevoiți să rotunjim numerele cu care operăm. Rotunjirea este o aproximare prin lipsă sau prin adaos, care se face astfel:
1. citim cifra din dreapta ordinului la care se face rotunjirea;
2. dacă această cifră este 0, 1, 2, 3 sau 4, atunci ea se neglijează; dacă aceasta este 5, 6, 7, 8, 9, atunci se mărește cu o unitate cifra ordinului la care se face rotunjirea.

V Fracții zecimale

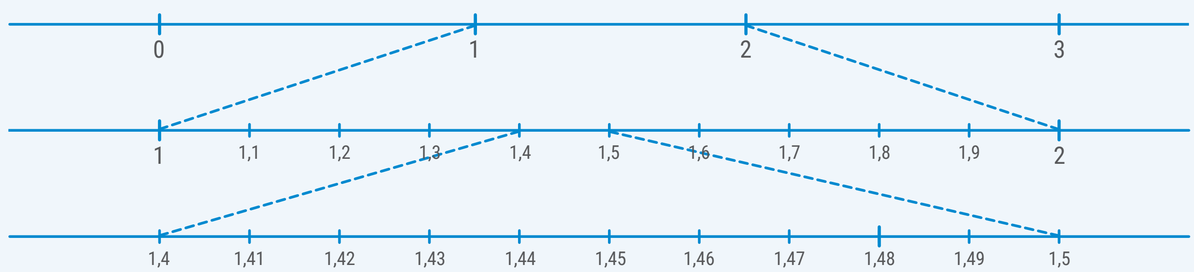
Exemple

Numărul dat	Ordinul la care se face rotunjirea	Cifra din dreapta cifrei ordinului	Este cifra din dreapta mai mică decât 5?	Aproximare prin lipsă/ adaos	Numărul obținut prin rotunjire
13,5	unități	5	nu	Adaos	14
423,7	zeci	3	da	Lipsă	420
18 674,1	sute	7	nu	Adaos	18 700
11 293,5	mii	2	da	Lipsă	11 000
4,279	zecimi	7	nu	Adaos	4,3
0,3651	sutimi	5	nu	Adaos	0,37
8,25346	miimi	4	da	Lipsă	8,253

Gândire critică

Ne propunem să reprezentăm pe axa numerelor numărul 1,48. Împărțim segmentele determinate de diviziunile corespunzătoare numerelor 1 și 2 în zece segmente de lungimi egale. Apoi, fiecare dintre acestea, adică o zecime, le împărțim în câte 10 segmente egale. Identificăm astfel numărul 1,48 între 1,4 și 1,5.

Exemple



Reprezentați pe axa numerelor: 2,5; 3,85.

Observație

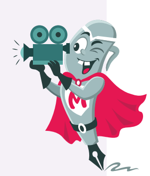
Asemănător cu ordonarea numerelor naturale, dintre două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule reprezentate pe axa numerelor mai mică este fracția zecimală cea mai apropiată de origine.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Scrieți trei fracții zecimale cuprinse între 7,3 și 7,42.

Rezolvare:
Observăm că $7{,}3 = 7{,}30$. Din $30 < 31 < 32 < 37 < 42$, obținem fracțiile cerute $7{,}31$; $7{,}32$ și $7{,}37$.

2. Câte fracții zecimale, cu două zecimale, sunt cuprinse între $6{,}58$ și $6{,}71$?



Rezolvare:
Fracțiile cu două zecimale cuprinse între $6{,}58$ și $6{,}71$ sunt $6{,}59; 6{,}60; 6{,}61; \ldots; 6{,}70$.
Sunt $70 - 59 + 1 = 12$ fracții zecimale.

3. Câte numere naturale de forma $\overline{abc}$ verifică relația $\frac{35}{10} \leq \overline{a,bc} < 4{,}25$?

Rezolvare:
Vom utiliza scrierea sub formă ordinară a fracției $4{,}25 = \frac{425}{100}$ și a fracției $\overline{a,bc} = \frac{\overline{abc}}{100}$.

Evident vom scrie și ${}^{10)}\frac{35}{10} = \frac{350}{100}$. Obținem $\frac{350}{100} \leq \frac{\overline{abc}}{100} < \frac{425}{100}$ sau $350 \leq \overline{abc} < 425$.

Numerele căutate sunt $350, 351, \ldots, 424$. Sunt $424 - 350 + 1 = 75$ de numere.

4. Încadrați între două numere naturale consecutive fracțiile zecimale: a) $0{,}05$; b) $34{,}9$.

Rezolvare:

a) $0 < 0{,}05 < 1$; b) $34 < 34{,}9 < 35$.

5. Scrieți trei fracții zecimale cuprinse între $8{,}3$ și $8{,}4$.

Rezolvare:

Vom scrie $8{,}3 = 8{,}30$ și $8{,}4 = 8{,}40$.

Trei fracții cuprinse între $8{,}30$ și $8{,}40$ sunt, de exemplu, $8{,}31$; $8{,}32$ și $8{,}37$.

Putem utiliza și formele $8{,}3 = 8{,}300$ și $8{,}4 = 8{,}400$, de unde, de exemplu, putem scrie fracțiile $8{,}301$; $8{,}348$ și $8{,}399$.

Probleme propuse

1. Comparați fracțiile zecimale:

a) $1{,}7$ și $1{,}8$; b) $23{,}5$ și $23{,}51$; c) $304{,}2$ și $204{,}2$;
d) $15{,}7$ și $15{,}70$; e) $0{,}34$ și $0{,}44$; f) $0{,}07$ și $0{,}007$.

2. Înlocuiți „□" cu „<", „=" sau „>" pentru a obține propoziții adevărate:

a) $3{,}8$ □ $3{,}4$; b) $5{,}29$ □ $5{,}43$;
c) $13{,}621$ □ $13{,}62$; d) $15{,}39$ □ $15{,}215$.

3. La fiecare dintre următoarele afirmații, scrieți „A" (dacă afirmația este adevărată) sau „F" (dacă afirmația este falsă):

a) $2{,}39 < 2{,}23$; b) $6{,}8 = 6{,}80$; c) $3{,}14 > 3{,}03$;
d) $14{,}132 < 15{,}1$; e) $12{,}169 = 11{,}169$; f) $6{,}782 > 6{,}78$.

4. Scrieți în ordine crescătoare și în ordine descrescătoare următoarele fracții zecimale:

a) $7{,}9$; $0{,}5$; $4{,}25$; $0{,}09$; $63{,}7$; b) $2{,}7$; $3{,}8$; $1{,}7$; $0{,}95$; $0{,}03$; $0{,}45$.

5. Reprezentați pe axa numerelor fracțiile zecimale: $0{,}7$; $1{,}5$; $2{,}3$; $2{,}5$; $3{,}2$; 4; $1{,}3$; 2; $3{,}6$ și $4{,}2$.

6. Rotunjiți fracția zecimală $23{,}145$ la cea mai apropiată sutime, zecime, unitate, zece.

7. Încadrați fiecare fracție zecimală între două numere naturale consecutive:

a) $3{,}12$; b) $0{,}5$; c) $6{,}29$; d) $23{,}24$.

8. Scrieți trei fracții zecimale cuprinse între: a) $7{,}21$ și $7{,}23$; b) $6{,}19$ și $6{,}2$; c) $8{,}342$ și $8{,}343$; d) $7{,}003$ și $7{,}28$.

9. Câte numere naturale n verifică relația $3{,}7 < \dfrac{n}{100} \leq 5{,}27$?

Joc

Dina și Vlad joacă „$\overline{a,b}$". Ei au voie se utilizeze pe parcursul jocului doar fracții zecimale de forma $\overline{a,b}$. Dina spune o fracție zecimală, de exemplu, $2{,}5$. Vlad spune o altă fracție zecimală, diferită de a Dinei, de exemplu, $4{,}3$. Dina trebuie să spună apoi o fracție zecimală cuprinsă între cele două, de exemplu, $3{,}4$. Apoi, Vlad spune o fracție zecimală cuprinsă între $3{,}4$ și $4{,}3$, de exemplu, $3{,}9$. Și așa mai departe. Jocul se oprește atunci când unul dintre jucători nu mai poate preciza nicio fracție zecimală de forma $\overline{a,b}$. Câștigă celălalt jucător. Jucați și voi acest joc, pornind de la numerele $1{,}4$ și $5{,}2$.

Minitest

1. Comparați fracțiile zecimale: a) $1{,}23$ și $1{,}3$; b) $453{,}012$ și $452{,}987$.

2 puncte

2. Scrieți în ordine descrescătoare fracțiile zecimale: $5{,}671$; $56{,}71$; $0{,}5671$ și $567{,}1$.

2 puncte

3. Reprezentați pe axa numerelor fracțiile zecimale $0{,}25$; $7{,}5$; $3{,}4$ și $9{,}75$.

2 puncte

4. a) Rotunjiți fracția zecimală $23{,}72$ la cea mai apropiată zecime.
b) Dați exemple de două fracții zecimale F și f, astfel încât $F < 12{,}35 < f$.
c) Scrieți o fracție zecimală cuprinsă între $7{,}124$ și $7{,}13$.

3 puncte

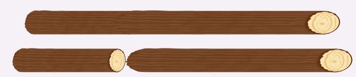
Din oficiu: **1 punct**

Lecția 3 Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

3.1. Adunarea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule

Mate practică

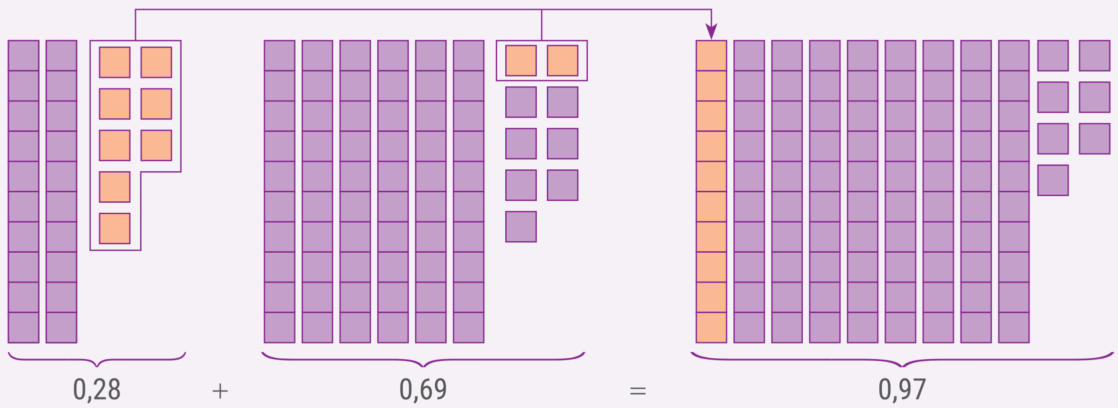
Dina are două bucăți din lemn de lungimi 0,28 m și 0,69 m. Ea așază pe masă cele două bucăți de lemn, una în continuarea celeilalte.



Ce lungime are noua configurație, formată din cele două bucăți de lemn?

Rezolvare:

Pentru a determina lungimea configurației trebuie să efectuăm adunarea $0,28 + 0,69$. Mai jos este reprezentată vizual modalitatea de adunare: $0,28 = 20$ zecimi și 8 sutimi, $0,69 = 60$ zecimi și 9 sutimi. Se adună sutimile cu sutimile și se obțin 17 sutimi, adică 10 zecimi și 7 sutimi. Se adună zecimile și se obțin 90 de zecimi. În final, obținem 90 zecimi și 7 sutimi, adică 0,97. Lungimea configurației este egală cu 0,97 m.



Observăm că, așezând fracțiile sub forma $\begin{array}{r} 0,28 \\ \underline{0,69} \end{array}$ și efectuând adunările, obținem $\begin{array}{r} 0,28\ + \\ \underline{0,69} \\ 0,97 \end{array}$

De reținut

Pentru a aduna două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale nenule, procedăm astfel: așezăm fracțiile zecimale una sub alta, astfel încât partea întreagă a primei fracții să fie sub partea întreagă a celei de-a doua, virgula sub virgulă, zecimile sub zecimi, sutimile sub sutimi ș.a.m.d., apoi adunăm după regula de adunare a numerelor naturale. La final, virgula se coboară la sumă, sub virgulele termenilor.

Exemple

1. $\begin{array}{r} 10,3\ + \\ \underline{4,5} \\ 14,8 \end{array}$ **2.** $\begin{array}{r} 24,25\ + \\ \underline{0,97} \\ 25,22 \end{array}$ **3.** $\begin{array}{r} 75,468\ + \\ \underline{256,309} \\ 331,777 \end{array}$ **4.** $\begin{array}{r} 0,44\quad + \\ 29,107 \\ \underline{451,7529} \\ 481,2999 \end{array}$

3.2. Scăderea fracțiilor zecimale care au un număr finit de zecimale nenule

Mate practică

Vlad cumpără o sticlă de apă plată care costă 3,5 lei. Ce rest primește Vlad dacă a plătit cu o bancnotă de 10 lei?

Rezolvare:

Pentru a determina restul primit de Vlad va trebui să efectuăm scăderea $10 - 3,5$. Vom folosi aceeași tehnică de la adunare, prezentată alăturat.

$\begin{array}{r} 10 = 10,0\ - \\ \underline{3,5} \end{array}$ $\begin{array}{r} 0\ 9\ 10 \\ 10,0\ - \\ \underline{3,5} \\ 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 0\ 9\ 10 \\ 10,0\ - \\ \underline{3,5} \\ 6,5 \end{array}$

De reținut

Pentru a scădea două fracții zecimale care au un număr finit de zecimale nenule, procedăm astfel: așezăm fracțiile zecimale una sub alta, scăzătorul sub descăzut, astfel încât virgula să fie sub virgulă, scădem numerele ca și când ar fi naturale, apoi coborâm, la diferență, virgula sub virgula termenilor.

Exemple

1. $\begin{array}{r} 12,7\ - \\ \underline{5,8} \\ 6,9 \end{array}$ **2.** $\begin{array}{r} 14,75\ - \\ \underline{1,26} \\ 13,49 \end{array}$ **3.** $\begin{array}{r} 0,4853\ - \\ \underline{0,2178} \\ 0,2675 \end{array}$ **4.** $\begin{array}{r} 43,256\ - \\ \underline{21,8} \\ 21,456 \end{array}$

Observații

1. Dacă descăzutul are mai puține zecimale decât scăzătorul, atunci se adaugă zerouri la partea zecimală (la final) pentru a avea același număr de zecimale.

Exemple:

a) $3,60-2,18=3,60-2,18=1,42$

b) $218-12,45=218,00-12,45=205,55$

$\begin{array}{r} 3,60\ - \\ \underline{2,18} \\ 1,42 \end{array}$ $\begin{array}{r} 218,00\ - \\ \underline{12,45} \\ 205,55 \end{array}$

2. Adunarea și scăderea se pot efectua și astfel: se transformă fracțiile zecimale în fracții ordinare, se efectuează calculele cu fracții ordinare, apoi se transformă rezultatul într-o fracție zecimală.

a) $10,3+4,5=\frac{103}{10}+\frac{45}{10}=\frac{148}{10}=14,8;$ b) $24,25+0,97=\frac{2425}{100}+\frac{97}{100}=\frac{2522}{100}=25,22;$

c) $2,7-1,53=\frac{27}{10}-\frac{153}{100}=\frac{270}{100}-\frac{153}{100}=\frac{117}{100}=1,17;$ d) $3,5-2,9=\frac{35}{10}-\frac{29}{10}=\frac{6}{10}=0,6.$

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Dați exemplu de două fracții zecimale finite care adunate dau $11,23$.

Rezolvare:

Strategia este să identificăm o fracție zecimală finită mai mică decât $11,23$. Fie aceasta $9,7$. Efectuăm scăderea $11,23-9,7=1,53$. Așadar, un exemplu de fracții care îndeplinesc condiția dată este $1,53$ și $9,7$.

2. Dacă se măresc descăzutul cu 10 și scăzătorul cu 4,5, atunci să se calculeze cu cât se mărește diferența inițială.

Rezolvare:

Fie $D-S=R$ scăderea inițială. În urma modificării termenilor, noua operație este:

$$(D+10)-(S+4,5)=D+10-S-4,5=D-S+(10-4,5)=R+5,5.$$

Diferența inițială se mărește cu 5,5.

3. Determinați cifrele nenule *a* și *b*, știind că $\overline{a,b}+\overline{b,a}=2,2$.

Rezolvare:

$\overline{a,b}=\frac{\overline{ab}}{10}, \overline{b,a}=\frac{\overline{ba}}{10}$ și $2,2=\frac{22}{10}$. Obținem $\frac{\overline{ab}+\overline{ba}}{10}=\frac{22}{10}$ sau $\overline{ab}+\overline{ba}=22$ sau $11a+11b=22$ sau $11(a+b)=22$ sau $a+b=2$. Cifrele sunt 1 și 1.

Probleme propuse

1. Calculați:

a) $2,3+8,5;$ b) $5,4+3,6;$ c) $4,25+0,14;$

d) $125,4+96,32;$ e) $17,5+32,32+10;$ f) $11,05+4,275+90.$

2. Într-un depozit sunt 126,75 tone de făină și s-au mai adus 24,5 tone. Ce cantitate de făină este acum în depozit?

3. La un aprozar erau 29,72 kg de lămâi și s-au vândut 14,35 kg. Ce cantitate de lămâi a rămas?

4. Calculați:
a) $7{,}8-4{,}3$; b) $11{,}6-5{,}8$; c) $23{,}34-14{,}8$;
d) $41{,}59-16{,}2$; e) $63{,}31-44{,}308$; f) $205{,}4-3{,}49$.

5. Dintr-un balot de stofă de $34{,}5$ m s-au vândut, în prima zi, $14{,}15$ m, iar în a doua zi, cu $2{,}7$ m mai puțin decât în prima zi. Ce lungime are bucata rămasă după a doua zi?

6. Un biciclist a parcurs în prima zi $21{,}25$ km, în a doua zi cu $7{,}3$ km mai mult decât în prima zi, iar în a treia zi cu 10 km mai mult decât în a doua zi. Ce distanță a parcurs biciclistul în cele trei zile?

7. Un tren are de parcurs în 3 ore 208 km. În prima oră a parcurs $70{,}75$ km, iar în a doua oră cu $9{,}5$ km mai puțin decât în prima oră. Ce distanță mai are de parcurs în a treia oră?

8. Calculați:
a) $13{,}5+2{,}7-6{,}8$; b) $5{,}23-2{,}23+14{,}9$; c) $81{,}43+18{,}57-23{,}64$;
d) $456{,}258-208{,}208+54{,}65$; e) $18{,}3458-6{,}0059+10{,}203$; f) $79-23{,}503-4{,}8563+1{,}8$.

9. a) Dați exemplu de două fracții zecimale care adunate dau $7{,}73$.
b) Dați exemplu de două fracții zecimale a căror diferență este $11{,}2$.

10. Determinați cifrele nenule *a* și *b* care fac adevărată relația $\overline{a,b}+\overline{b,a}=3{,}3$.

11. Dacă se mărește descăzutul cu 23,456 și se micșorează scăzătorul cu 1,544, calculați cu cât se mărește diferența inițială.

12. a) Determinați numărul natural $\overline{abc}$ știind că $43{,}1+3{,}9-1{,}2=\dfrac{\overline{abc}}{10}$.

b) Determinați numărul natural $\overline{abcd}$ știind că $5{,}71+12{,}91-7{,}52=\dfrac{\overline{abcd}}{100}$.

13. Vlad și-a cumpărat un joc pentru calculator. Prețul jocului a fost de $41{,}35$ lei. El a plătit cu o bancnotă de 50 de lei. Estimați, fără a efectua scăderea, restul primit de Vlad:
a) mai mic decât 10 lei; b) mai mare decât 10 lei;
c) mai mare decât 20 de lei; d) mai mic decât 5 lei.

Aplicație practică

În tabelul alăturat este prezentată o parte din oferta de prețuri dintr-un magazin cu echipamente sportive. Presupunem că Vlad are 40 de lei. Precizați dacă poate cumpăra:
a) un tricou și un șort;
b) o pereche de ochelari de soare, o minge de fotbal și o pereche de mănuși de portar;
c) un șort, o pereche de ochelari și o minge de fotbal.

Calculați ce rest primește un cumpărător la achiziționarea unui set format din câte un produs din cele 5 prezentate dacă plătește cu o bancnotă de 100 de lei.

Produs	Preț
tricou	24,75 lei
șort	21,15 lei
ochelari de soare	12,45 lei
minge de fotbal	14,99 lei
mănuși de portar	23,48 lei

Minitest

1. Efectuați:
a) $23{,}16+1{,}234$; b) $3{,}1-1{,}98$.
2 puncte

2. Dați exemplu de două fracții a căror diferență este $45{,}8$.
2 puncte

3. Dați exemplu de două fracții a căror sumă este $112{,}25$.
2 puncte

4. Determinați numărul natural $\overline{abcde}$, știind că $21{,}3+\dfrac{67}{10}-3{,}98=\dfrac{\overline{abcde}}{1000}$.
3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 4 Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

Mate practică

Dina parcurge într-o oră 2,6 km. Câți kilometri parcurge Dina în 10 ore? Dar în 6 ore? Dar în 3,8 ore?

Rezolvare:

Dacă într-o oră parcurge 2,6 km, atunci în 10 ore va parcurge

$2,6 \cdot 10 = \frac{26}{10} \cdot 10 = 26$ km.

În 6 ore va parcurge $2,6 \cdot 6 = \frac{26}{10} \cdot 6 = \frac{156}{10} = 15,6$ km.

În 3,8 ore va parcurge $2,6 \cdot 3,8 = \frac{26}{10} \cdot \frac{38}{10} = \frac{988}{100} = 9,88$ km.

4.1. Înmulțirea unei fracții zecimale cu o putere a lui 10

Ce observăm

Pentru a efectua înmulțirea lui 35,78 cu 10, utilizăm transformarea în fracție ordinară a fracției 35,78 și obținem $35,78 \cdot 10 = \frac{3578}{100} \cdot 10 = \frac{3578}{10} = 357,8.$ Observăm că virgula s-a mutat spre dreapta, peste o cifră.

În mod asemănător, $5,389 \cdot 100 = 538,9$ și $0,02597 \cdot 1000 = 25,97$.

Regulă

Înmulțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule cu o putere a lui 10 se face mutând virgula spre dreapta peste atâtea cifre câte arată exponentul lui 10 (dacă nu sunt cifre suficiente la partea zecimală, se completează cu zerouri).

Exemple

1. $0,073 \cdot 10 = 0,73$;
2. $0,073 \cdot 100 = 7,3$;
3. $0,073 \cdot 1\,000 = 73$;
4. $0,073 \cdot 10\,000 = 730$;
5. $124,98 \cdot 10 = 1\,249,8$;
6. $3,673 \cdot 100 = 367,3$.

4.2. Înmulțirea unei fracții zecimale cu un număr natural

Ce observăm

Înmulțirea $2,35 \cdot 3$ se poate efectua ca o adunare repetată:

$$2,35 \cdot 3 = 2,35 + 2,35 + 2,35 = 7,05$$

sau, mai simplu, înmulțim 235 de sutimi cu 3 și obținem 705 sutimi, adică 7,05.

Asemănător, avem $3,7 \cdot 4 = 3,7 + 3,7 + 3,7 + 3,7 = 14,8$ sau înmulțim 37 de zecimi cu 4 și obținem 148 de zecimi, adică 14,8.

Regulă

Pentru a înmulți *o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule cu un număr natural*, se înmulțesc numerele ca și când ar fi numere naturale (fără a ține seama de virgulă), iar la produs se despart prin virgulă, numărând de la dreapta spre stânga, atâtea zecimale câte are fracția zecimală.

Exemple

1.
$$\begin{array}{r} 2,84\ \cdot \\ 7 \\ \hline 19,88 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 0,083\ \cdot \\ 11 \\ \hline 0083\ + \\ 0083 \\ \hline 0,913 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 44,21\ \cdot \\ 35 \\ \hline 22\,105\ + \\ 13\,263 \\ \hline 1\,547,35 \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{r} 0,003\ \cdot \\ 21 \\ \hline 0003\ + \\ 006 \\ \hline 0,063 \end{array}$$

V Fracții zecimale

Regulă

Pentru a înmulți două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule, se înmulțesc numerele neținând seama de virgulă, ca și când ar fi naturale, iar la rezultat se despart prin virgulă, numărând, de la dreapta spre stânga, atâtea cifre câte zecimale au împreună cele două fracții.

Exemple

1.
$$\begin{array}{r} 45{,}2\ \cdot \\ 3{,}7 \\ \hline 3164\ + \\ 1356 \\ \hline 167{,}24 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 4{,}51\ \cdot \\ 0{,}314 \\ \hline 1804\ + \\ 451 \\ 1353 \\ \hline 1{,}41614 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} 205{,}409\ \cdot \\ 0{,}23 \\ \hline 616227\ + \\ 410818 \\ \hline 47{,}24407 \end{array}$$

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. La un magazin s-au adus 60 de saci cu făină a câte 45,75 kg fiecare și 40 de saci cu făină a câte 38,5 kg fiecare. Ce cantitate de făină s-a adus în total?

Rezolvare:
Determinăm cantitatea de făină din cei 60 de saci: $60 \cdot 45{,}75 = 2745$ kg.
Determinăm cantitatea de făină din cei 40 de saci: $40 \cdot 38{,}5 = 1540$ kg.
Cantitatea totală adusă a fost: $2745 + 1540 = 4285$ kg.

2. Un turist are de parcurs un traseu de 20 km. În prima zi parcurge 0,75 din lungimea traseului, iar restul traseului, în a doua zi. Determinați câți kilometri a parcurs turistul în a doua zi.

Rezolvare:
A calcula o fracție dintr-un număr înseamnă a înmulți fracția cu numărul respectiv. În cazul nostru, turistul a parcurs în prima zi $0{,}75 \cdot 20 = 15$ km. În a doua zi, turistul a parcurs $20 - 15 = 5$ km.

3. Utilizând comutativitatea înmulțirii, efectuați cât mai rapid:
a) $8 \cdot 13{,}2 \cdot 125$; b) $2 \cdot 0{,}25 \cdot 4 \cdot 0{,}5$; c) $25 \cdot 0{,}4 \cdot 11{,}5$.

Rezolvare:
a) $8 \cdot 13{,}2 \cdot 125 = 8 \cdot 125 \cdot 13{,}2 = 1000 \cdot 13{,}2 = 13200$;
b) $2 \cdot 0{,}25 \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}25 \cdot 4 = 1 \cdot 1 = 1$;
c) $25 \cdot 11{,}5 \cdot 0{,}4 = 25 \cdot 0{,}4 \cdot 11{,}5 = 10 \cdot 11{,}5 = 115$.

4. Scrieți următoarele fracții zecimale ca un produs dintre o fracție zecimală și o putere a lui 10:
a) 73,5; b) 128,03; c) 12 451,053.

Rezolvare:
a) $73{,}5 = 7{,}35 \cdot 10^1 = 0{,}735 \cdot 10^2 = 0{,}0735 \cdot 10^3$;
b) $128{,}03 = 12{,}803 \cdot 10^1 = 1{,}2803 \cdot 10^2 = 0{,}12803 \cdot 10^3$;
c) $12\,451{,}053 = 1\,245{,}1053 \cdot 10 = 124{,}51053 \cdot 10^2 = 12{,}451053 \cdot 10^3$.

Probleme propuse

1. Calculați:
a) $2{,}3 \cdot 10$; b) $1{,}73 \cdot 10$; c) $0{,}03 \cdot 100$; d) $12{,}51 \cdot 100$;
e) $495{,}37 \cdot 100$; f) $0{,}253 \cdot 1000$; g) $4{,}20035 \cdot 10000$; h) $0{,}002 \cdot 10\,000$.

2. Calculați:
a) $1{,}5 \cdot 4$; b) $2{,}75 \cdot 3$; c) $24{,}21 \cdot 17$;
d) $8{,}004 \cdot 56$; e) $125{,}27 \cdot 88$; f) $53{,}702 \cdot 65$.

3. a) Un corn cântărește 0,079 kg. Cât cântăresc 13 cornuri?
b) Într-o călimară sunt 0,023 l de cerneală. Ce cantitate de cerneală se află în 12 călimări?

4. Calculați:

a) $0{,}7 \cdot 10 \cdot 3{,}8$; b) $2{,}53 \cdot 11 \cdot 0{,}8$; c) $8{,}5 \cdot 23 \cdot 0{,}753$;
d) $0{,}431 \cdot 8 \cdot 2{,}56$; e) $12 \cdot 2{,}7 \cdot 0{,}02$; f) $48 \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}564$.

5. Calculați:

a) $1{,}5 \cdot 6$; b) $8{,}4 \cdot 10$; c) $72{,}56 \cdot 5$; d) $14{,}052 \cdot 8$;
e) $44{,}32 \cdot 1{,}5$; f) $4{,}3 \cdot 0{,}25$; g) $7{,}29 \cdot 0{,}7$; h) $0{,}17 \cdot 100 \cdot 2{,}8$.

6. a) La un magazin s-au vândut dimineață $92{,}55$ m de stofă, iar după-amiază, de $2{,}5$ ori mai mult. Câți metri de stofă s-au vândut, în total, în acea zi?

b) Un manual de matematică pentru clasa a V-a cântărește $0{,}483$ kg. Cât va cântări un pachet format din 12 manuale dacă ambalajul cântărește $0{,}244$ kg?

7. Unul dintre factorii unei înmulțiri de doi factori este cuprins între 2,5 și 2,8, iar celălalt, între 6,3 și 7,5. Dați un exemplu de numere naturale între care este cuprins produsul celor doi factori.

8. Calculați:

a) $3{,}7 \cdot (2{,}59 + 2{,}41)$; b) $6{,}12 \cdot (4{,}23 - 4{,}03)$;
c) $(12{,}5 + 2{,}5) \cdot (10 - 0{,}9)$; d) $(6{,}12 - 5{,}93) \cdot (78{,}124 + 21{,}876)$.

9. Utilizând comutativitatea înmulțirii, efectuați cât mai rapid:

a) $2 \cdot 0{,}1 \cdot 5$; b) $5 \cdot 2{,}7 \cdot 2$; c) $3{,}5 \cdot 2 \cdot 1{,}6 \cdot 5$;
d) $4 \cdot 5{,}34 \cdot 25$; e) $6{,}24 \cdot 25 \cdot 0{,}7 \cdot 4$; f) $2{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 0{,}2 \cdot 5$.

10. Identificați, pentru fiecare pereche din coloana A, un număr din coloana B care să reprezinte suma, diferența sau produsul numerelor din perechea aflată în coloana A:

A	B
(4,2; 3,14)	4,293
(5,3; 0,81)	5,381
(12,6; 4,08)	1,06
	16,68

11. Se consideră fracțiile zecimale a și b, astfel încât $1{,}4 < a < 1{,}6$ și $2{,}4 < b < 2{,}6$. Determinați numărul natural n, știind că $n < a \cdot b < n + 2$.

12. Produsul numerelor a și b este egal cu $9{,}45$. Mărind numărul a cu 1, produsul numerelor devine $12{,}95$. Determinați numărul b.

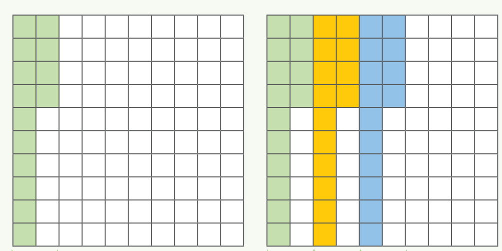
13. Scrieți următoarele fracții zecimale ca un produs dintre o fracție zecimală și o putere a lui 10:

a) $6{,}51$; b) $18{,}33$; c) $378{,}123$.

14. Se consideră o operație *magică* notată „⊙“, astfel: $x \odot y = (x + y) \cdot (x - y)$, unde x și y sunt fracții zecimale finite. Utilizând modelul propus, calculați $4{,}3 \odot 2{,}5$. **Model:** $1{,}2 \odot 0{,}9 = (1{,}2 + 0{,}9) \cdot (1{,}2 - 0{,}9) = 2{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}63$.

Activitate pe grupe

Pentru realizarea sarcinii de lucru avem nevoie de 3 creioane de culori diferite (verde, galben și albastru) și de un pătrat format dintr-o rețea de 100 de pătrățele. Vrem să calculăm $3 \cdot 0{,}14$. Fracția zecimală 0,14 este egală cu 14 sutimi, iar reprezentarea ei este formată din 14 pătrățele. Vom colora cu cele trei culori câte 14 pătrățele. Vom obține 42 de pătrățele. Multiplicând cele 14 pătrățele obținem 42 de pătrățele, adică 42 de sutimi. În concluzie, $3 \cdot 0{,}14 = 0{,}42$. Utilizând aceeași metodă, calculați $2 \cdot 0{,}18$.



Minitest

1. Efectuați: a) $123{,}16 \cdot 10$; b) $50{,}07 \cdot 1000$.

2 puncte

2. Determinați numărul natural n, știind că $n = 34{,}16 \cdot 5 - 11{,}8$.

2 puncte

3. Dați un exemplu de număr natural cuprins între $6{,}32 \cdot 1{,}3$ și $6{,}23 \cdot 1{,}9$.

2 puncte

4. Un călător are de parcurs un drum de 36 km. În prima zi parcurge $0{,}25$ din drum, în a doua zi $0{,}4$ din drum, iar în a treia zi restul drumului. Determinați câți kilometri parcurge în a treia zi.

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 5 Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multe numere naturale; transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate

5.1. Împărțirea unui număr natural la 10, 100, 1000 cu rezultat fracție zecimală

Mate practică

Vlad a cumpărat 10 bomboane pentru care a plătit 5 lei, 100 de rezerve pentru stilou pentru care a plătit 30 de lei și un set de 1 000 de capse pentru care a plătit 9 lei. Calculați prețul unei bomboane, prețul unei rezerve și al unei capse.

Rezolvare:
Pentru a calcula prețul fiecărui obiect va trebui să împărțim suma plătită pe fiecare set la 10, 100 și respectiv 1 000.

Prețul unei bomboane este egal cu $5 : 10$ sau 50 zecimi $: 10 = 5$ zecimi, adică 0,5 lei.

Prețul unei rezerve este egal cu $30 : 100$ sau 300 zecimi $: 100 = 3$ zecimi, adică 0,3 lei.

Prețul unei capse este egal cu $9 : 1\,000$ sau $9\,000$ miimi $: 1\,000 = 9$ miimi, adică 0,009 lei.

La împărțirea cu 10 a lui 5, de fapt, am mutat virgula de la dreapta spre stânga peste o cifră ($5 = 5{,}0$ și $5{,}0 : 10 = 0{,}5$). La împărțirea cu 100 am mutat virgula de la dreapta la stânga peste două cifre, iar la împărțirea cu 1 000 peste 3 cifre.

De reținut

Orice număr natural n se poate scrie sub forma unei fracții zecimale, astfel: $n{,}0$; $n{,}00$; $n{,}000$ etc.

Pentru a împărți un număr natural la o putere a lui 10, se mută virgula spre stânga peste un număr de cifre egal cu exponentul puterii lui 10.

Exemple

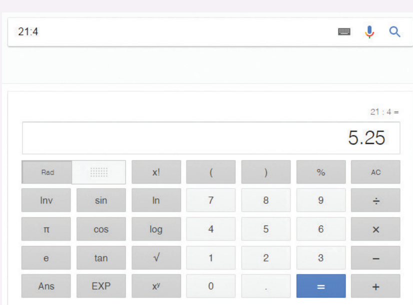
1. $24 : 10 = 2{,}4$; **2.** $7 : 100 = 0{,}07$; **3.** $15 : 1\,000 = 0{,}015$;
4. $234 : 10 = 23{,}4$; **5.** $234 : 1\,000 = 0{,}234$; **6.** $234 : 100 = 2{,}34$.

5.2. Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală

Pentru a împărți două numere naturale, se procedează astfel: se împarte mai întâi partea întreagă la numărul dat. Dacă împărțirea nu este exactă, se adaugă virgula după deîmpărțit, se adaugă zerouri și se scrie virgula la cât, apoi se continuă împărțirea ca la numere naturale, fără a ține cont de virgula de la deîmpărțit.

Mate practică

Dina folosește un motor de căutare pe internet pentru a afla răspunsul la următoarea întrebare „21 : 4“. Obține următorul răspuns:



Cum s-a procedat pentru a se ajunge la 5,25?

Ce observăm

Vom utiliza faptul că orice număr natural se poate scrie ca o fracție zecimală plasând virgula în dreapta numărului și adăugând oricâte zerouri sunt necesare: $5 = 5{,}00000\ldots$; $214 = 214{,}00000\ldots$; $17 = 17{,}000\ldots$.
La efectuarea împărțirilor cu rezultat fracție zecimală, adăugarea zerourilor după virgulă este o condiție esențială. Pentru efectuarea împărțirii lui 21 la 4 procedăm astfel:

$$\begin{array}{rr|l} 2 & 1 & 4 \\ \cline{3-3} 2 & 0 & 5 \\ \cline{1-2} = & 1 & \end{array}$$

Pasul 1

$$\begin{array}{rrr|l} 2 & 1, & 0 & 4 \\ \cline{4-4} 2 & 0 & & 5{,}2 \\ \cline{1-2} = & 1 & 0 & \\ & & 8 & \\ \cline{2-3} & = & 2 & \end{array}$$

Pasul 2

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 1, & 0 & 0 & 4 \\ \cline{5-5} 2 & 0 & & & 5{,}25 \\ \cline{1-2} = & 1 & 0 & & \\ & & 8 & & \\ \cline{2-3} & = & 2 & 0 & \end{array}$$

Pasul 3

Am obținut $21 : 4 = 21{,}00 : 4 = 5{,}25$. Asemănător, obținem:

1. $\frac{3}{16} = 3 : 16 = 0{,}1875$, iar $16 = 2^4$;

2. $\frac{641}{125} = 641 : 125 = 5{,}128$, iar $125 = 5^3$;

3. $\frac{4578}{100} = 4578 : 100 = 45{,}78$, iar $100 = 2^2 \cdot 5^2$;

4. $\frac{3}{40} = 3 : 40 = 0{,}075$, iar $40 = 2^3 \cdot 5$.

Spunem că am transformat fracțiile ordinare $\frac{3}{16}, \frac{641}{125}, \frac{4578}{100}, \frac{3}{40}$ în fracțiile zecimale $0{,}1875$; $5{,}128$; $45{,}78$ respectiv $0{,}075$.

Regula 1
Prin împărțirea a două numere naturale în care împărțitorul nu are alți divizori primi în afara lui 2 și/sau a lui 5, se obține *o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule*.

5.3. Periodicitate

Ce observăm

Să analizăm următoarele împărțiri:

1. $\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}33333\ldots \overset{\text{notație}}{=} 0{,}(3)$ și citim *zero virgulă perioadă 3* (zecimala 3 se repetă la cât de un număr nedeterminat de ori);

2. $\frac{40}{7} = 40 : 7 = 7{,}714285714285\ldots = 7{,}(714285)$ și citim *șapte virgulă perioadă 714 285* (zecimalele 714 285 se repetă la cât de un număr nedeterminat de ori);

3. $\frac{47}{27} = 47 : 27 = 1{,}740740\ldots = 1{,}(740)$.

Regula 2
Prin împărțirea a două numere naturale în care împărțitorul nu se divide nici cu 2, nici cu 5, se obține *o fracție zecimală periodică simplă* (numărul/numerele care se repetă încep imediat după virgulă).

Ce observăm

Să analizăm următoarele împărțiri:

1. $\frac{35}{6} = 35 : 6 = 5{,}8333\ldots = 5{,}8(3)$;

2. $\frac{17}{55} = 17 : 55 = 0{,}3090909\ldots = 0{,}3(09)$;

3. $\frac{47}{12} = 47 : 12 = 3{,}91666\ldots = 3{,}91(6)$;

4. $\frac{53}{22} = 53 : 22 = 2{,}4090909\ldots = 2{,}4(09)$.

Regula 3
Prin împărțirea a două numere naturale în care împărțitorul este divizibil cu cel puțin unul dintre numerele 2 și 5 și are cel puțin un alt divizor prim în afară de 2 sau 5 se obține o *fracție zecimală periodică mixtă* (numărul/numerele care se repetă nu încep imediat după virgulă).

5.4. Media aritmetică

Mate practică

Luca a obținut la geografie, în semestrul I, media 9, iar în semestrul al II-lea, media 10. Calculați media anuală obținută de Luca la geografie.

Rezolvare:

Modalitatea de calcul a mediei anuale este următoarea: se adună cele două medii obținute în cele două semestre, iar rezultatul se împarte la 2.

Așadar, media anuală va fi $(9+10):2=9{,}50$. Spunem că media anuală este media aritmetică a celor două medii obținute de Luca în semestrul I și semestrul al II-lea.

De reținut

Media aritmetică a două numere este egală cu semisuma acestora $m_a=\dfrac{a_1+a_2}{2}$.

Media aritmetică a trei numere este egală cu $m_a=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$.

Media aritmetică a două sau mai multor numere naturale este egală cu:

$$m_a=\frac{\text{suma numerelor}}{\text{numărul numerelor}}.$$

Exemple

1. Media aritmetică a numerelor 6 și 8 este egală cu $m_a=\dfrac{6+8}{2}=14:2=7$.

2. Media aritmetică a numerelor 7, 9 și 15 este egală cu $m_a=\dfrac{7+9+15}{3}=31:3=10,(3)$.

3. Media aritmetică a numerelor 4, 5, 11 și 13 este $m_a=\dfrac{4+5+11+13}{4}=33:4=8{,}25$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Fie fracția $a=\dfrac{13n+6}{6n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care a este o fracție zecimală finită.

Rezolvare:

Pentru $n=1$ obținem $a=\dfrac{19}{6}$, se transformă în fracție zecimală periodică mixtă. Dacă $n=2$, $a=\dfrac{8}{3}$, se transformă în fracție zecimală periodică simplă. Pentru $n=3$, $a=\dfrac{45}{18}=\dfrac{5}{2}=2{,}5$ este fracție zecimală finită. În concluzie, $n=3$.

2. Media aritmetică a patru numere este 23,25, iar media aritmetică a altor cinci numere este 14,2. Calculați media aritmetică a celor nouă numere.

Rezolvare:

Avem: $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=23{,}25$ de unde obținem $a_1+a_2+a_3+a_4=93$

și $\dfrac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{5}=14{,}2$, de unde obținem $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=71$.

Atunci $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{4+5}=\dfrac{93+71}{9}=\dfrac{164}{9}=18,(2)$.

3. Se consideră numărul $a=4{,}3(35)$.

a) Determinați a 2017-a zecimală a lui a.

b) Determinați suma primelor 100 de zecimale ale lui a.

Rezolvare:

a) $2017-1=2016$, $2016:2=1008$ rest 0, deci a 2017-a zecimală este 5.

b) $S=3+49(3+5)+3=398$.

4. Dați exemple de numere naturale n, astfel încât fracția ordinară $\frac{9}{4+n}$ să se transforme în:
a) fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule.
b) fracție zecimală periodică simplă.
c) fracție zecimală periodică mixtă.

Rezolvare:
a) Pentru $4+n=10$ obținem $n=6$.
b) Pentru $4+n=11$ obținem $n=7$.
c) Pentru $4+n=22$ obținem $n=18$.

5. Scrieți următoarele fracții zecimale ca un cât dintre o fracție zecimală și o putere a lui 10:
a) $24{,}537$; b) $102{,}0425$; c) $1\,122{,}33445$.

Rezolvare:
Utilizând regula de la împărțirea fracțiilor zecimale la 10, 100, 1 000 obținem:
a) $24{,}537=245{,}37:10^1=2\,453{,}7:10^2=24\,537:10^3$.
b) $102{,}0425=1\,020{,}425:10^1=10\,204{,}25:10^2=102\,042{,}5:10^3$.
c) $1\,122{,}33445=11\,223{,}3445:10^1=112\,233{,}445:10^2=1\,122\,334{,}45:10^3$.

Probleme propuse

1. Efectuați următoarele împărțiri:
a) $23:5$; b) $85:4$; c) $14:20$; d) $7:25$;
e) $59:50$; f) $472:10$; g) $731:200$; h) $64:1\,000$.

2. Scrieți sub formă de fracție zecimală:
$$\frac{8}{10};\ \frac{5}{3};\ \frac{23}{5};\ \frac{41}{2};\ \frac{17}{4};\ \frac{29}{9};\ \frac{44}{30};\ \frac{47838}{500};\ \frac{76}{25};\ \frac{25}{12};\ \frac{68309}{125};\ \frac{43}{625}.$$

3. Efectuați următoarele împărțiri:
a) $7:6$; b) $37:15$; c) $25:9$; d) $311:12$;
e) $72:100$; f) $37:1\,000$; g) $79:40$; h) $329:3$.

4. Calculați media aritmetică a numerelor:
a) 12 și 36; b) 20; 34 și 42; c) 2,4 și 6,6;
d) 8,11 și 7,29; e) 0,03 și 4,85; f) 2,1; 3,6 și 5,7.

5. Media aritmetică a două numere este 21,35, iar unul dintre numere este 18,3. Determinați celălalt număr.

6. Media aritmetică a trei numere este 7,14. Calculați suma celor trei numere.

7. Precizați care dintre fracțiile ordinare de mai jos se transformă în fracții zecimale periodice simple și care în fracții zecimale periodice mixte:
$$\frac{3}{4};\ \frac{8}{9};\ \frac{5}{6};\ \frac{1}{13};\ \frac{2}{45};\ \frac{17}{100};\ \frac{239}{17};\ \frac{45}{43};\ \frac{1}{62};\ \frac{9}{125};\ \frac{701}{20};\ \frac{37}{15};\ \frac{403}{600};\ \frac{4}{100};\ \frac{25}{75}.$$

8. Dați exemple de numere naturale n, astfel încât fracția ordinară $\frac{7}{10+n}$ să se transforme în:
a) fracție zecimală finită; b) fracție zecimală periodică simplă; c) fracție zecimală periodică mixtă.

9. Fie fracția $\frac{7+n}{60}$, $n\in\mathbb{N}$. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care fracția se transformă în:
a) fracție zecimală finită; b) fracție zecimală periodică simplă; c) fracție zecimală periodică mixtă.

10. Se consideră numărul $a=4{,}3(35)$.
a) Determinați a 2012-a zecimală a lui a.
b) Determinați suma primelor 100 de zecimale ale lui a.

11. Scrieți următoarele fracții zecimale ca un cât dintre o fracție zecimală și o putere a lui 10:
a) $32{,}126$; b) $25{,}48$; c) $672{,}9873$.

12. La sfârșitul semestrului, Bianca are la istorie notele 8, 9, 7. Calculați media Biancăi la istorie pe acest semestru.

13. Calculați media aritmetică a numerelor:

a) 12 și 18; b) 204 și 305; c) 7 și 8,4;

d) 9 și 14,32; e) 10,5 și 47,34; f) 10; 12 și 30,2.

14. a) Media aritmetică a două numere este 14,75, iar unul dintre numere este 8,4. Determinați celălalt număr.

b) Media aritmetică a 100 de numere este 47,58. Aflați suma celor 100 de numere.

c) Determinați numărul x, astfel încât media aritmetică a numerelor 21; 14,4; 34,6 și x să fie 29.

15. Luca are trei note la geografie, din care îi iese media 6. El mai obține la o lucrare scrisă nota 10. Ce medie va avea Luca la geografie?

16. La un test, elevii unei clase a V-a au obținut notele:

6, 8, 5, 10, 9, 8, 7, 4, 6, 9, 10, 8, 7, 7, 5, 10, 9, 9, 6, 8, 10, 10, 5, 4.

a) Care este media clasei obținută la acel test?

b) Găsiți o metodă rapidă de calculare a mediei clasei la acel test.

17. Media aritmetică a patru numere este 33. Determinați numerele, știind că al doilea este cu 18 mai mare decât primul, al treilea este dublul primului, iar al patrulea este egal cu media aritmetică a primelor două numere.

18. Determinați trei numere, știind că, dacă se calculează mediile aritmetice a câte două dintre aceste numere, se obțin valorile 32, 39 și 41.

19. În tabelul de mai jos sunt prezentate notele obținute de 6 elevi la un test:

Prenumele	Maria	Cristi	Dina	Bianca	Luca	Vlad
Nota	5	7	10	9	8	9

a) Determinați media aritmetică a notelor obținute la test de cei 6 elevi.

b) Determinați media aritmetică a notelor impare.

c) Ce notă ar fi trebuit să obțină Maria pentru ca media celor 6 elevi să fie 8,5?

Joc

Dina și Vlad joacă un joc numit *De-a media aritmetică*. Dina spune un număr natural, iar Vlad spune alt număr natural. Apoi Dina calculează media aritmetică a celor două numere, iar Vlad calculează media aritmetică dintre numărul obținut de Dina și numărul ales de el. Dina calculează apoi media aritmetică dintre media obținută de Vlad și numărul ei. Dacă numerele alese au fost 11 și 32, determinați ce numere au obținut Dina și Vlad după repetarea procedeului de 3 ori.

Minitest

1. Transformați în fracție zecimală:

a) $\frac{39}{4}$; b) $\frac{29}{3}$; c) $\frac{23}{90}$.

3 puncte

2. Calculați media aritmetică a numerelor 8; 7; 6 și 12.

2 puncte

3. Media aritmetică a cinci numere naturale consecutive este 5. Determinați cele cinci numere naturale.

2 puncte

4. Se consideră fracția zecimală $b = 2{,}34(123)$. Determinați a 2017-a zecimală.

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 6 Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul; împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

6.1. Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la 10, 100, 1000

De reținut

Pentru a efectua împărțirile $23{,}7 : 10$; $124 : 100$ și $21{,}34 : 1\,000$ putem utiliza regula studiată la împărțirea unui număr natural la o putere a lui 10:

Pentru a împărți un număr natural la o putere a lui 10, se mută virgula spre stânga peste un număr de cifre egal cu exponentul puterii lui 10.

Astfel:

- $23{,}7 : 10 = 2{,}37$; am deplasat virgula de la dreapta spre stânga peste o zecimală, pentru că $10 = 10^1$;
- $124{,}5 : 100 = 1{,}245$; am deplasat virgula de la dreapta spre stânga peste două zecimale, pentru că $100 = 10^2$;
- $21{,}34 : 1\,000 = 0{,}02134$; am deplasat virgula de la dreapta spre stânga peste trei zecimale, pentru că $1\,000 = 10^3$.

Regula 1

Pentru *a împărți o fracție zecimală la o putere a lui 10* deplasăm virgula spre stânga peste un număr de zecimale egal cu exponentul puterii lui 10.

6.2. Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul

Mate practică

Dina a cumpărat 3 creioane, pentru care a plătit 12,75 lei. Determinați prețul unui creion.

Rezolvare:

Pentru a determina prețul unui creion, vom împărți 12,75 la 3.

O strategie ar fi să împărțim 1 275 de sutimi la 3. Am obține astfel 425 de sutimi, adică 4,25.

Prezentăm un procedeu de împărțire asemănător cu cel de la împărțirea a două numere naturale, cu rezultat fracție zecimală:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2, & 7 & 5 & 3 \\ \cline{5-5} 1 & 2 & & & 4, \\ \cline{1-2} = & = & & & \end{array}$$

Pasul 1

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2, & 7 & 5 & 3 \\ \cline{5-5} 1 & 2 & & & 4{,}2 \\ \cline{1-2} = & = & 7 & & \\ & & 6 & & \\ \cline{3-3} & & 1 & & \end{array}$$

Pasul 2

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2, & 7 & 5 & 3 \\ \cline{5-5} 1 & 2 & & & 4{,}25 \\ \cline{1-2} = & = & 7 & & \\ & & 6 & & \\ \cline{3-3} & & 1 & 5 & \end{array}$$

Pasul 3

Am obținut $12{,}75 : 3 = 4{,}25$.

De reținut

Pentru *a împărți o fracție zecimală cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural* se împarte mai întâi partea întreagă la numărul dat și se scrie virgula la cât, apoi se continuă împărțirea ca la numere naturale, fără a ține cont de virgula de la deîmpărțit.

Exemple:

$72{,}15 : 5 = 14{,}43$; $12{,}9 : 3 = 4{,}3$; $169{,}36 : 8 = 21{,}17$.

6.3. Împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

De reținut

Pentru *a împărți două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule* se procedează astfel:
a) se înmulțește atât deîmpărțitul, cât și împărțitorul cu o putere a lui 10, pentru ca împărțitorul să devină număr natural;
b) se împart numerele astfel obținute.

Exemple

1. Pentru a împărți pe $3{,}21$ la $0{,}5$, întrucât împărțitorul are o singură zecimală, mărim de 10 ori (mutând virgula spre dreapta peste o cifră) și deîmpărțitul, și împărțitorul. Obținem:

$$3{,}21 : 0{,}5 = 32{,}1 : 5 = 6{,}42.$$

2. $435{,}2 : 0{,}04 = 43\,520 : 4 = 10\,880$ (am înmulțit deîmpărțitul și împărțitorul cu 100).

3. $157{,}293 : 1{,}25 = 15\,729{,}3 : 125 = 125{,}8344$ (am înmulțit deîmpărțitul și împărțitorul cu 100).

6.4. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

De reținut

Fracția zecimală periodică simplă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător perioada, iar numitorul este numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are perioada.

$$\overline{a,(b_1b_2\ldots b_n)} = a\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_n}}{\underbrace{999\ldots99}_{n \text{ cifre}}}$$

Exemple

1. $4,(7) = 4\frac{7}{9}$; **2.** $0,(29) = \frac{29}{99}$; **3.** $1,(0258) = 1\frac{258}{9\,999}$;

4. $11,(8) = 11\frac{8}{9}$; **5.** $0,(031) = \frac{31}{999}$; **6.** $405,(267) = 405\frac{267}{999}$.

De reținut

Fracția zecimală periodică mixtă este egală cu numărul de întregi, urmat de fracția care are la numărător diferența dintre numărul fără paranteză situat după virgulă și numărul situat la partea zecimală neperiodică, iar la numitor numărul format din atâtea cifre de 9 câte cifre are partea periodică, urmate de atâtea zerouri câte cifre are partea zecimală neperiodică.

$$\overline{a,b_1b_2\ldots b_n(c_1c_2\ldots c_m)} = a\frac{\overline{b_1b_2\ldots b_nc_1c_2\ldots c_m} - \overline{b_1b_2\ldots b_n}}{\underbrace{999\ldots9}_{m \text{ cifre}}\,\underbrace{000\ldots0}_{n \text{ cifre}}}$$

Exemple

1. $8{,}2(7) = 8\frac{27-2}{90} = 8\frac{25}{90} = 8\frac{5}{18}$; **2.** $0{,}23(731) = \frac{23\,731-23}{99\,900} = \frac{23\,708}{99\,900} = \frac{11854}{49\,950} = \frac{5\,927}{24\,975}$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Efectuați $1,(3)+5{,}1(6)$, scriind rezultatul sub formă de fracție zecimală.

Rezolvare:

Pentru a efectua adunarea vom transforma fracțiile periodice în fracții ordinare.

Avem $1,(3) = 1\,{}^{(3}\!\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ și $5{,}1(6) = 5\frac{16-1}{90} = 5\,{}^{(15}\!\frac{15}{90} = 5\frac{1}{6} = \frac{31}{6}$.

Numitorul comun al fracțiilor $\frac{4}{3}$ și $\frac{31}{6}$ este 6, deci ${}^{2)}\frac{4}{3} + \frac{31}{6} = \frac{8+31}{6} = \frac{39}{6} = 6{,}5$.

2. Determinați cifra a, știind că $\overline{0,1(a)}+\overline{0,(a)}+\overline{0,a(1)}$ este număr natural.

Rezolvare:

$$\overline{0,1(a)}+\overline{0,(a)}+\overline{0,a(1)}=\frac{\overline{1a}-1}{90}+\frac{a}{9}+\frac{\overline{a1}-a}{90}=\frac{10+a-1+10a+10a+1-a}{90}=\frac{20a+10}{90}=\frac{20a+10}{90}=\frac{10(2a+1)}{90}=\frac{2a+1}{9}$$

este număr natural. Avem $2a+1$ este un multiplu al lui 9, adică a egal cu 4.

Probleme propuse

1. Calculați:
a) $14,3:5$; b) $12,7:20$; c) $55,79:4$; d) $31,08:8$;
e) $72,066:6$; f) $23,46:3$; g) $195,3:12$; h) $150,8:20$.

2. Calculați:
a) $23,45:1\,000$; b) $67,5:10$; c) $912,3:100$; d) $15,78:10$;
e) $129,567:100$; f) $0,004:10$; g) $1,234:100$; h) $0,75:10$.

3. a) 10 țevi cântăresc 6,5 tone. Cât cântărește o țeavă?
b) 60 de ace cu gămălie cântăresc 120,48 g. Cât cântăresc 12 ace?
c) 10 caiete de același fel cântăresc 2,345 kg. Cât cântărește un caiet?

4. Determinați numerele de 100 de ori mai mici decât: 263; 5,8; 327,1; 500,3; 4 487,324; 25,2525.

5. Calculați:
a) $30:2,5$; b) $14:1,25$; c) $9,6:3,2$; d) $70,23:2,4$;
e) $850,8:0,15$; f) $44:0,055$; g) $18,9:3,2$; h) $44,85:2,5$.

6. Scrieți sub formă de fracție ordinară:
a) 2,(5); 13,(7); 125,(8); 0,(29); 4,(37); 125,(106); 29,(471).
b) 0,2(7); 4,6(5); 8,23(7); 16,14(35); 200,79(125).

7. Calculați numărul de 0,02 ori mai mic decât:
a) 3,7; b) 5,003; c) 0,2; d) $4,8:12$; e) $5,8:2,9$.

8. Calculați numărul de 0,003 ori mai mic decât:
a) 5; b) 6,3; c) 1,28; d) $0,2\cdot4:0,01$; e) $11:10^2$.

9. Indicați pentru fiecare fracție zecimală din coloana **A** o fracție zecimală din coloana **B** cu care se poate asocia astfel încât numărul din coloana **B** să reprezinte împărțirea la 100 a numărului din coloana **A**.

A	B
23,789	0,0023789
237,89	0,023789
2,3789	0,23789
	2,3789

10. Efectuați: a) $2,(4)+3,1(2)$; b) $0,(25)+3,4(5)$.

Activitate pe grupe

Elevii sunt organizați pe două grupe. Fiecare grupă are o sumă de bani.
Pe tablă este afișat cursul valutar al unei bănci din România, din data de 9 iunie 2017, pentru moneda euro și pentru dolarul american.
Presupunem că prima grupă are 1 828 de lei și trebuie să cumpere euro, apoi să-i vândă.
A doua grupă are 1 640 de lei și trebuie să cumpere dolari, apoi să-i vândă.
Fiecare grupă trebuie să calculeze ce sumă de bani pierde prin efectuarea celor două tranzacții în aceeași zi.

Denumire valută	Cod valută	Schimb valutar	
		Cumpărare	Vânzare
EURO	EUR	4,55 lei	4,57 lei
DOLAR SUA	USD	4,06 lei	4,10 lei

Fiecare grupă va prezenta la tablă rezolvarea sarcinilor primite.

V Fracții zecimale

Lecția 7 Număr rațional pozitiv; ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive

Mate practică

Adi, Dina și Vlad au hotărât să parcurgă un traseu montan de 20 km. În prima zi, Adi a parcurs 0,5 din drum, Dina $\frac{1}{2}$ din drum, iar Vlad 50% din drum. Ce distanțe au parcurs fiecare?

Rezolvare: $0{,}5 \cdot 20 = 10$, deci Adi a parcurs 10 km.

$\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$, deci Dina a parcurs 10 km.

$50\% \cdot 20 = \frac{50}{100} \cdot 20 = 10$, deci Vlad a parcurs 10 km.

De reținut

Numerele 0,5, $\frac{1}{2}$ și 50% reprezintă forme diferite de scriere pentru același număr, numit ***număr rațional pozitiv***. Fracțiile ordinare, fracțiile zecimale și procentele sunt forme diferite de scriere a ***numerelor raționale pozitive***.

Exemple

1. $\frac{4}{5}$ este un număr rațional pozitiv scris sub formă de fracție ordinară. Deoarece $\frac{4}{5} = 4 : 5 = 0{,}8$, înseamnă că 0,8 este același număr rațional pozitiv, egal cu $\frac{4}{5}$, dar scris sub formă de fracție zecimală. Evident că prin amplificarea fracției ordinare cu 20 obținem $\frac{80}{100} = 80\%$, iar 80% este același număr rațional egal cu $\frac{4}{5}$ sau 0,8.

2. 2,(3) este un număr rațional pozitiv scris sub forma unei fracții zecimale periodice simple. Deoarece $2{,}(3) = 2\frac{3}{9} = \frac{7}{3}$, înseamnă $\frac{7}{3}$ este același număr rațional pozitiv, egal cu 2,(3), dar scris sub formă de fracție ordinară. Sub formă de procent, numărul 2,(3) se scrie 66,(6)%.

De reținut

1. ***La efectuarea operațiilor cu numere raționale pozitive se aplică aceeași regulă privind ordinea efectuării operațiilor ca la numere naturale:***
- dacă expresia conține operații de același ordin, operațiile se efectuează în ordinea în care sunt scrise (de la stânga la dreapta);
- dacă expresia conține operații de mai multe ordine, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul III (ridicările la putere), apoi operațiile de ordinul II (înmulțirile și împărțirile) și în final operațiile de ordinul I (adunările și scăderile).

Exemple:

1. $2{,}63 + 7{,}295 - 6{,}28 = 9{,}925 - 6{,}28 = 3{,}645$.

2. $7{,}5 - \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{75}{10} - \frac{21}{10} = \frac{54}{10} = 5{,}4$.

3. $32{,}49 \cdot 100 : 2{,}5 = 3\,249 : 2{,}5 = 1\,299{,}6$.

4. $0{,}042 \cdot 100 - 18 : 5{,}4 + 3^2 : 4{,}5 = 0{,}042 \cdot 100 - 18 : 5{,}4 + 9 : 4{,}5 = 4{,}2 - 3{,}(3) + 2 = 2{,}8(6)$.

2. Dacă o expresie conține și paranteze, efectuăm calculele din parantezele rotunde, apoi operațiile din parantezele drepte și în final cele din acolade (respectând în cadrul parantezelor și al acoladelor ordinea de mai înainte).

Exemple:

1. $(2{,}73 + 0{,}27) : 0{,}5 - 4{,}25 = 3 : 0{,}5 - 4{,}25 = 6 - 4{,}25 = 1{,}75$.

2. $\frac{4}{5}\cdot\left(14,3-2,5\cdot\frac{1}{2}\right)=0,8\cdot(14,3-2,5\cdot 0,5)=0,8\cdot(14,3-1,25)=0,8\cdot 13,05=10,44$.

3. $[10+5\cdot(63,9:0,9-48)]\cdot 100+3=[10+5\cdot(71-48)]\cdot 100+3=$
$=[10+5\cdot 23]\cdot 100+3=(10+115)\cdot 100+3=125\cdot 100+3=12\,500+3=12\,503$.

4. $\{17,9+2\cdot[11,6\cdot 100-5\cdot(44,8:0,8-29,4)]\}\cdot 2,5+2\,003=$
$=\{17,9+2\cdot[11,6\cdot 100-5\cdot 26,6]\}\cdot 2,5+2\,003=$
$=\{17,9+2\cdot 1\,027\}\cdot 2,5+2\,003=2\,071,9\cdot 2,5+2\,003=7\,182,75$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Adi și Dina au de rezolvat 32 de probleme pentru cercul de matematică. În trei zile Adi, a rezolvat $\frac{3}{8}$ din numărul total al problemelor, iar Dina a rezolvat 0,625 din numărul total al problemelor. Cine a rezolvat mai multe probleme?

Rezolvare:

$\frac{3}{8}\cdot 32=12$, deci Adi a rezolvat 12 probleme.

$0,625\cdot 32=20$, deci Dina a rezolvat 20 de probleme.

Dina a rezolvat mai multe probleme decât Adi.

2. Efectuați $0,5\cdot\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0,1(6)\right]:2,5$.

Rezolvare:

Vom lucra cu fracții ordinare. Pentru început să realizăm transformările fracțiilor zecimale în fracții ordinare:

$0,5=\frac{5}{10}^{(5}=\frac{1}{2}$, $0,1(6)=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}^{(15}=\frac{1}{6}$ și $2,5=\frac{25}{10}^{(5}=\frac{5}{2}$.

Efectuăm acum operațiile din paranteză: ${}^{4)}\frac{1}{3}+{}^{3)}\frac{1}{4}-{}^{2)}\frac{1}{6}=\frac{4+3-2}{12}=\frac{5}{12}$.

Efectuăm înnmulțirea, apoi împărțirea: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{12}:\frac{5}{2}=\frac{5}{24}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{12}$.

Probleme propuse

1. Efectuați:
a) $20+1,7-6,3$; b) $5,8-2,9+0,37$; c) $9,29+2,71-5,4-2,2$; d) $15,24\cdot 10:100$;
e) $8,24\cdot 10:2$; f) $32,45:5\cdot 20$; g) $2,3^2\cdot 0,12+1,024$; h) $8,1^2:8,1+0,9$.

2. Calculați:
a) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot 4$; b) $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}:\frac{1}{3}$; c) $\frac{4}{9}+\frac{3}{10}:\frac{6}{10}$;
d) $1\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{2}+6$; e) $2\frac{1}{7}\cdot 1\frac{1}{5}-\frac{1}{21}:\frac{1}{3}$; f) $\frac{5}{6}:\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}:\frac{1}{3}\right)$.

3. Efectuați:
a) $2,4\cdot 10+59:10-18:2,5$; b) $1,2^2+2,1^2-0,0017\cdot 1\,000$; c) $400:200-1,73:10+5,6\cdot 4,5$;
d) $29:100+3,7\cdot 4-123:100$; e) $62:10-0,02\cdot 10+28,5\cdot 2,2$; f) $3,9\cdot 100+3,9:100-3,9^2$.

4. Efectuați următoarele operații:
a) $4,71\cdot 10-3,7$; b) $29,56-5+14,8\cdot 7,2$; c) $81,4-3,1\cdot 10,8$;
d) $7,8:2+9,6\cdot 3,2$; e) $14,49:7-0,026\cdot 13$; f) $41,41:41+2\cdot 2\cdot 2$.

5. Calculați:

a) $1\frac{4}{5}:\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{21}+1\right)-\frac{4}{9}$;

b) $\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{21}\right):\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{14}\right)-2\frac{1}{2}\right]\cdot 8$;

c) $\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}-\frac{1}{36}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\right)\cdot 2\frac{3}{7}$;

d) $\left(3+\frac{3}{8}\right):\left(\frac{4}{35}-\frac{2}{70}\cdot\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{4}{15}$.

6. Efectuați:

a) $(0,23+0,495+0,112)\cdot 100$;

b) $3,2\cdot(17,5-12,5+35)+100$;

c) $(1,4+0,83-0,95)\cdot 13-6,8$;

d) $(12,5+7,5)\cdot(31,2\cdot 5-124)$;

e) $5\cdot(11,3-2,4\cdot 3,5)+11$;

f) $3,5^2+1,2\cdot\{11+1,1\cdot[6,5+2\cdot(0,45-0,4)]\}$;

g) $\{3+0,5\cdot[2,3-0,2\cdot(3,1-5,12:3,2)]\}:4$;

h) $[(3,15+4,05)\cdot 36,9]:[(17,5-10,3)\cdot 0,41]$.

7. Asociați fiecărei expresii din coloana **A** un număr din coloana **B** astfel încât numărul din coloana **B** să reprezinte rezultatul calculului expresiei din coloana **A**:

A	B
$1,1\cdot 2,5+1,1^2:11$	0,371
$1,1\cdot(2,5+1,1^2):11$	0,37
$(1,1\cdot 2,5+1,1^2):11$	0,36
$(1,1^2\cdot 2,5+1,1^2):11$	2,86
	0,385

8. Calculați:

a) $0,6\cdot 1\frac{1}{9}-\frac{7}{9}:\left(2-\frac{1}{4}\right)$;

b) $\left(3\frac{8}{9}-1,5\right):\left(3\frac{1}{2}+0,8\right)+2,(4)$;

c) $\left(\frac{2}{3}+5,13:9\right):3\frac{71}{100}-0,(3)$;

d) $\left(1,8^2-3\frac{7}{50}\right):\left(\frac{53}{10}-2,2^2\right)\cdot 2,3$.

9. a) În trei zile s-au vândut 12,56 kg, 41,275 kg și 29,11 kg de cafea. Un kilogram de cafea costă 10 lei. Calculați, în două moduri, suma încasată.

b) Un turist a parcurs un traseu montan de 24 km în trei zile. În prima zi a parcurs $\frac{3}{8}$ din traseu, în a doua zi a parcurs 0,(6) din restul traseului. Câți kilometri a parcurs în a treia zi?

c) Un țăran mai are pentru vaca sa hrană pentru 20 zile. După 5 zile, el mai cumpără un vițel care consumă zilnic jumătate din cât consumă zilnic vaca. După câte zile de la cumpărarea vițelului s-a terminat hrana acestora?

Joc

Dina și Vlad primesc spre verificare egalitatea $3\cdot 19,4-2,5\cdot 0,1+4,3=25,2$, din care s-au șters parantezele rotunde și cele drepte.

Ei joacă un joc, ce constă în reconstituirea calculelor de mai sus prin completarea expresiei cu paranteze rotunde și drepte, pentru a obține răspunsul precizat. Câștigă jocul cel care termină primul de completat expresia.

Minitest

1. Calculați:

a) $2,4\cdot 4,2-3,2:\frac{4}{5}$;

b) $4,5+\frac{31}{10}\cdot 2,6$;

c) $34,5+9,11-9,2:6,4+3,1(6)$.

3 puncte

2. Efectuați:

a) $25,41-3\cdot(1,2+0,7)$;

b) $11,18:[9,4-2\cdot(1,2-0,8)]$.

2 puncte

3. Comparați $5,14\cdot\{4,1+2\cdot[3-1,4:(2,5-1,7)]\}$ cu $5,14\cdot(4,1+2)\cdot[3-1,4:(2,5-1,7)]$.

2 puncte

4. Stabiliți care dintre următoarele enunțuri sunt adevărate și care sunt false:

a) $18,16-12,3:2,5=2,344$;

b) $18,125:1,3+1,2\cdot 5,4=39,15$.

Introduceți paranteze pentru a obține răspunsul precizat.

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 8 Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură pentru lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp și unități monetare

8.1. Metode de rezolvare a problemelor de aritmetică

Pentru rezolvarea problemelor de aritmetică în care mărimile sunt exprimate prin fracții vom utiliza, în general, metodele studiate în Unitatea II: *metoda reducerii la unitate*, *metoda comparației*, *metoda figurativă*, *metoda mersului invers* și *metoda falsei ipoteze*. În mod natural, în probleme se aplică și tehnicile învățate pe parcursul lecțiilor anterioare despre fracții (ordinare sau zecimale): aflarea unei fracții dintr-un număr sau a unui număr când se cunoaște o fracție din el sau aflarea unui procent dintr-un număr.

În cele ce urmează, fără a mai relua expunerea detaliată din lecțiile anterioare, vom prezenta pe scurt fiecare metodă, ilustrând aplicarea ei printr-unul sau mai multe exemple.

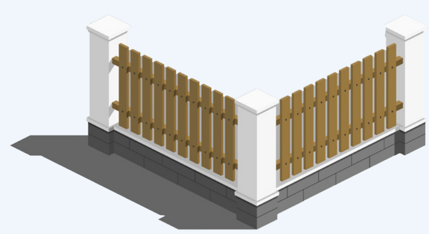
Ne amintim

Metoda reducerii la unitate se folosește în probleme în care două mărimi se găsesc într-o anumită dependență una față de cealaltă, iar mărimea cerută se află trecând printr-o etapă intermediară de comparare cu unitatea.

Un aspect important în aplicarea metodei este stabilirea dependenței între mărimi; astfel, sunt posibile două situații: dacă mărimile cresc odată cu creșterea uneia dintre mărimi, crește și cealaltă, sau dacă în timp ce una dintre ele crește, cealaltă descrește.

Exemple

1. Un gard de formă dreptunghiulară are o suprafață pe care o putem acoperi cu 35 de pătrate cu latura de 1 m. Pentru a vopsi $\frac{2}{5}$ din suprafața gardului s-au folosit 3,500 kg de vopsea. Ce cantitate a fost necesară pentru vopsirea gardului?



Rezolvare:
Cele două mărimi (suprafața vopsită și cantitatea necesară de vopsea) cresc sau scad în același timp. Reducerea la unitate (determinarea cantității necesare vopsirii unui pătrat) se face prin *împărțirea* cantității de vopsea folosită la numărul de pătrate.

$\frac{2}{5}$ din 35 de pătrate înseamnă $\frac{2}{5} \cdot 35 = 14$ pătrate, iar 3,500 kg reprezintă 3 500 g.

14 pătrate .... 3 500 g
1 pătrat .... $3\,500$ g : $14 = 250$ g
35 pătrate .... 250 g $\cdot 35 = 8\,750$ g $= 8{,}750$ kg.

2. O piscină este prevăzută cu 32 de robinete cu același debit. 12 robinete umplu piscina în $13\frac{1}{3}$ ore. În câte ore se umple piscina dacă sunt deschise toate robinetele?

Rezolvare:
Dacă numărul de robinete scade, timpul necesar pentru umplerea piscinei crește. În acest caz, reducerea la unitate (determinarea timpului în care umple piscina un singur robinet) se face prin *înmulțirea* numărului de robinete deschise cu timpul în care acestea umplu piscina.

12 robinete .... $13\frac{1}{3}$ ore
1 robinet .... $12 \cdot 13\frac{1}{3} = 12 \cdot \frac{40}{3} = 160$ ore
32 robinete .... $160 : 32 = 5$ ore.

Ne amintim

Metoda comparației se aplică în probleme în care relațiile dintre mărimi se deduc din compararea a două situații diferite.

După stabilirea motivului care duce la diferențierea celor două situații se elimină una dintre necunoscute, prin înlocuire sau prin scădere.

Exemplu

2,5 metri de stofă și 4,2 metri de pânză costă 227,80 lei.
5 metri de stofă și 6,4 metri de pânză costă 412,60 lei.
Cât costă un metru de pânză?

Rezolvare:
Transcriem datele problemei:

2,5 m stofă .... 4,2 m pânză .... 227,80 lei
5 m stofă .... 6,4 m pânză .... 412,60 lei

Aducem la același termen de comparație materialul de stofă, pentru a elimina această mărime. Înmulțind cu 2 datele care intervin în prima situație, obținem:

5 m stofă .... 8,4 m pânză .... 455,60 lei
5 m stofă .... 6,4 m pânză .... 412,60 lei

Diferențierea celor două situații se face doar prin lungimea pânzei cumpărate.

Pânza în plus măsoară: 8,4 m – 6,4 m = 2 m și costă 455,60 lei – 412,60 lei = 43 lei, deci un metru de pânză costă 43 lei : 2 = 21,5 lei.

Ne amintim

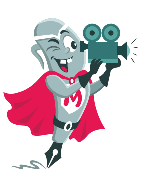
Metoda figurativă presupune reprezentarea datelor prin desene (de regulă, segmente de dreaptă), respectându-se regulile dintre aceste date. *Metoda figurativă* se aplică, de regulă, pentru:
- determinarea a două mărimi atunci când se cunosc suma și diferența, suma și câtul sau diferența și câtul lor;
- determinarea unei fracții dintr-un întreg sau a unui întreg când se cunoaște o anumită fracție din el.

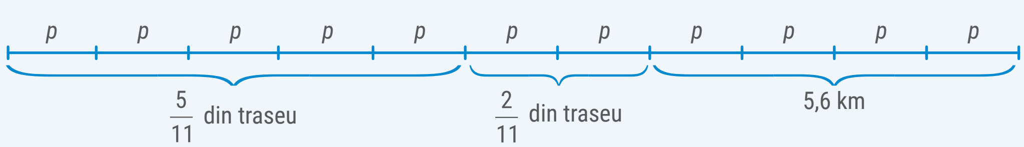
Exemplu

În tabăra de orientare turistică, traseul pentru prima excursie este stabilit astfel: din tabără se pleacă până la cascadă, urmează lacul cu nuferi și apoi se ajunge la punctul de campare. Distanța de la tabără până la cascadă este egală cu $\frac{5}{11}$ din lungimea traseului, iar distanța de la cascadă și lacul cu nuferi este $\frac{2}{11}$ din lungimea traseului. Ce lungime are traseul, știind că distanța dintre lac și punctul de campare este de 5,6 km?

Rezolvare:

Deoarece $\frac{5}{11}$ și $\frac{2}{11}$ sunt două fracții din același întreg, lungimea traseului, reprezentăm lungimea traseului cu un segment împărțit în 11 părți egale:





Deducem că 5,6 km reprezintă 4 părți din lungimea traseului.

Atunci o parte reprezintă 5,6 km : 4 = 1,4 km, iar lungimea traseului este de 1,4 km · 11 = 15,4 km.

Ne amintim

Metoda mersului invers se utilizează în problemele în care datele depind unele de altele succesiv, ultima fiind cunoscută. Ordinea rezolvării este inversă celei în care se succed datele problemei. Operațiile aritmetice folosite pentru rezolvarea unei probleme prin *metoda mersului invers* sunt, de regulă, operațiile inverse celor care exprimă dependențele între mărimi indicate de problemă.

Exemplu

Dintr-o sumă de bani, Vlad cheltuiește $\frac{1}{8}$ pentru un stilou, $\frac{2}{7}$ din rest pentru un CD și $\frac{1}{3}$ din noul rest pentru o carte. Câți lei a avut în total dacă i-au rămas 40 de lei?

Rezolvare:

Cei 40 de lei reprezintă $\frac{2}{3}$ din restul rămas după cumpărarea cărții; atunci înainte de a cumpăra cartea avea $40\text{ lei} : \frac{2}{3} = 60$ lei.

Aceasta este suma de bani pe care o avea după cumpărarea CD-ului. Dacă CD-ul a costat $\frac{2}{7}$ din sumă, cei 60 de lei reprezintă $\frac{5}{7}$ din banii pe care îi avea înainte de a lua CD-ul; așadar înainte de a cumpăra CD-ul avea $60\text{ lei} : \frac{5}{7} = 84$ lei.

Suma rămasă după cumpărarea stiloului este $\frac{7}{8}$ din suma inițială, deci, înainte de a merge la cumpărături, Vlad avea $84\text{ lei} : \frac{7}{8} = 96$ lei.

Ne amintim

Metoda falsei ipoteze se aplică în probleme în care se dau informații cumulate despre mărimi de tipuri diferite. Primul pas în aplicarea metodei este de a presupune că mărimile din problemă sunt toate de același fel. Se efectuează un calcul pentru a stabili dacă presupunerea făcută este adevărată sau falsă.

Dacă rezultatul calculului coincide cu cel din enunțul problemei, atunci problema este rezolvată. Dacă rezultatul calculului nu coincide cu cel din enunțul problemei, atunci presupunerea făcută este falsă și deci există mărimi și de celălalt fel.

Pentru aflarea uneia dintre mărimi, se stabilește diferența dintre rezultatul obținut și cel din enunț și aceasta se împarte la diferența produsă de înlocuirea unei mărimi de primul fel cu alta de cel de al doilea fel.

Exemplu

În 12 vase, unele cu capacitatea de 1,5 litri, iar altele cu capacitatea de 3,5 litri, sunt 34 de litri de apă. Câte vase de fiecare fel sunt?

Rezolvare:

Presupunem că toate vasele au capacitatea de 1,5 litri. Atunci, în cele 12 vase am avea $1{,}5\text{ l} \cdot 12 = 18\text{ l}$.

Obținem o diferență de $34\text{ l} - 18\text{ l} = 16\text{ l}$, deci sunt și vase cu capacitatea de 3,5 litri.

Cei 16 litri în minus provin din faptul că am înlocuit vasele de 3,5 l cu vase de 1,5 l. Deoarece diferența de capacitate dintre vase este $3{,}5\text{ l} - 1{,}5\text{ l} = 2\text{ l}$, la fiecare înlocuire am pierdut câte 2 litri.

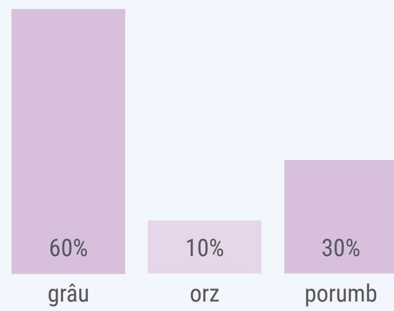
Diferența de 16 l se compensează printr-un număr $16 : 2 = 8$ înlocuiri, deci sunt 8 vase a 3,5 litri și respectiv 4 vase a 1,5 litri fiecare.

Probleme propuse

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următorului enunț matematic:
Dacă într-o cutie cubică formată din două cuburi cu muchia de 1 m încape marfă în valoare de 4 500,50 lei, atunci într-o cutie cubică imaginară formată din 2 000 de cuburi cu muchia de 1 m încape același tip de marfă în valoare de 9 001 000 lei.

2. Un caiet costă 1,80 lei, iar o carte 6 lei. Un colet în valoare de 51 de lei conține același tip de caiete și cărți, al căror număr total este 12. Câte cărți și câte caiete sunt în colet?

3. Analizând figura de mai jos, calculați producția de orz și de grâu, știind că producția de porumb a fost de 3 600 de tone.



4. Un cub este format din 8 cuburi cu muchia de 1 dm și cântărește 400 g. Un alt cub, din același material, format din 27 de cuburi cu muchia de 1 dm cântărește:
a) 2 kg; b) 3 200 g; c) 1,350 kg; d) 1,600 kg.

5. Dacă o minge este lăsată să cadă (fără să fie aruncată), ea sare la o înălțime de două ori mai mică decât înălțimea de la care i s-a dat drumul. Dacă, după ce i se dă drumul de la o anumită înălțime, mingea sare de 3 ori, a treia oară s-a ridicat la 80 cm. De la ce înălțime i s-a dat drumul?

6. Indicele de masă corporală al unei persoane se calculează împărțind masa corporală, exprimată în kilograme, la pătratul înălțimii exprimate în metri.
a) Calculați-vă indicele de masă corporală (IMC) și studiați tabelul:

<table>
<tr><th>Masa ideală</th><th>IMC</th><th>Încadrarea greutății</th></tr>
<tr><td rowspan="4">între 42 kg și 56 kg</td><td>sub 18,5</td><td>Subponderal</td></tr>
<tr><td>între 18,51 și 24,99</td><td>Normal</td></tr>
<tr><td>între 25,00 și 29,99</td><td>Supraponderal</td></tr>
<tr><td>între 30,00 și 39,99</td><td>Obez</td></tr>
</table>

b) Luca are înălțimea de 1,50 m. El a calculat că, dacă ar cântări cu 1 kg mai mult, ar avea indicele de masă corporală egal cu 20. Ce indice de masă corporală are Luca?

7. Dina a cumpărat 3,5 kg de mere și 2 kg de roșii, plătind, în total, 24 de lei. Luca a cumpărat 7 kg de mere și 1,5 kg de roșii, plătind, în total, 35,5 lei. Cât costă 1 kg de roșii, respectiv 1 kg de mere?

8. „Din trântă? Doar de ți-e greu de viață. Mă! Eu am auzit din bătrâni că dracii nu-s proști; d-apoi cum văd eu, tu numai nu dai în gropi de prost ce ești. Ascultă, eu am un unchi (moș Ursilă) bătrân de 999 de ani și 52 de săptămâni și de-l vei putea trânti pe dânsul, atunci să te întreci și cu mine, dar cred că ți-a da pe nas!…“
(Ion Creangă — *Dănilă Prepeleac*)
Ce vârstă are Dănilă, știind că e mai tânăr cu 568 de ani decât trei cincimi din vârsta *unchiului* său mărită cu o zi?

9. Perimetrul unei grădini dreptunghiulare este de 384 m. Dacă adăugăm 25 m la două treimi din lățime, obținem cu 1 m mai puțin decât jumătatea lungimii. Aflați lungimea grădinii.

10. „Sunt un leu de bronz. Ochii și gura mea sunt fântâni. Dintr-un bazin, într-o zi, ochiul drept umple o treime, ochiul stâng o șesime, iar gura jumătate.“
Dacă leul „deschide“ simultan ochii și gura, în cât timp va umple bazinul?
(Problemă din Grecia Antică)

11. Dintre elevii unei clase, jumătate participă la cercul de șah și $\frac{7}{12}$ la cercul de filatelie. Arătați că există cel puțin un elev care participă la ambele cercuri.

12. Niște maimuțe se distrează: $\frac{2}{7}$ din ele se cațără prin copaci, $\frac{3}{5}$ din rest fac tumbe, iar 4 aplaudă. Câte maimuțe erau?

13. Dintr-un bidon cu lapte s-a consumat în prima zi $\frac{2}{5}$ din capacitate și încă 4 litri. A doua zi, s-a folosit $\frac{5}{8}$ din cantitatea rămasă și încă un litru. Ce cantitate de lapte se afla la început în bidon dacă a treia zi au mai rămas în bidon 11 litri de lapte?

Știați că...

O legendă spune că un arab a lăsat moștenire 17 cămile, care să fie împărțite astfel: primul fiu să primească $\frac{1}{2}$ din numărul cămilelor, al doilea fiu $\frac{1}{3}$ și al treilea $\frac{1}{9}$.

Explicați cum au procedat, știind că nu au tăiat cămilele?

Rezolvare:

Legenda spune că cei trei frați s-au adresat cadiului (judecătorului). Acesta a venit călare pe cămila sa, făcându-se, astfel, 18 cămile. Acum i-a pus pe frați să îndeplinească dorința tatălui.

Primul fiu a luat $\frac{1}{2}$ din 18 cămile $=9$ cămile, al doilea a luat $\frac{1}{3}$ din 18 cămile $=6$ cămile, iar ultimul a luat $\frac{1}{9}$ din 18 cămile $=2$ cămile.

Cei trei frați au primit $9+6+2=17$ (cămile) și au fost mulțumiți. Judecătorul a încălecat apoi pe cămila sa și a plecat.

Joc

Asamblăm 27 de cuburi cu muchia de 1 cm și formăm un cub pe care îl vopsim. După ce se usucă vopseaua, demontăm cubul. Câte cuburi au 3, 2, 1, respectiv 0 fețe vopsite?

Minitest

1. Pentru 7,5 metri de mușama s-au plătit 45 de lei. Câți lei costă 11,25 metri de mușama?

3 puncte

2. Eliza a citit într-o zi $\frac{1}{3}$ din paginile unei nuvele. A doua zi, a citit $\frac{2}{3}$ din paginile necitite. A treia zi a terminat nuvela, citind 12 pagini. Pe câte pagini se întinde nuvela?

3 puncte

3. Vlad merge pe munte. După ce a parcurs $\frac{11}{18}$ din traseul propus, constată că dacă ar mai fi mers 5 km ar fi parcurs $\frac{2}{3}$ din traseu. Aflați lungimea traseului.

3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 9 Probleme de organizare a datelor. Frecvență. Grafice cu bare. Grafice cu linii. Media unui set de date statistice

9.1. Organizarea și colectarea datelor statistice. Frecvență

Mate practică

Dina și Eliza vor să știe care este sportul preferat al elevilor de clasa a V-a din școala lor.

Pentru a *colecta informațiile*, ele realizează *un sondaj*.

Mai întâi, ele trec într-o listă informațiile pe care vor să le culeagă:

a) sporturi de echipă:
- fotbal • handbal • baschet

b) sporturi individuale:
- tenis • înot • șah

Apoi, formulează întrebările în vederea realizării sondajului, precum și indicațiile de completare:

Sondaj
SPORTURI FAVORITE

Grup-țintă: elevii claselor a V-a

La fiecare dintre cele două întrebări, alege o singură variantă de răspuns.

1. Care dintre următoarele sporturi de echipă practicate în școala noastră este sportul tău preferat:
   ☐ fotbal ☐ handbal ☐ baschet
2. Ce sport individual practici sau ți-ar plăcea să practici:
   ☐ tenis ☐ înot ☐ șah ☐ alt sport

Ce observăm?

Sondajul făcut studiază o anumită *caracteristică* a elevilor de clasa a V-a; în cazul de față, sportul preferat. Valorile pe care le poate lua această caracteristică sunt: fotbal, handbal sau baschet.

Pentru *a înregistra* și *a organiza* datele colectate, se utilizează *un tabel al frecvențelor*. Informațiile colectate după analiza răspunsurilor date de elevii clasei a V-a A la prima întrebare sunt înscrise în tabelul alăturat.

Sportul preferat		
a V-a A	răspunsuri	frecvența
fotbal	𝍸 𝍸 ////	14
handbal	////	4
baschet	𝍸 //	7

Legendă: / = 1 𝍸 = 5

Dintre cei 25 de elevi ai clasei a V-a A, 14 elevi au răspuns că fotbalul este sportul lor preferat. Numărul natural 14 reprezintă *frecvența absolută* cu care apare acest răspuns.

Raportându-ne la întreaga clasă, fotbalul este preferat de $\frac{14}{25}$ dintre elevi sau, în scriere procentuală, de 56% dintre elevi.

Fracția $\frac{14}{25}$ sau procentul 56% reprezintă *frecvența relativă*.

În tabelul frecvențelor se pot trece atât frecvența absolută, cât și frecvența relativă.

În exemplul dat, cei 4 elevi care preferă handbalul reprezintă 16% din cei 25 de elevi ai clasei a V-a A, iar cei 7 elevi care îndrăgesc mai mult baschetul reprezintă 28% din elevii clasei.

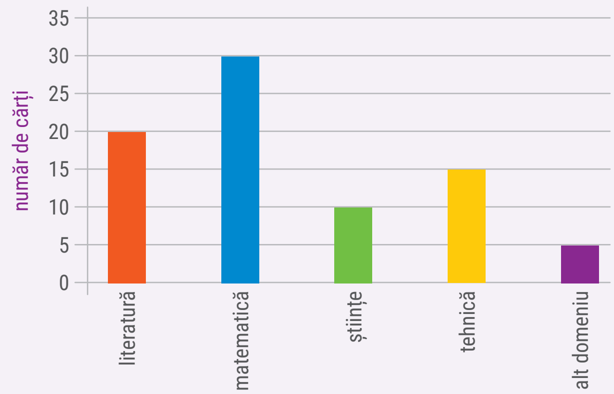
Sportul preferat — clasa a V-a A		
fotbal	14	56%
handbal	4	16%
baschet	7	28%

9.2. Grafice cu bare. Grafice cu linii

Mate practică

La finalul unei săptămâni, se contorizează numărul de cărți cerute la sala de lectură a bibliotecii școlii, cu accent pe 4 domenii principale: literatură, matematică, științe și tehnică.

Datele colectate sunt prelucrate și reprezentate într-un grafic cu bare verticale, ca în imaginea alăturată.



Ce observăm?

Analiza și interpretarea datelor se efectuează mai ușor utilizând graficul în locul unui tabel de frecvență, deoarece graficul permite compararea rapidă a datelor.

Analizând graficul, se observă că:

- denumirile domeniilor sunt scrise de-a lungul unei linii orizontale, iar valorile pe care le ia numărul de cărți cerute sunt scrise de-a lungul unei linii verticale; cele două linii se numesc *axe*;
- cele mai cerute cărți sunt cele de matematică (30);
- au fost cerute 15 cărți de tehnică;
- 5 cărți dintre cele cerute aparțin altui domeniu decât cele patru domenii principale.

cărți împrumutate	
literatură	20
matematică	30
științe	10
tehnică	15
alt domeniu	5

Observații

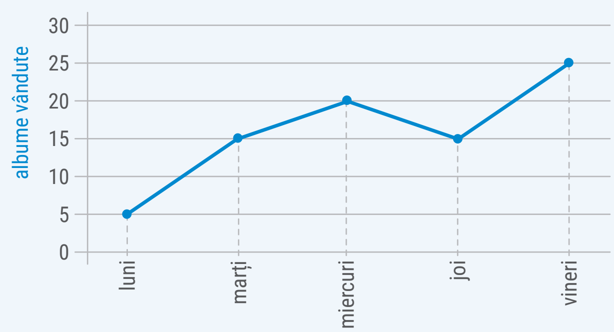
Graficele cu bare se folosesc de obicei atunci când se studiază și se compară date despre obiecte de tipuri diferite. Se pot folosi fie bare verticale, fie bare orizontale, în formă de dreptunghi. Una dintre dimensiunile dreptunghiului este aceeași pentru toate barele, iar cealaltă variază în raport cu valoarea numerică a frecvenței (absolute sau relative).

Graficele cu linii se folosesc în principal atunci când se studiază și se compară date despre același obiect sau proces de-a lungul unei anumite perioade. Un grafic cu linii folosește o grilă în care datele sunt expuse cu ajutorul unor puncte, care se unesc apoi prin segmente ce indică tendința de creștere sau descreștere a valorilor.

În realizarea unui grafic cu bare sau a unui grafic cu linii, pentru fiecare axă pe care sunt scrise seturi de date numerice se stabilește o unitate de măsură convenabilă. În exemplul de mai sus, numărul de cărți împrumutate variază între 5 și 30, deci o unitate potrivită pentru axa corespunzătoare este 5.

Exemplu

La magazinul de muzică se reprezintă printr-un grafic cu linii evoluția zilnică a vânzărilor ultimului album al câștigătorilor concursului Eurovision.



Examinând graficul, constatăm că:

- luni s-au vândut cele mai puține albume (5);
- cele mai mari vânzări s-au înregistrat în ziua de vineri — 25 de albume.

În total s-au vândut:

$$5 + 15 + 20 + 15 + 25 = 80 \text{ de albume.}$$

Folosind graficul cu linii, putem alcătui și tabelul frecvențelor.

Ziua / Albume vândute	luni	marți	miercuri	joi	vineri	TOTAL
număr	5	15	20	15	25	80
procent	6,25%	18,75%	25%	18,75%	31,25%	100%

9.3. Media unui set de date statistice

Mate practică

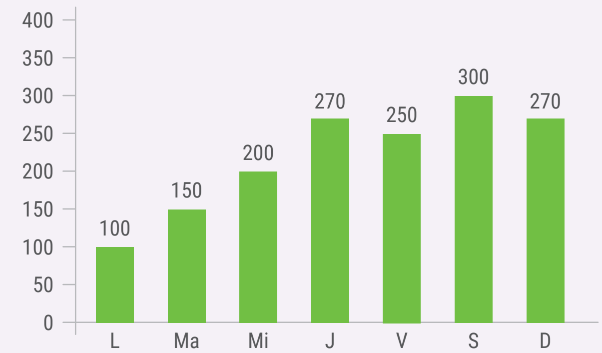
În graficul alăturat este reprezentat numărul vizitatorilor unui muzeu într-o săptămână.

Am obținut următorul set de date, corespunzător numărului de vizitatori, pe zile: 100, 150, 200, 270, 250, 300, 270.

Acestea sunt date statistice numerice.

Media aritmetică a numărului de vizitatori în acea săptămână este egală cu:

$$\frac{100+150+200+270+250+300+270}{7}=220.$$



Vom spune că 220 este media setului de date statistice analizat.

Ce observăm?

De multe ori, atunci când în studiul unui proces sau fenomen se colectează multe date, este de preferat să caracterizăm întregul set de date printr-o singură valoare, reprezentativă.

De reținut

Media unui set de date statistice este media aritmetică a tuturor valorilor din setul de date considerat.

Media unui set de n date care iau valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este egală cu $\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Dacă într-un set de date valorile acestora apar de mai multe ori, atunci media setului de date se poate calcula ca fiind câtul dintre două sume: suma produselor dintre valorile datelor și frecvențele acestora și suma frecvențelor.

Exemplu

În tabelul următor sunt reprezentate notele obținute la teza la matematică de elevii clasei a V-a.

Nota	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	3	5	6	5	4

Media acestui set de date este

$$\frac{2\cdot 5+3\cdot 6+5\cdot 7+6\cdot 8+5\cdot 9+4\cdot 10}{2+3+5+6+5+4}=\frac{196}{25}=7{,}84.$$

Putem spune că media clasei este 7,84.

Probleme propuse

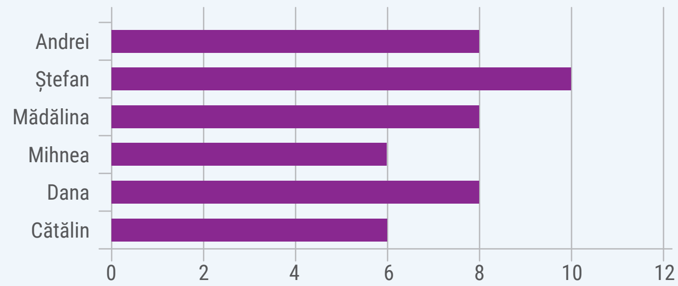
1. Dina și Eliza au completat studiul lor privind sportul preferat. Rezultatele sunt trecute în tabelul de mai jos, dar unele date s-au șters.

Sondaj	**Sportul preferat**						**TOTAL**
	clasa a V-a A		clasa a V-a B		clasa a V-a C		
	răspunsuri	frecvența	răspunsuri	frecvența	răspunsuri	frecvența	
fotbal	### ### ////	…	### ///	8	### ////	9	…
handbal	////	…	### /	…	### ### //	…	…
baschet	### //	…	### ### /	11	…	…	26
	total A	25	total B	…	total C	30	80

Legendă: / = 1 ### = 5

a) Copiați tabelul pe caiet și completați datele lipsă.
b) Indicați care este sportul cel mai îndrăgit de către elevii școlii.
c) Determinați frecvența relativă a elevilor din școală al căror sport preferat este handbalul.
d) Aflați ce procent dintre elevii clasei a V-a C au ca sport favorit baschetul.

2. În graficul cu bare alăturat sunt prezentate punctajele acordate de 6 elevi, membrii juriului la un concurs de pictură:



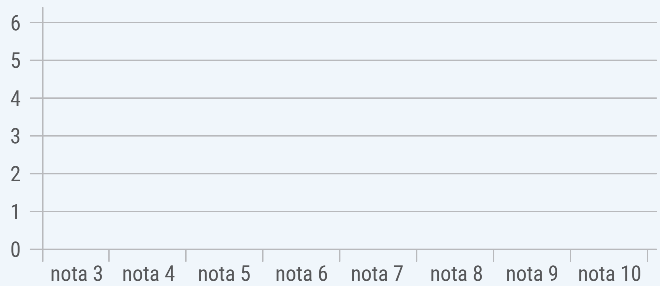
Utilizând graficul cu bare, completați spațiile punctate din tabelul de mai jos:

Nume	Mihnea	...	Dana	...	Andrei	Ștefan
Punctaj	...	6	...	8	...	...

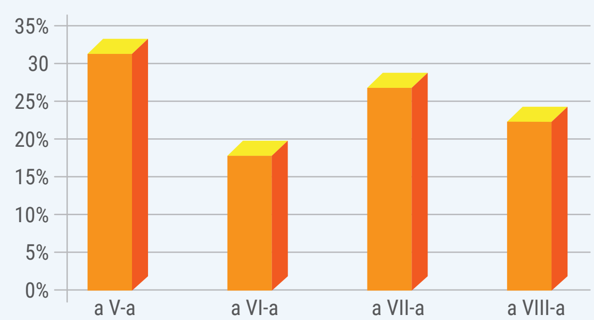
3. Notele obținute de elevii unei clase la un test sunt reprezentate în tabelul de mai jos:

Nota	3	4	5	6	8	9	10
Număr elevi	2	4	6	5	4	3	2

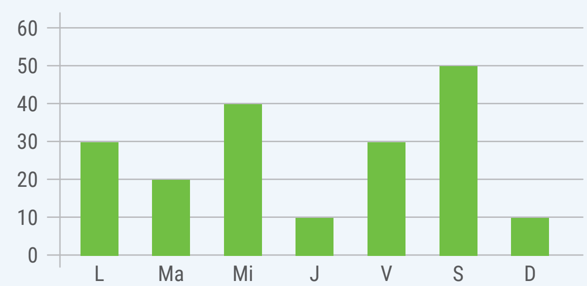
Utilizând tabelul, completați graficul cu bare de mai jos:



4. Într-o școală gimnazială sunt 300 de elevi, iar repartiția procentuală a elevilor pe clase este reprezentată în diagrama alăturată.
a) Estimați care dintre clasele a VI-a și a VIII-a are mai puțini elevi.
b) Precizați numărul elevilor din clasa a VII-a din școală.
c) Decideți dacă numărul elevilor de clasa a VI-a este mai mare sau mai mic decât 70% din numărul elevilor din clasa a VII-a din școală.



5. În diagrama alăturată este reprezentat numărul de intrări de autoturisme dintr-o parcare.
a) Indicați ziua săptămânii în care a intrat în parcare cea de-a 110-a mașină.
b) Calculați câte mașini au intrat în parcare, în medie, pe zi.

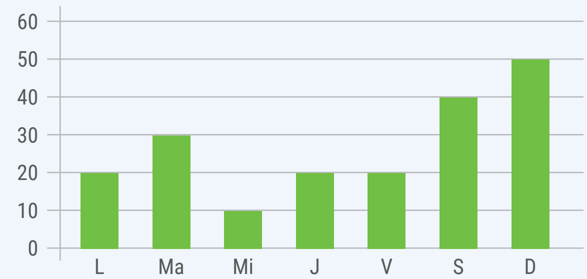


6. La o lucrare, elevii unei clase au obținut următoarele rezultate:

Nota	10	9	8	6	5	4
Număr elevi	3	4	2	7	5	1

a) Estimați, pe baza rezultatelor cel mai des obținute, media clasei.
b) Comparați valoarea estimării cu media setului de date prezentat de tabel.
c) Alcătuiți o diagramă cu bare care să prezinte rezultatele elevilor la test.

7. În diagrama alăturată sunt reprezentate vânzările de bilete pe o săptămână ale unui cinematograf 3D.



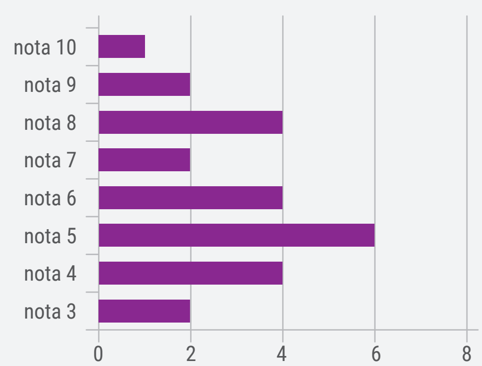
a) Determinați numărul total al biletelor vândute.
b) Calculați ce procent din numărul total de bilete vândute reprezintă biletele vândute marți.
c) Calculați valoarea medie a biletelor vândute într-o zi.
d) Determinați probabilitatea ca alegând la întâmplare un bilet acesta să fi fost vândut joi.
e) Determinați suma încasată din vânzarea biletelor, știind că de luni până vineri prețul unui bilet este de 15 lei, iar sâmbătă și duminică prețul este de 20 de lei.

Activitate pe grupe

Realizați un sondaj la nivelul școlii despre genul de muzică preferat al elevilor de clasa a V-a.
Sondajul va cuprinde minimum trei întrebări, iar culegerea datelor se va face separat, pe fete și băieți.
Realizați tabelele de frecvență și interpretați datele după ce le-ați reprezentat într-un tabel cu bare.
Discutați în clasă rezultatele obținute.

Minitest

În diagrama de mai jos sunt reprezentate notele obținute de elevii unei clase la un test.



a) Determinați numărul elevilor din clasă.
2 puncte

b) Determinați numărul elevilor care au obținut la test cel puțin nota 7.
2 puncte

c) Calculați media obținută la test de elevii clasei.
2 puncte

d) Aflați ce procent din numărul elevilor clasei au obținut note mai mari sau egale cu 5.
3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Evaluare

Metode aritmetice
Probleme de organizare a datelor

1. Numărul natural *n* din egalitatea $\frac{75+n}{25}=50$ este:

a) 1 175 b) 1 200 c) 75 d) 1 125

2. Numărul natural *n* din egalitatea $5{,}6-\frac{n\cdot 24+1}{5}=4{,}2$ este:

a) 1 b) 0,25 c) 0,5 d) 1,4

3. Dacă 6 cărți costă 76,50 lei, atunci 5 cărți de același fel costă:

a) 12,75 lei
b) 50 lei
c) 63,75 lei
d) 68,25 lei

4. Dacă 4 robinete umplu un bazin în 5 ore, atunci 6 robinete de același tip umplu bazinul în:

a) 3 ore și 20 min
b) 7 ore și 30 min
c) 4 ore și 45 min
d) 3 ore și 33 min

5. Trei jucării ursuleț și 4 jucării veveriță costă 258,30 euro. Șapte jucării ursuleț și 8 jucării veveriță costă 549,10 de euro. O jucărie ursuleț costă:

a) 32,50 euro
b) 40,20 euro
c) 100,50 euro
d) 84,75 euro

6. Trei covrigi și 4 pâini cântăresc 2,267 kg, iar 4 covrigi și 4 pâini cântăresc 2,372 kg. O pâine cântărește:

a) 0,105 kg
b) 0,500 kg
c) 0,488 kg
d) 0,600 kg

7. Un număr este de 2,5 ori mai mare decât celălalt. Aflați cele două numere, știind că suma lor este 63.

a) 27și 39 b) 45 și 18 c) 36 și 27 d) 42 și 21

8. În 8 sticle avem 9 litri de apă. Unele sticle au capacitatea de 1,5 litri, iar altele de 0,5 litri. Numărul vaselor de 0,5 litri este egal cu:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

9. La proba de aruncare a suliței, un sportiv a efectuat patru aruncări, în lungime de 72 m, 78,5 m, 74,8 m și 81,1 m. Care este lungimea medie a unei aruncări?

a) 75,2 m
b) 75,6 m
c) 76,5 m
d) 76,6 m

10. Din cei zece membri ai echipei de baschet a școlii, trei copii au 1,64 m înălțime, 4 copii au 1,67 m, iar restul au 1,66 m, 1,74 m și 1,70 m. Care este înălțimea medie a echipei?

a) 1,65 m
b) 1,66 m
c) 1,67 m
d) 1,69 m

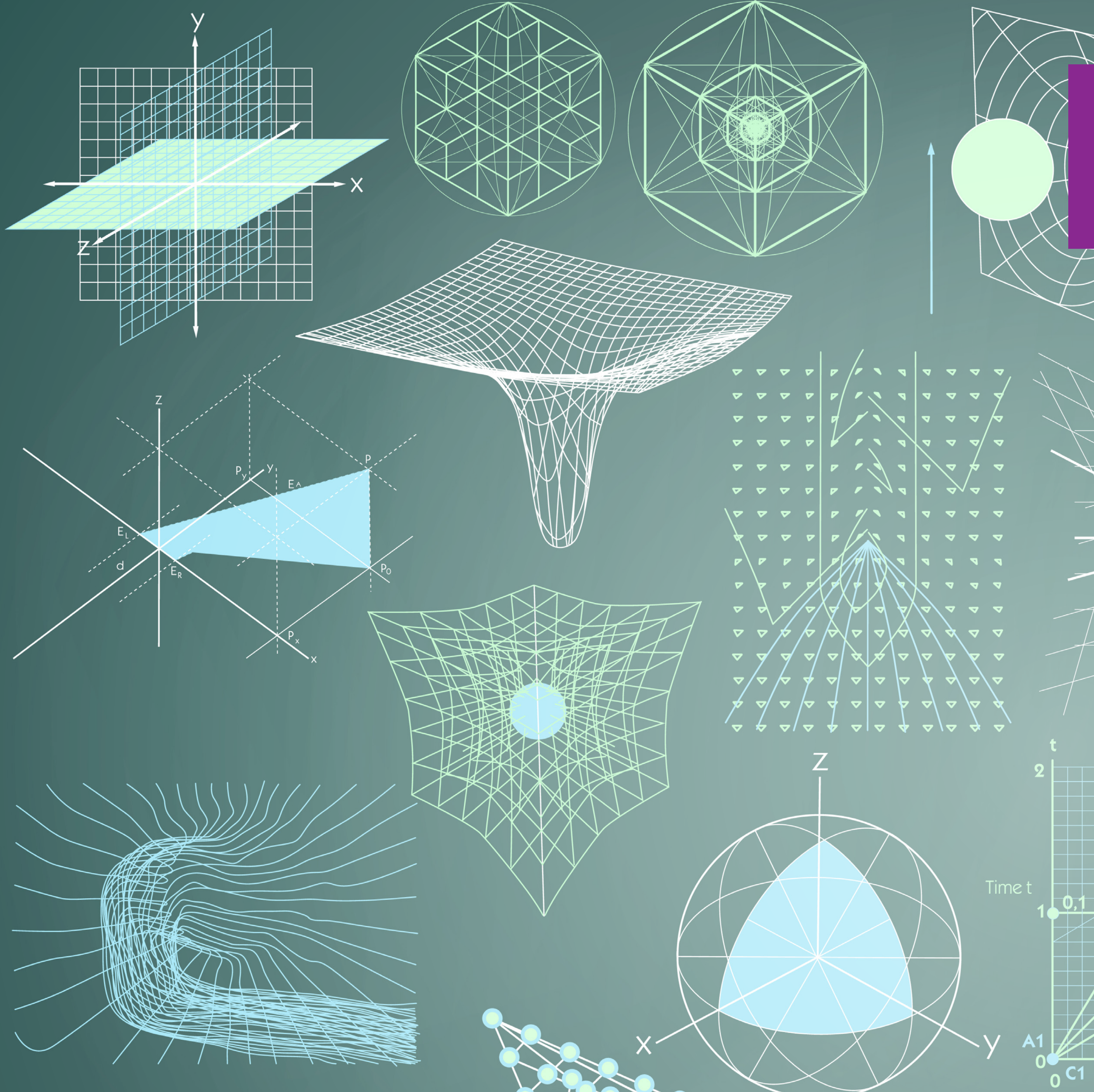
11. În tabel jos este reprezentată prezența elevilor unei clase de 30 de elevi la cursuri, pe parcursul unei săptămâni. Care este numărul total al elevilor absenți în săptămâna reprezentată?

Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri
27	30	28	29	26

a) 3
b) 10
c) 9
d) 12

12. O gospodină a cheltuit la raionul de carne — din suma pe care o avea, iar la raionul de fructe și legume a cheltuit 40% din rest. Știind că inițial a avut 350 de lei, aflați ce rest i-a rămas.

a) 150 lei
b) 90 lei
c) 120 lei
d) 200 lei



Euclid (cca 325 – 265 î.H.), numit și Euclid din Alexandria, a fost un matematician grec care a trăit și a predat în Alexandria din Egipt în timpul domniei lui Ptolemeu I (323–283 î.H.).

Cartea sa *Stihia* (*Elementele*), tradusă în peste 300 de limbi, în care pune bazele aritmeticii și ale geometriei plane și spațiale, a fost timp de peste 2000 de ani principala carte după care s-a învățat geometria.

Deși multe dintre rezultatele din *Elemente* au fost descoperite de matematicienii de dinainte, una dintre realizările lui Euclid a fost să le prezinte într-un singur cadru, logic și coerent, pentru a putea fi ușor folosite.

Euclid a inițiat tradiția de a indica sfârșitul unei demonstrații prin expresia latină: *Quod erat demonstrandum* (prescurtat Q.E.D.), în traducere: *Ceea ce era de demonstrat*.

Unitatea
VI
Elemente de geometrie

Domeniul de conținut:
GEOMETRIE

VI Elemente de geometrie

Lecția 1 Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment de dreaptă

1.1. Punctul

De reținut

Punctul poate fi considerat urma vârfului unui creion, bine ascuțit, lăsată pe foaia de hârtie, atunci când o atinge.

Îl reprezentăm printr-o bulină sau prin două liniuțe care se intersectează. Un punct se individualizează prin poziția sa.

Se notează cu una din literele mari ale alfabetului: $A, B, C, \ldots$.

Desenăm	Citim	Notăm
• A	punctul A	A
× B	punctul B	B

Observații

A nu se confunda punctul ca desen cu noțiunea de punct. Punctul, ca figură geometrică, nu este nici mai mare, nici mai mic: nu are dimensiuni, în timp ce desenul lui are dimensiuni.

Pozițiile relative a două puncte

Două puncte pot fi situate în același loc și atunci spunem că sunt *puncte identice* sau *confundate* (coincid) sau pot fi situate în locuri diferite și atunci spunem că sunt *puncte distincte* (*diferite*).

Desenăm	Citim	Notăm
A • B	Punctele A și B coincid.	$A = B$
M • • N	Punctele M și N sunt distincte.	$M \neq N$

1.2. Dreapta

De reținut

Putem sugera imaginea unei porțiuni dintr-o dreaptă printr-un fir de ață foarte subțire, bine întins.

Pentru a reprezenta în desen o dreaptă utilizăm rigla. Să ne imaginăm că am putea deplasa rigla de-a lungul liniei desenate, astfel încât să putem continua mereu linia începută. Linia nesfârșită, astfel obținută, este o ***dreaptă***. Ea este nemărginită și este formată din puncte.

Desenăm	Citim	Notăm
d ———	dreapta d	d
—•A———•B—	dreapta AB sau BA	AB sau BA

Dreapta se notează cu o literă mică sau cu două litere mari ale alfabetului latin.

1.3. Semidreapta

Mate practică

În Pitești există un indicator rutier care ne arată direcția spre București:

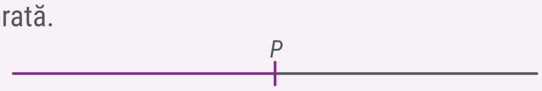
și putem reprezenta astfel:

Ce observăm?

Punctul de plecare (*originea*) este P care ne arată că pornim din Pitești, iar punctul B ne arată *sensul* (direcția) spre București. Dacă plecam în sens opus, ne îndreptam spre Râmnicu Vâlcea.

Amintiți-vă și axa numerelor!

Semidreapta este formată din mulțimea tuturor punctelor unei drepte situate de aceeași parte a unui punct aflat pe acea dreaptă. În figura de mai jos, punctul P a delimitat două semidrepte distincte, una colorată, iar cealaltă necolorată.



Pentru a reprezenta în desen o semidreaptă utilizăm rigla.

De reținut

La fel ca și dreapta, semidreapta se notează cu două litere mari ale alfabetului.
În desenul anterior, punctul *C* indică *originea*, iar punctul *D* indică *sensul* semidreptei *CD*.

Desenăm	Citim	Notăm
	semidreapta *CD*	*CD*

Mate practică

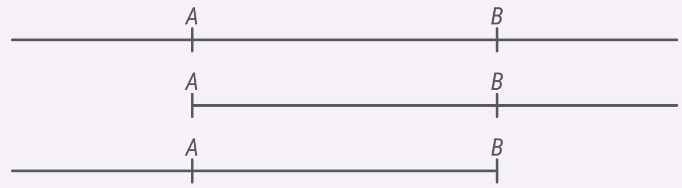
Desenați o dreaptă *AB*, iar dedesubt, desenați semidreapta *AB* și semidreapta *BA*.

Rezolvare:

Dreapta *AB*:

Semidreapta *AB*:

Semidreapta *BA*:

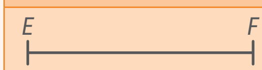


1.4. Segmentul de dreaptă

De reținut

Descriere
Fixând două puncte diferite pe o dreaptă, porțiunea de dreaptă cuprinsă între cele două puncte poartă numele de *segment de dreaptă*.

Reprezentare
Pentru a reprezenta în desen un segment de dreaptă utilizăm rigla gradată.

Desenăm	Citim	Notăm
	segmentul *EF* sau *FE*	*EF* sau *FE*

Notație
Se notează cu două litere mari ale alfabetului.

Observație
Punctele *E* și *F* se numesc *extremitățile* sau *capetele* segmentului de dreaptă, *EF*.

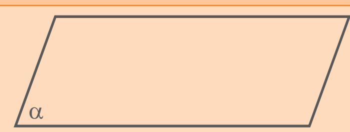
1.5. Planul

De reținut

Descriere
Imaginea unei porțiuni dintr-un plan este sugerată prin suprafața liniștită a apei dintr-un vas.

Reprezentare
Se reprezintă sub forma unui paralelogram.

Notație
Se notează cu o literă din alfabetul grecesc: α (alfa), β (beta), π (pi), … .

Desenăm	Citim	Notăm
	planul α	α

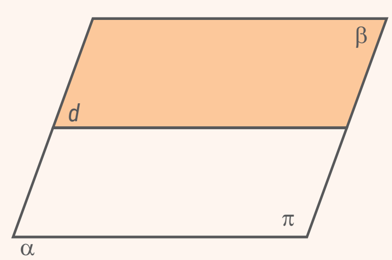
1.6. Semiplanul

De reținut

Descriere
Semiplanul este mulțimea tuturor punctelor unui plan aflate de aceeași parte a unei drepte situată în acel plan.

Reprezentare
În figura alăturată, dreapta *d*, numită *frontieră*, a delimitat în planul α două semiplane distincte.

Notație
Semiplanul colorat este notat cu β, iar cel necolorat cu π.



Probleme propuse

1. Priviți desenul de mai jos și completați fiecare spațiu punctat pentru a obține o propoziție adevărată:

a) A și B sunt puncte . . . .

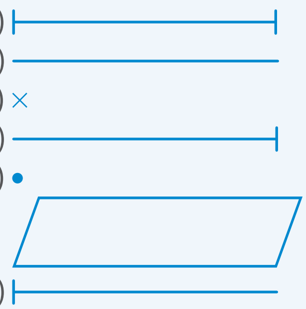
b) A și C sunt puncte . . . .

2. Desenați punctele A, B, C care îndeplinesc următoarele condiții: $A \neq B$ și $B = C$.

3. Fie A, B, C, trei puncte, astfel încât $A \neq B \neq C$. Ce poziție are A față de C?

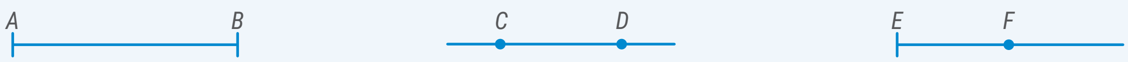
4. Asociați fiecare desen din coloana din stânga cu denumirea sa din coloana din dreapta:

a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)



1. punct;
2. plan;
3. segment de dreaptă;
4. dreaptă;
5. semidreaptă.

5. Stabiliți dacă propozițiile următoare sunt adevărate sau false:



a) Primul desen reprezintă segmentul de dreaptă AB;
b) Al doilea desen reprezintă dreapta DC;
c) Ultimul desen reprezintă semidreapta FE.

6. Desenați:

a) un punct A;
b) o dreaptă a;
c) un segment de dreaptă OK;
d) o dreaptă OK;
e) o semidreaptă OK;
f) o semidreaptă KO;
g) un plan α;
h) trei semidrepte cu aceeași origine;
i) două segmente, AB și BC;
j) un plan în care să fie evidențiate două semiplane, hașurând unul dintre ele.

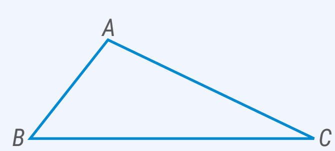
7. Priviți desenul alăturat și completați fiecare spațiu punctat pentru a obține o propoziție adevărată:

a) MA reprezintă … ;
b) AT reprezintă … ;
c) TE reprezintă … .

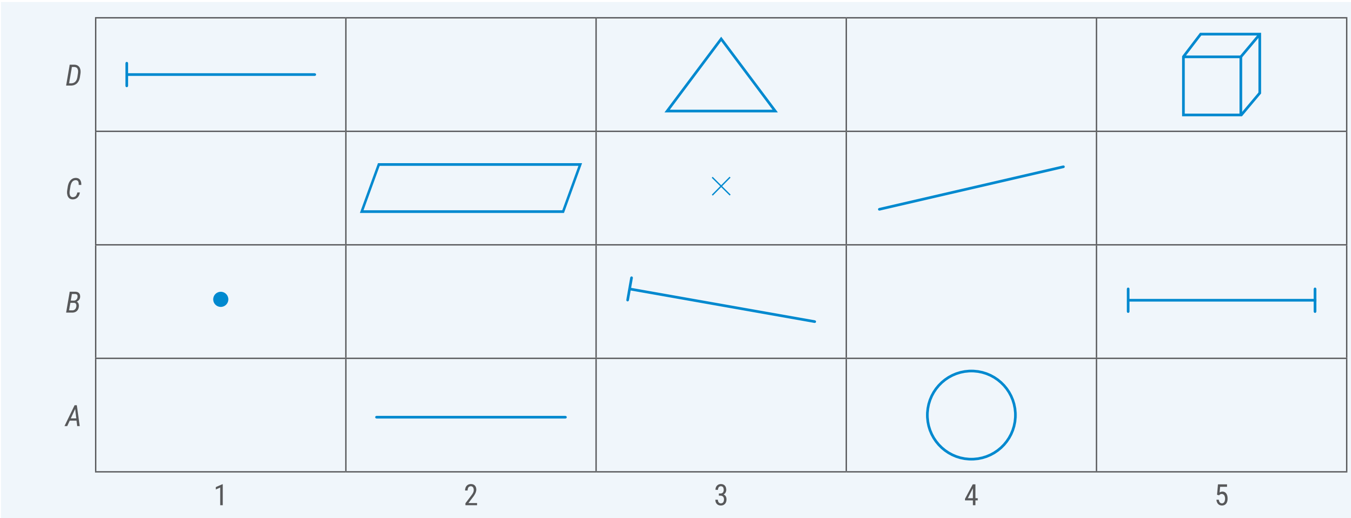
8. În figura de mai jos, pe segmentul AD s-au notat punctele distincte B și C.

a) Scrieți toate segmentele determinate de cele patru puncte:
b) Indicați segmentele ce conțin toate punctele situate între B și C.

9. Câte segmente sunt în triunghiul alăturat? Enumerați-le!

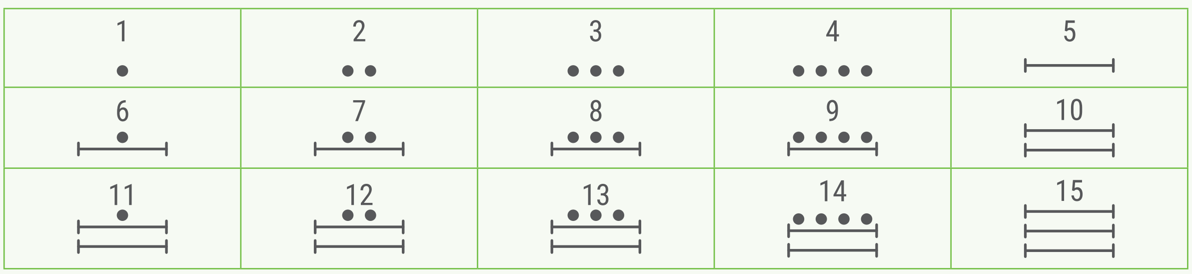


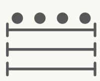
10. Denumește figurile geometrice situate în tabelul următor la coordonatele: $(1;B)$, $(1;D)$, $(2;A)$, $(2;C)$, $(3;B)$, $(3;C)$, $(3;D)$, $(4;A)$, $(4;C)$, $(5;B)$, $(5;D)$.



Știați că...

Pentru a scrie numerele naturale nenule, mayașii[1] utilizau doar două simboluri: puncte și segmente de dreaptă. Observați un tabel cu reprezentarea numerelor de la 1 la 15:



Atunci  = ?

Joc

Luca desenează pe o foaie 5 puncte roșii și 5 puncte albastre și îi propune lui Vlad să joace astfel: o mutare înseamnă că unul dintre cei doi alege două puncte dintre cele 10 și le schimbă culoarea din roșu în albastru, respectiv din albastru în roșu. Ei mută alternativ. Câștigă cel care reușește ca, după un anumit număr de mutări, să dea celor 10 puncte aceeași culoare. Cine câștigă? Justificați!

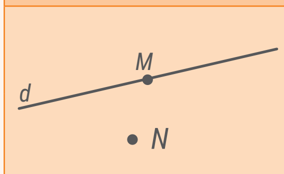
[1] Civilizația Maya a fost una dintre societățile indigene cele mai dominante din Mezoamerica (termen folosit pentru a descrie Mexicul și America Centrală, înainte de cucerirea spaniolă din secolul al XVI-lea).

Lecția 2 Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare. „Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.“ Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele

2.1. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă

De reținut

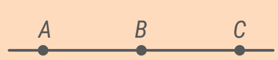
Dacă un punct poate fi situat pe o dreaptă, spunem că punctul este *interior* dreptei.
Dacă un punct nu este situat pe dreaptă, spunem că punctul este *exterior* dreptei.

Desenăm	Citim
	Punctul M este situat pe dreapta d sau punctul M aparține dreptei d.
	Punctul N nu este situat pe dreapta d sau punctul N nu aparține dreptei d.

2.2. Puncte coliniare

De reținut

Trei (sau mai multe) puncte sunt *coliniare* dacă există o dreaptă care să conțină cele trei puncte.
Consecință: Trei puncte sunt *necoliniare* dacă nu există o dreaptă care să conțină cele trei puncte.

Desenăm	Citim
	Punctele A, B, C sunt coliniare.
	Punctele A, B, D sunt necoliniare.

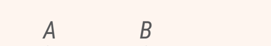
Ce observăm

În cazul figurii anterioare, spunem că punctele A și C sunt situate *de o parte și de alta* a punctului B (sau B este situat între punctele A și C), respectiv că B și C sunt situate *de aceeași parte* a lui A (sau A și B sunt de aceeași parte a lui C).

2.3. Axioma[1] dreptei

De reținut

Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.
Orice dreaptă conține cel puțin două puncte distincte.
Se formulează și astfel: două puncte distincte determină o dreaptă și numai una.



Observații

1. Putem construi o infinitate de drepte care să treacă printr-un punct.
2. Putem construi o singură dreaptă care să treacă prin două puncte distincte.
3. De aceea, când se enunță *axioma dreptei*, este foarte importantă precizarea *puncte distincte*; altfel, dacă punctele coincid, nu determină o dreaptă și numai una.

[1] Adevăr fundamental evident prin el însuși.

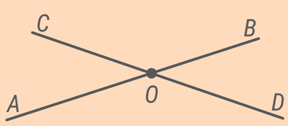
2.4. Pozițiile relative a două drepte

De reținut

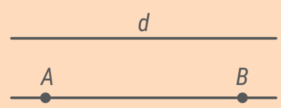
1. Două drepte care au toate punctele comune se numesc *drepte identice* (confundate, suprapuse sau drepte care coincid).

Desenăm	Citim	Notăm
	Dreapta d coincide cu dreapta AB.	$d = AB$

2. Două drepte care au un singur punct comun se numesc *drepte concurente* (secante).

Desenăm	Citim
	Dreptele AB și CD sunt concurente în punctul O.

3. Două drepte situate în același plan, care nu au niciun punct comun, se numesc *drepte paralele*.

Desenăm	Citim	Notăm
	Dreapta d este paralelă cu dreapta AB.	$d \parallel AB$

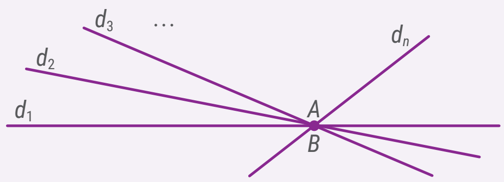
Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Fixați două puncte, A și B, și aflați câte drepte care să treacă prin cele două puncte puteți construi.

Rezolvare:

Distingem două cazuri:

I. Dacă cele două puncte coincid, putem construi o infinitate de drepte distincte: $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$.



II. Dacă cele două puncte sunt distincte, în conformitate cu *axioma dreptei*, putem construi o singură dreaptă: dreapta AB.

2. Se consideră 10 puncte distincte, două câte două.
Care este numărul minim de drepte determinate de cele 10 puncte?

Rezolvare:

Fie $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ cele 10 de puncte distincte, două câte două.
Cele 10 puncte distincte determină o singură dreaptă, dacă sunt coliniare.

3. Se consideră 10 puncte distincte, două câte două.
Care este numărul maxim de drepte determinate de cele 10 puncte?

Rezolvare:

Pot fi construite drepte al căror număr este maxim atunci când oricare trei puncte dintre cele 10 sunt necoliniare. Pentru a stabili numărul dreptelor, dispunem de cele două procedee prezentate în cele ce urmează.

I. Fixăm punctul A_1. El determină cu celelalte nouă puncte, 9 drepte.
Apoi fixând, pe rând, $A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{10}$, în fiecare caz, punctul fixat va determina cu celelalte nouă puncte, 9 drepte.
Deoarece în 10 moduri vom pune în evidență câte 9 drepte, *s-ar părea*, că s-au format $10 \cdot 9 = 90$ de drepte.
Ținând cont că:

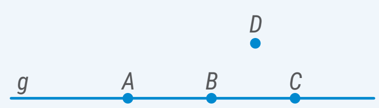
$$A_1A_2 = A_2A_1;\, A_1A_3 = A_3A_1;\, A_1A_4 = A_4A_1;\, \ldots;\, A_9A_{10} = A_{10}A_9,$$

deducem că *fiecare dreaptă a fost numărată de două ori* și atunci cele 10 puncte determină $90 : 2 = 45$ de drepte distincte, două câte două.

II. Fixăm punctul A_1. Cu el se determină 9 drepte distincte: $A_1A_2;\, A_1A_3;\, A_1A_4;\, \ldots;\, A_1A_{10}$.
Fixăm punctul A_2. Cu el se determină alte 8 drepte distincte: $A_2A_3;\, A_2A_4;\, A_2A_5;\, \ldots;\, A_2A_{10}$.
. . . .
Fixăm punctul A_9. El mai determină o singură dreaptă (distinctă) cu punctul A_{10}: dreapta A_9A_{10}.
Am obținut astfel: $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 9 \cdot 10 : 2 = 45$ de drepte distincte.

Probleme propuse

1. Observați figura de mai jos și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor date.



a) A este punct interior dreptei BC;
b) D este punct exterior dreptei g;
c) C este punct interior dreptei AB;
d) A este punct exterior dreptei BC;
e) C este punct exterior dreptei AB;
f) A, B și C sunt puncte coliniare;
g) A, B și D sunt necoliniare;
h) Dreptele AB și BC sunt identice.

2. Observați figura de mai jos și identificați termenii care lipsesc din spațiile libere, astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

a) Pe dreapta d se află punctele … .
b) Față de dreapta d, E este un … .
c) Față de dreapta d, M este un … .
d) G, E, O sunt … .
e) G, E, M sunt … .
f) GE și d sunt … .

3. Desenați patru puncte A, B, C, D, distincte două câte două, astfel încât B și C să fie de o parte și de alta a dreptei AD.

4. Desenați patru puncte A, B, C, D, distincte două câte două, astfel încât B și C să fie de aceeași parte a dreptei AD.

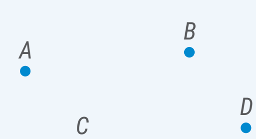
5. Fixați un punct A și constatați câte drepte care să treacă prin acel punct puteți construi. Completați afirmația de mai jos, astfel încât să devină propoziție adevărată.
Printr-un punct se pot construi … .

6. Observați figura alăturată și precizați termenii care lipsesc pentru a obține o propoziție adevărată.

a) M și A sunt puncte … .
b) Prin M și A pot fi construite … de drepte.
c) M și T sunt puncte … .
d) Prin M și T poate fi construită o singură … .

7. Desenați două puncte distincte, M și N, apoi construiți dreapta MN.

8. În figura alăturată sunt reprezentate patru puncte distincte:

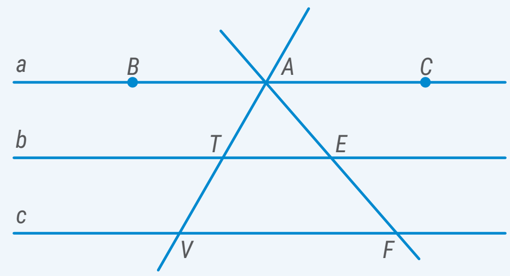


a) Câte drepte putem construi, astfel încât *A* și încă unul dintre celelalte trei puncte să fie interioare dreptei?
b) Câte drepte putem construi, astfel încât fiecare dreaptă să conțină cel puțin două puncte din cele patru fixate?

9. Se dau trei puncte *A*, *B*, *C*. Câte drepte determină aceste puncte?

10. Desenați patru puncte diferite, astfel încât acestea să determine:
a) o dreaptă; b) patru drepte; c) șase drepte.

11. Se consideră 8 puncte distincte, două câte două.
a) Care este numărul minim de drepte determinate de cele 8 puncte?
b) Dar cel maxim?



12. Priviți figura alăturată și dați câte trei exemple de:
a) drepte concurente;
b) drepte paralele;
c) drepte identice.

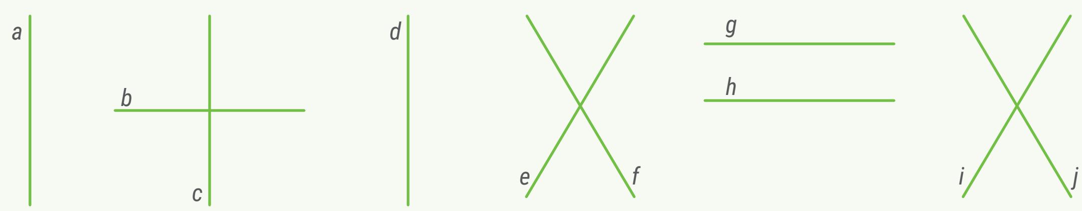
13. a) Desenați două drepte *a* și *b* concurente în punctul *O*.
b) Desenați apoi două drepte paralele, *AB* și *CD*.

14. Desenați o dreaptă *d* și punctul *O* exterior ei. Apoi construiți prin punctul *O* dreapta *b* paralelă cu *d* și dreapta *e* concurentă dreapta *d*.

15. Se desenează trei drepte distincte într-un plan. Care este numărul punctelor de intersecție determinate de cele trei drepte? (Analizați toate cazurile!)

Joc

Luca lucrează la tema de matematică.
Pornind de la figura geometrică de mai jos, ar trebui să precizeze:
a) perechile de drepte concurente;
b) perechile de drepte paralele.



Paul, fratele său, așezat față în față cu Luca, este elev în clasa a IV-a și a învățat de curând cifrele romane. El susține că egalitatea scrisă astfel cu cifre romane este falsă.
Luca îl contrazice. Este posibil ca amândoi să aibă dreptate?

VI Elemente de geometrie

Lecția 3 Lungimea unui segment. Distanța dintre două puncte. Segmente congruente

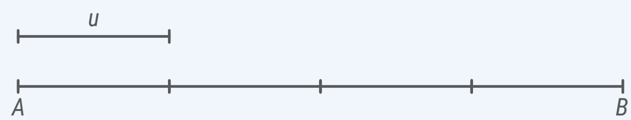
3.1. Lungimea unui segment

De reținut

1. Numim *segment unitate* un segment ales ca unitate de măsură.
2. *Lungimea unui segment* este valoarea acestuia măsurată cu ajutorul unui segment unitate.
3. *Distanța* dintre două puncte este lungimea segmentului cu extremitățile în cele două puncte.

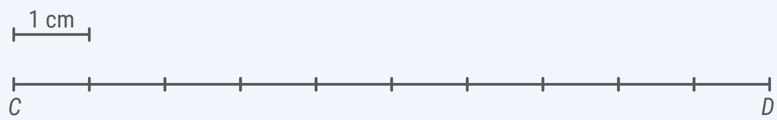
Exemple

1. În segmentul *AB*, segmentul unitate, notat cu *u*, se cuprinde de 4 ori.



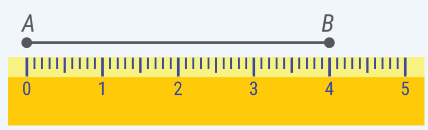
Scriem: $AB = 4u$.

2. Segmentul cu lungimea egală cu 1 cm se cuprinde în segmentul *CD* de 10 ori.



Spunem că lungimea segmentului *CD* este de 10 cm și scriem $CD = 10$ cm.

3. Așezăm rigla gradată de-a lungul segmentului, cu diviziunea 0 în dreptul punctului *A* și citim pe rigla gradată numărul din dreptul punctului *B*.



Distanța dintre punctele *A* și *B*, reprezentate mai sus, este egală cu 4 cm și scriem $AB = 4$ cm.

3.2. Segmente congruente

În general, despre două figuri geometrice plane se spune că sunt *congruente* dacă, prin suprapunere, ele coincid.

Segmentele care au aceeași lungime se numesc *segmente congruente*.

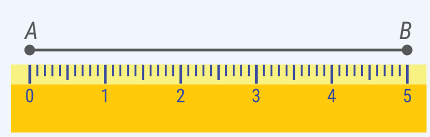
Desenăm	Citim	Notăm
	Segmentele *AB* și *CD* au aceeași lungime. $\Leftrightarrow$ Segmentele *AB* și *CD* sunt congruente.	$AB = CD$ $\Leftrightarrow$ $AB \equiv CD$

3.3. Construcția unui segment de dreaptă

Exemple

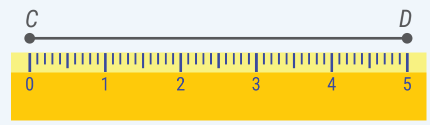
Construcția unui segment congruent cu un segment dat cu ajutorul riglei gradate

Să construim un segment *CD*, congruent cu un segment dat, *AB*.



Pasul 1: Măsurăm segmentul dat, AB. În cazul nostru, $AB = 5$ cm.

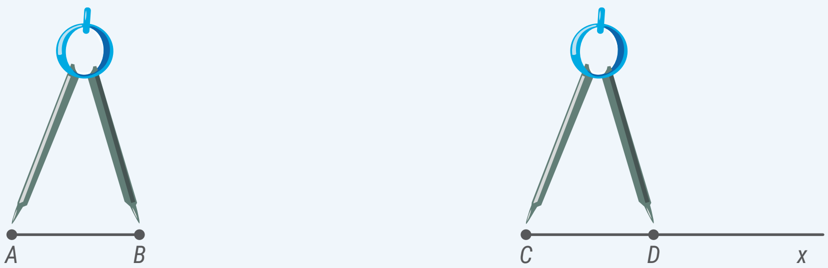
Pasul 2: Alegem un punct oarecare, C. Așezăm rigla gradată cu diviziunea 0 în dreptul lui C, iar D ar trebui să fie plasat în dreptul diviziunii ce indică 5 cm. Reprezentăm punctul D și trasăm segmentul CD.



Construcția unui segment congruent cu un segment dat cu ajutorul compasului

Pasul 1: Luăm în deschiderea compasului lungimea segmentului dat, AB.

Pasul 2: Pe o semidreaptă cu originea în C, deja desenată, trasăm un arc de cerc cu centrul în C care va intersecta semidreapta în D.



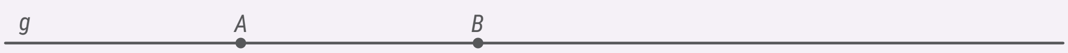
P_3: Pentru că în deschiderea compasului am conservat lungimea segmentului AB, avem $AB \equiv CD$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Pe o dreaptă g se iau punctele A, B și C, astfel încât $AB = 3$ cm și $BC = 4$ cm. Aflați distanța de la punctul A la punctul C.

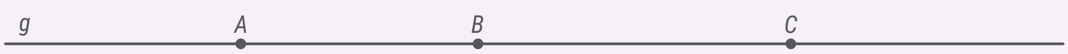
Rezolvare:

Desenăm dreapta g și fixăm punctele A și B, astfel încât $AB = 3$ cm:



Deoarece nu se precizează ordinea punctelor, distingem două cazuri:

Cazul I: ordinea punctelor este A, B, C



$AC = AB + BC = 3\text{ cm} + 4\text{ cm} = 7$ cm.

Cazul al II-lea: ordinea punctelor este C, A, B

$AC = BC - AB = 4\text{ cm} - 3\text{ cm} = 1$ cm.

2. a) Știind că $AB = 2$ cm și $CD = 2$ cm, arătați că $AB \equiv CD$.

b) Știind că $AB = 2$ cm și $AB \equiv CD$, aflați lungimea segmentului CD.

Rezolvare:

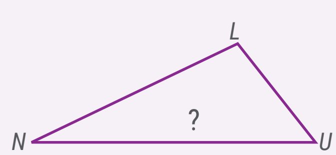
a) $\left.\begin{array}{l} AB = 2\text{ cm} \\ CD = 2\text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = CD \Rightarrow AB \equiv CD.$

b) $\left.\begin{array}{l} AB = 2\text{ cm} \\ AB \equiv CD \Rightarrow AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow CD = 2\text{ cm}.$

3. Construiți un segment NU cu lungimea de 4 cm.
Stabiliți dacă este posibil să construiți un punct L exterior segmentului, astfel încât $NL = 3$ cm și $UL = 1$ cm.

Răspuns:

Nu este posibil! Oricât am încerca, nu reușim să desenăm un punct L exterior segmentului, asfel încât $NL = 3$ cm și $UL = 1$ cm.



Aplicație practică

Luați în deschizătura compasului o lungime de 3 cm și trasați un cerc cu centrul în N. Luați apoi în deschizătura compasului o lungime de 1 cm și trasați un cerc cu centrul în U. În punctul de intersecție al celor două cercuri ar trebui poziționat L. Unde se află L?

De reținut

Dacă se dau trei puncte distincte, astfel încât suma lungimilor a două dintre segmentele determinate să fie egală cu lungimea celui de-al treilea segment determinat, atunci cele trei puncte sunt coliniare.

Dacă se dau trei puncte necoliniare, atunci suma lungimilor oricăror două dintre cele trei segmente determinate este mai mare decât lungimea celui de-al treilea segment.

Probleme propuse

1. Doi elevi au măsurat lungimea segmentului AB. Luca a așezat rigla gradată ca în figura din stânga și a afirmat că $AB = 2{,}7$ cm. Dina a măsurat ca în figura din dreapta și a afirmat că $AB = 3$ cm.

Cine a măsurat corect? Justificați!

2. a) Măsurați segmentele AB și CD din figura de mai jos și scrieți lungimea fiecăruia:

b) Construiți cu ajutorul riglei gradate două segmente, EF și GH, congruente cu AB și, respectiv, CD.

c) Construiți cu ajutorul compasului două segmente, LM și OP, congruente cu AB și, respectiv, CD.

3. a) Denumiți figurile de mai jos:

b) Cu ajutorul compasului, precizați segmentele congruente.

4. Utilizând rigla gradată, desenați punctele A, B, C, D, coliniare în această ordine, astfel încât $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $CD = 5$ cm.

5. Desenați cu rigla negradată un segment SA și o semidreaptă Ox. Cu ajutorul compasului, marcați pe semidreapta Ox punctul T, astfel încât $SA \equiv OT$.

6. Desenați cu rigla negradată două segmente AB, IL și o semidreaptă Ox. Cu ajutorul compasului, marcați pe semidreapta Ox punctul K, astfel încât, $OK = AB + IL$.

7. Ansamblul monumental *Calea Eroilor*[1] din Târgu Jiu este alcătuit din trei lucrări: *Coloana fără Sfârșit* (sau *Coloana Infinitului*), *Poarta Sărutului* și *Masa Tăcerii*. Sunt situate de-a lungul arterei de circulație *Calea Eroilor*, având o lungime de 1,5 km, cu orientarea generală est-vest. Strada dreaptă leagă *Coloana* de *Poartă* și se extinde până la *Masa Tăcerii* . Distanța dintre *Masă* și *Poartă* este de 121 m, iar între *Poartă* și *Coloană* sunt 1 154 m. Schematizând, obținem următoarea reprezentare:

Precizați litera corespunzătoare răspunsului corect.

i) Distanța dintre *Poartă* și *Coloană* este egală cu:

a) 1,5 km; b) 1 154 m; c) 121 m; d) 1 275 m.

ii) Distanța dintre *Masă* și *Coloană* este egală cu:

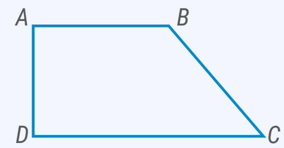
a) 1,5 km; b) 1 154 m; c) 121 m; d) 1 275 m.

[1] Ansamblul monumental *Calea Eroilor* din Târgu Jiu, lucrare de artă creată de Constantin Brâncuși (19 februarie 1876 – 16 martie 1957) în România.

8. Pe o dreaptă se iau punctele A, B și C, în această ordine, astfel încât $AB = 3$ cm și $BC = 4$ cm. Aflați distanța de la punctul A la punctul C.

9. Un băț de chibrit are lungimea de 3 cm. Se lipesc 6 astfel de bețe, unul în continuarea celuilalt, astfel încât capetele celor 6 bețe să fie coliniare. Calculați lungimea segmentului determinat de cele 6 bețe.

10. În figura alăturată este reprezentat un teren agricol. Terenul este înconjurat de un gard $ABCD$. Calculați lungimea acestui gard, știind că $CD = 70$ m, $AB = \frac{4}{7} \cdot CD$, BC este cu 10 m mai mare ca AB, iar $AD \equiv AB$.



11. Stabiliți dacă punctele A, B, C sunt coliniare. În caz afirmativ, stabiliți ordinea acestora, dacă:
a) $AB = 1$ cm, $BC = 7$ cm și $AC = 8$ cm;
b) $AB = 3$ cm, $BC = 10$ cm și $AC = 7$ cm;
c) $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm și $AC = 3$ cm;
d) $AB = 9$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 3$ cm.

12. Fie A un punct interior segmentului BC. Știind că $AB = 3$ cm și $AB \equiv AC$, aflați lungimea segmentului BC.

13. Fie A un punct interior segmentului BC, ce are lungimea egală cu 8 cm. Știind că $AB = 4$ cm, arătați că $AB \equiv AC$.

14. Desenați o dreaptă d și trei puncte A, B, C pe aceasta, astfel încât $AB = 2$ cm și $AC = 5$ cm. Calculați lungimea segmentului BC.

15. Construiți segmentul EF de lungime 12 cm și fixați pe el punctul H, astfel ca $EF = 3\,EH$. Aflați lungimea segmentului HF.

16. Construiți segmentul EF de lungime 12 cm și fixați pe el punctul H, astfel ca $EH = 3\,HF$. Aflați lungimea segmentului HF.

17. Punctele distincte A, B, C, D sunt coliniare în această ordine. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: $AC + BD = AD + BC$.

18. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare, în această ordine, astfel încât: $2 \cdot AC = AB + AD$ și $BD = 2^{11}$ cm. Aflați lungimea segmentului BC.

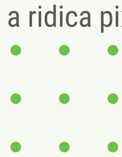
19. Pe dreapta d se consideră, în ordine, punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{20}$, astfel încât $A_1A_2 = 1$ cm, $A_2A_3 = 2$ cm, $A_3A_4 = 3$ cm, ...
Ce lungime au segmentele A_1A_4, A_4A_5, $A_{19}A_{20}$, respectiv, A_1A_{20}?

20. Pe dreapta d se consideră, în ordine, punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{20}$, astfel încât $A_1A_2 = 3$ cm, $A_2A_3 = 6$ cm, $A_3A_4 = 9$ cm, ... Ce lungime au segmentele $A_{19}A_{20}$, respectiv, A_1A_{20}?

Joc

Fără a ridica pixul, uniți toate punctele prin cât mai puține segmente:

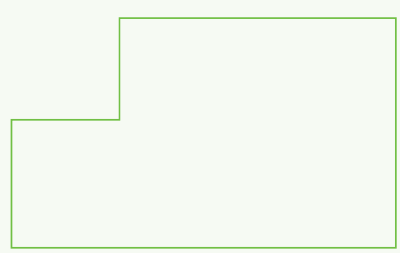
a)



b)

Temă de proiect

În figura următoare este realizat planul curții unei școli.
a) Măsurați cu rigla gradată și calculați perimetrul figurii.
b) Știind că 1 cm pe desen reprezintă 10 m pe teren, calculați perimetrul curții.
c) Realizați planul curții școlii voastre.



Lecția 4 Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de un punct

4.1. Mijlocul unui segment

De reținut

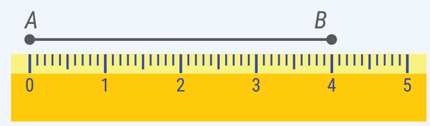
Mijlocul unui segment este un punct unic, interior segmentului, ce formează cu extremitățile segmentului două segmente congruente.

Notăm:
M este mijlocul segmentului AB, ceea ce înseamnă că $AM \equiv BM$.

Aplicație practică

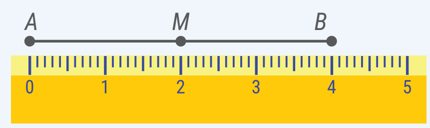
Determinarea mijlocului unui segment cu ajutorul riglei gradate

Pasul 1: Măsurăm segmentul AB:



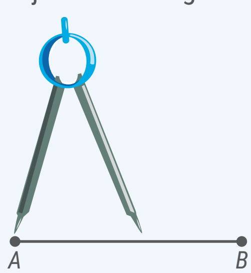
Pasul 2: Împărțim la 2 lungimea sa: $4 \text{ cm} : 2 = 2 \text{ cm}$.

Pasul 3: Reprezentăm pe segment punctul M, astfel încât $d(A;M) = AM = 2 \text{ cm}$:

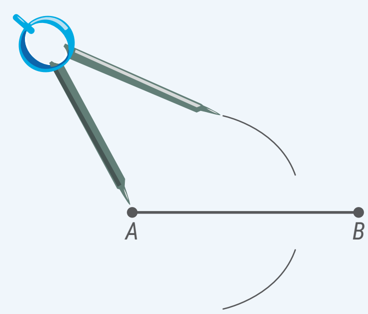


Determinarea mijlocului unui segment cu ajutorul compasului și al riglei negradate

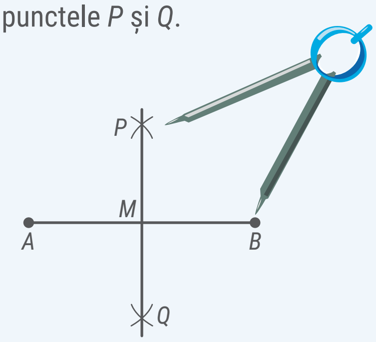
Pasul 1: Fixăm deschiderea compasului mai mare decât jumătatea segmentului:



Pasul 2: Cu centrul în A trasăm un arc de cerc cu deschiderea fixată:



Pasul 3: La fel, cu centrul în B și cu aceeași deschidere a compasului, trasăm un alt arc de cerc care să intersecteze primul arc în punctele P și Q.

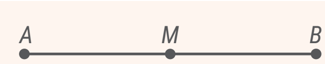


Pasul 4: Dreapta PQ taie segmentul AB în mijlocul său, M.

4.2. Simetricul unui punct față de un punct

De reținut

Simetricul unui punct A față de un punct M este un punct B, astfel încât M este mijlocul segmentului AB.



Notăm:
B este simetricul lui A față de M de unde rezultă că M este mijlocul segmentului AB.

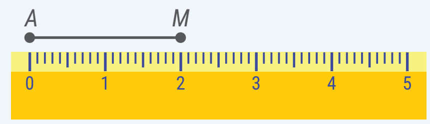
Observație
M este mijlocul segmentului AB, adică A și B sunt simetrice față de M.

Aplicație practică

Construcția simetricului unui punct față de un punct cu ajutorul riglei gradate

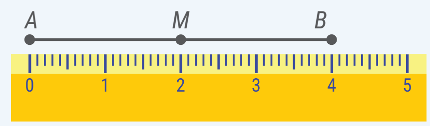
Desen inițial:

Pasul 1: Desenăm segmetul AM și măsurăm lungimea sa: În cazul nostru, $AM = 2$ cm.



Pasul 2: Prelungim segmentul AM, dincolo de M, cu un segment MB, astfel încât $MB = MA = 2$ cm.

Pasul 3: Deoarece $MA = MB \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului AB, rezultă că B este simetricul lui A față de M.

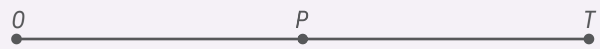


Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. a) Segmentul OT are lungimea egală cu 8 cm, iar P este mijlocul său. Aflați lungimea OP.

b) Segmentul OT are lungimea egală cu 8 cm, iar P este un punct interior acestui segment, astfel încât $OP = 4$ cm. Arătați că P este mijlocul segmentului OT.

Rezolvare:



a) P este mijlocul segmentului $OT \Rightarrow OP \equiv PT \Rightarrow OP = PT = \frac{1}{2} \cdot OT = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$.

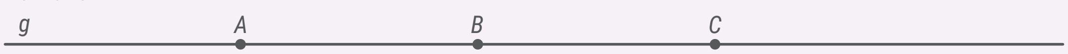
b) $PT = OT - OP = 8 \text{ cm} - 4 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$.

$\left.\begin{array}{l} OP = 4 \text{ cm} \\ PT = 4 \text{ cm} \end{array}\right\}$ de unde $OP = PT$, ceea ce înseamnă că $OP \equiv PT$, deci P este mijlocul segmentului OT.

2. a) Pe o dreaptă g se iau punctele A și B, astfel încât $AB = 3$ cm. Construiți simetricul lui A față de B și notați-l cu C. Ce lungime are segmentul BC?

b) Pe o dreaptă g se iau punctele A, B și C, în această ordine, astfel încât $AB = 3$ cm și $AC = 6$ cm. Arătați că A și C sunt simetrice față de B.

Rezolvare:

a) 

C este simetricul lui A față de B, deci B este mijlocul segmentului AC și, prin urmare, $AB \equiv BC \Rightarrow BC = AB = 3$ cm.

b) $BC = AC - AB = 6 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$.

$\left.\begin{array}{l} AB = 3 \text{ cm} \\ BC = 3 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = BC$, deci $AB \equiv BC$; rezultă că B este mijlocul segmentului AC, iar A și C sunt simetrice față de B.

3. Pe o dreaptă g considerați punctele distincte A și B.

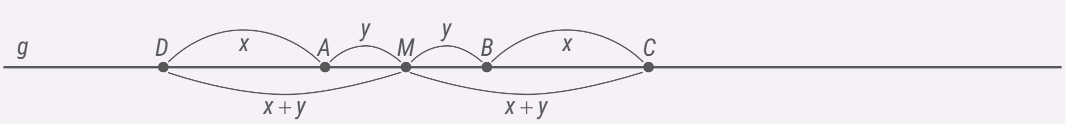
a) Construiți punctul C simetricul lui A față de B și D simetricul lui B față de A.

b) Arătați că D și C sunt simetrice față de mijlocul segmentului AB.

Rezolvare:

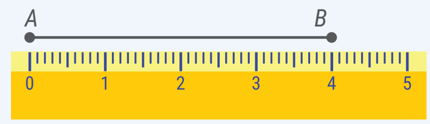
a) 

b) C este simetricul lui A față de $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului $AC \Rightarrow AB \equiv BC \Rightarrow AB = BC$.
D este simetricul lui B față de $A \Rightarrow A$ este mijlocul segmentului $DB \Rightarrow DA \equiv AB \Rightarrow DA = AB$.
Din $AB = BC$ și $DA = AB \Rightarrow DA = BC = x$, unde $x > 0$.
Fie M mijlocul segmentului $AB \Rightarrow AM \equiv MC \Rightarrow AM = MC = y$, unde $y > 0$.



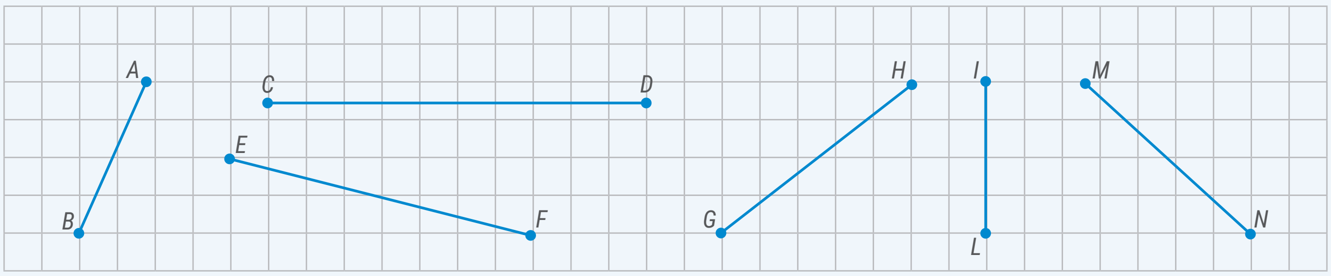
Atunci $\left.\begin{array}{l} DM = DA + AM = x + y \\ MC = MB + BC = y + x \end{array}\right\} \Rightarrow DM = MC \Rightarrow DM \equiv MC \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului $DC \Rightarrow D$ și C sunt simetrice față de M, mijlocul segmentului AB.

Probleme propuse



1. Marcați mijlocul segmentului AB și notați-l cu C, apoi marcați mijlocul segmentului AC și notați-l cu D.

2. Fără a le măsura, marcați mijloacele segmentelor AB, CD, EF, GH, IL, MN și notați-le cu O, P, R, S, Q, respectiv T.



3. a) Segmentul AB are lungimea egală cu 10 cm, iar C este mijlocul său. Aflați lungimea AC.
b) Segmentul AB are lungimea egală cu 10 cm, iar C este un punct interior acestui segment, astfel încât, $AC = 5$ cm. Arătați că punctul C este mijlocul segmentului AB.

4. Despre punctele coliniare E, F, G, H se știe că F este mijlocul segmentului GH, iar G este mijlocul segmentului EF.
a) Dacă $GF = 4$ cm, să se determine lungimea segmentului EH
b) Dacă $EH = 18$ cm, să se determine lungimea segmentului GF.

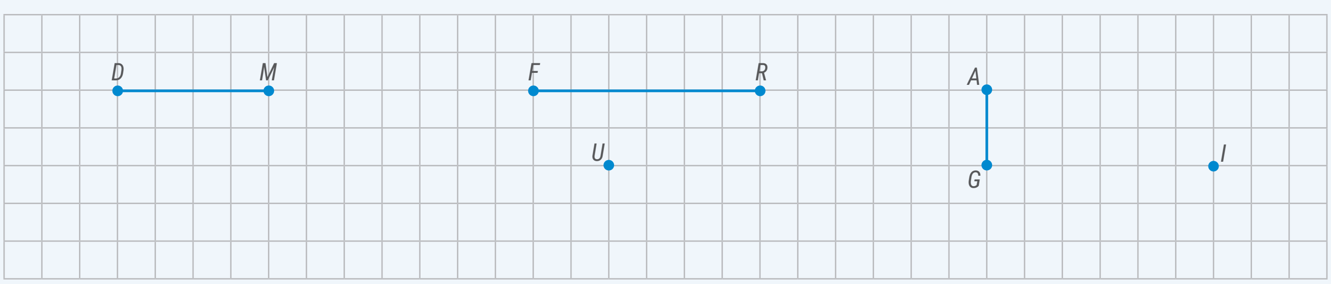
5. Pe o dreaptă d se consideră, în această ordine, punctele A, B, C și D, iar M este mijlocul segmentelor BC și AD. Arătați că $AB \equiv CD$.

6. Pe o dreaptă d se consideră, în această ordine, punctele A, B, C și D, astfel încât $AB \equiv CD$. Știind că M este mijlocul segmentelui BC, arătați că M este mijlocul segmentului AD.

7. ***Coloana fără Sfârșit***[1] are o înălțime de 29,70 m, este constituită din 16 module romboidale, fiecare având aceeași înălțime și se termină cu o jumătate de modul. În figura de mai jos, ***Coloana*** este reprezentată prin segmental M_0M_j, cele 16 module prin segmentele $M_0M_1, M_1M_2, M_2M_3, \ldots, M_{15}M_{16}$, iar jumătatea de modul prin segmental $M_{16}M_j$.

a) Ce înălțime are un modul?
b) Arătați că M_8 este mijlocul segmentului M_0M_{16}.

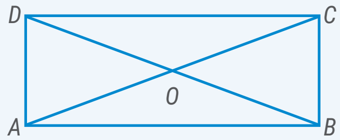
8. Realizați pe caiete rețeaua de mai jos, apoi construiți:
a) simetricul punctului D față de M și notați-l cu S;
b) simetricele punctelor F și R față de U și notați-le cu C, respectiv T;
c) simetricul punctului I față de A, respectiv G și notați-l cu E, respectiv O;
d) simetricul punctului I față de mijlocul segmentului AG și notați-l cu L.



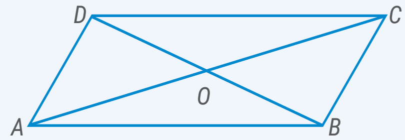
Măsurați cu ajutorul compasului distanța dintre punctele C și T și comparați-o cu lungimea segmentului FR.

[1] Sculptură a artistului român Constantin Brâncuși, parte a Ansamblului Monumental din Târgu Jiu.

9. Stabiliți, prin măsurare, pentru fiecare figură, dacă:

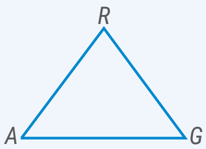


a) A și C sunt simetrice față de O;



b) B și D sunt simetrice față de O.

10. a) În triunghiul AGR din figura alăturată, identificați mijlocul segmentului GR și notați-l cu E.
b) Construiți simetricul lui A față de E și notați-l cu S.
c) Construiți simetricul lui R față de G și notați-l cu N.



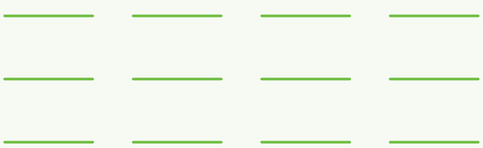
11. a) Pe o dreaptă g se iau punctele T și O, astfel încât $TO = 4$ cm. Construiți simetricul lui T față de O și notați-l cu N. Ce lungime are segmentul ON?
b) Pe o dreaptă g se iau punctele T, O și N, în această ordine, astfel încât $TO = 5$ cm și $TN = 10$ cm. Arătați că T și N sunt simetrice față de O.

12. Pe o dreaptă g considerați punctele distincte E și A.
a) Construiți punctul S, simetricul lui E față de A și C simetricul lui A față de E.
b) Arătați că E și A sunt simetrice față de mijlocul segmentului CS.

13. Luca, Vlad, Dina și Bianca se așază în punctele L, V, D, respectiv B ale unei linii drepte.
Dacă Bianca s-a așezat la jumătatea distanței dintre Vlad și Luca, punctele V și B sunt simetrice față de D, iar distanța dintre Vlad și Luca este egală cu 14 m, calculați distanța dintre Dina și Luca.

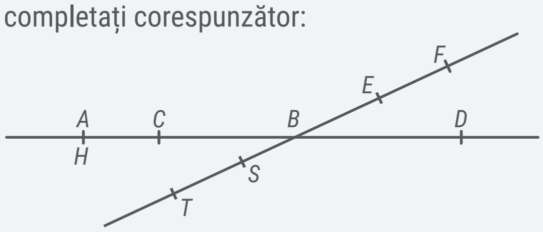
Joc

a) Alături sunt desenate 12 drepte. Realizați un desen asemănător cu ajutorul a 12 bețe de chibrit.
b) Mutați 3 bețe, astfel încât să aveți același număr de bețe, atât pe fiecare orizontală, cât și pe verticală.



Minitest

1. Folosind figura alăturată, completați corespunzător:



a) A și H sunt . . . . , iar A și C sunt . . . .
1 punct

b) A, B, D sunt . . . . , iar A, B, E sunt . . . .
1 punct

c) Față de dreapta AB, punctul C este . . . . , iar punctul F este . . . .
1 punct

d) AC și BD sunt drepte . . . . , iar AC și TS sunt drepte . . . .
1 punct

e) Pentru semidreapta ES punctul E indică . . . . , iar punctul S indică . . . .
1 punct

2. Desenați un segment CR, astfel încât $CR = 9$ cm. Fie E mijlocul acestuia.
a) Aflați lungimea segmentului ER.
b) Marcați un punct, T, exterior dreptei CR, și construiți simetricul lui T față de E.
2 puncte

3. Pe o dreaptă g fixați punctele distincte M, U, N, C, A, în această ordine, astfel încât $MU = 3$ cm, $MU \equiv CA$, iar N este mijlocul segmentului UC. Arătați că M și A sunt simetrice față de N.
2 puncte

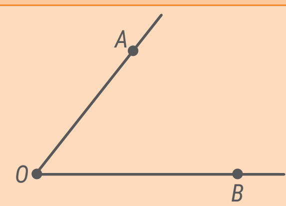
Din oficiu: **1 punct**

Lecția 5 Unghi: definiție, notații, elemente. Interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi. Măsurarea unui unghi. Operații cu măsuri de unghiuri. Unghiuri congruente. Clasificări

5.1. Unghiul. Elementele unui unghi

De reținut

Figura geometrică determinată de două semidrepte cu aceeași origine se numește *unghi*.

Desenăm	Citim	Notăm
	Unghiul *AOB* sau unghiul *BOA* sau unghiul *O*	$\sphericalangle AOB$ $\sphericalangle BOA$ $\sphericalangle O$

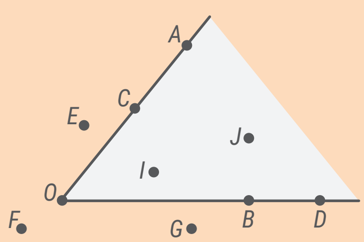
Originea comună a celor două semidrepte se numește *vârful unghiului*.
Cele două semidrepte se numesc *laturile unghiului*.
Astfel, pentru unghiul notat $\sphericalangle AOB$, vârful este *O*, iar laturile sale sunt semidreptele *OA* și *OB*.

Observație
Dacă notăm unghiul cu trei litere, atunci litera care marchează vârful acestuia se scrie, totdeauna, pe poziția a doua. Dacă îl notăm cu o singură literă, aceasta va fi cea care marchează vârful.

5.2. Pozițiile relative ale unui punct față de un unghi

De reținut

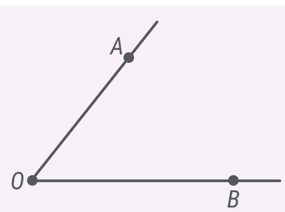
Punctele ce se află pe laturile unghiului aparțin unghiului, iar cele care nu se află pe laturile unghiului se află fie în interiorul unghiului, fie în exteriorul unghiului.

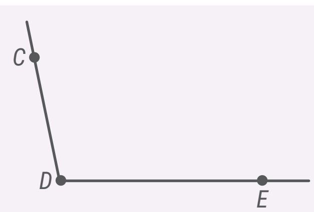
Desenăm	Citim	Notăm
	*A*, *C*, *O*, *B* și *D* aparțin unghiului *AOB*	*A*, *C*, *O*, *B* și *D* aparțin $\sphericalangle AOB$
	I și *J* se află în interiorul unghiului *AOB*	*I* și *J* aparțin $Int(\sphericalangle AOB)$
	E, *F* și *G* se află în exteriorul unghiului *AOB*	*E*, *F* și *G* aparțin $Ext(\sphericalangle AOB)$

5.3. Unități de măsură pentru unghi

Mate practică

Desenăm pe o foaie unghiul *AOB* și unghiul *CDE*.
Decupăm unghiul *AOB* și-l suprapunem peste unghiul *CDE*.





Ce observăm?
Unghiul *CDE* are deschiderea dintre laturile sale, *DC* și *DE*, mai mare decât decât deschiderea dintre laturile *OA* și *OB* ale unghiului *AOB*.

De reținut

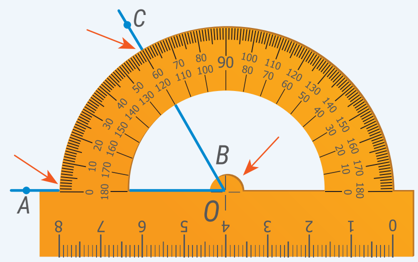
Pentru a compara două unghiuri nu ne interesează lungimile laturilor. Acestea sunt semidrepte și, fiind infinite, nu pot fi măsurate. Ne interesează cât de mare este deschiderea dintre laturile unghiului.

Cea mai folosită unitate pentru măsurarea unghiurilor este unghiul de *un grad sexagesimal*. Denumirea provine de la faptul că *minutul* este unitatea de 60 de ori mai mică decât gradul: $1° = 60'$.

Măsura unui unghi este numărul care ne arată de câte ori se cuprinde unitatea de măsură în interiorul acelui unghi.

Aplicație practică

Măsurarea unui unghi dat, *ABC*



Pasul 1: Se așază raportorul astfel încât vârful unghiului să fie în punctul *O*, care este centrul semicercului raportorului. În cazul nostru, vârful *B* al unghiului *ABC* se așază în centrul semicercului, *O*.

Pasul 2: O latură a unghiului trebuie să treacă prin punctul de diviziune corespunzător lui 0°. În cazul nostru, latura *BA* trece prin punctul de diviziune corespunzător lui 0°.

Pasul 3: Diviziunea de pe raportor situată pe direcția celeilalte laturi ne dă măsura unghiului *ABC*.
În cazul nostru, latura *BC* este situată pe diviziunea de 60° a raportorului.

Pasul 4: Scriem că $\sphericalangle ABC = 60°$.

5.4. Operații cu măsuri de unghiuri

De reținut

$35°8' + 13°27' = (35° + 13°) + (8' + 27') = 48°35'$;
$57°41' - 3°2' = (57° - 3°) + (41' - 2') = 54°39'$;
$31°12' \cdot 3 = (31° \cdot 3) + (12' \cdot 3) = 93°36'$;
$80°45' : 5 = (80° : 5) + (45' : 5) = 16°9'$.

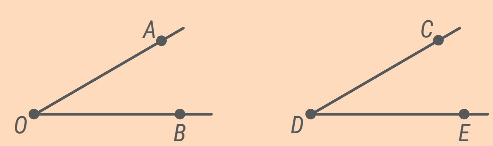
Dacă este cazul, transformăm minutele în grade sau gradele în minute, ținând cont că $60' = 1°$:

$35°36' + 47°58' = (35° + 47°) + (36' + 58') = 82° + 94' = 82° + 1°34' = 83°34'$;
$58°10' - 24°42' = 57°70' - 24°42' = 33°28'$;
$(28°34') \cdot 5 = 140°170' = 140° + (2°50') = 142°50'$;
$63°16' : 4 = 15° + (3°16' : 4) = 15° + (196' : 4) = 15°49'$.

5.5. Unghiuri congruente

De reținut

Două unghiuri care au aceeași măsură se numesc *unghiuri congruente*.

Desenăm	Citim	Notăm
	$\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle CDE$ au aceeași măsură	$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CDE$

Aplicație practică

Construcția unui unghi congruent cu un unghi dat cu ajutorul raportorului

Se dă un unghi $\sphericalangle ABC$ și se cere construcția unui unghi $\sphericalangle DEF$ congruent cu acesta.

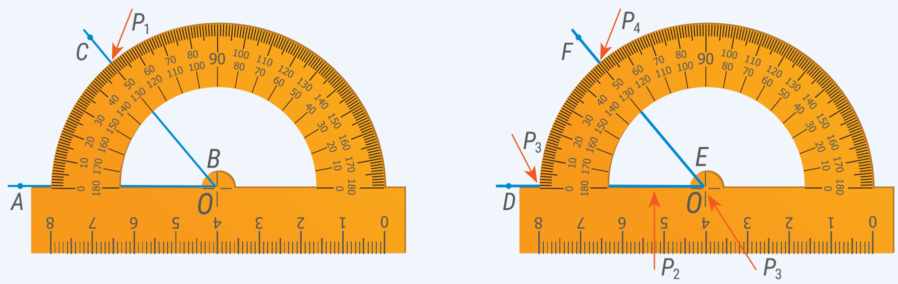
Pasul 1: Măsurăm unghiul dat, $\sphericalangle ABC$, și obținem că $\sphericalangle ABC = 50°$. (Vezi model p. 188.)

Pasul 2: Se construiește semidreapta *ED*, una dintre laturile unghiului *DEF*.

Pasul 3: Așezăm punctul *O* al raportorului în *E* și latura *ED* pe direcția diviziunii ce indică 0°.

Pasul 4: Marcăm punctul *F* în dreptul diviziunii de 50° și trasăm semidreapta *EF*.

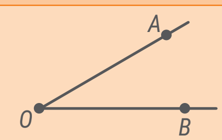
Pasul 5: $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC = 50°$, deci $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle ABC$.



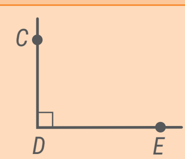
5.6. Clasificarea unghiurilor

De reținut

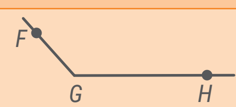
Unghiul *ascuțit* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 0° și 90°.

Desenăm	Citim
	$0° < \sphericalangle AOB < 90°$, deci $\sphericalangle AOB$ este ascuțit.

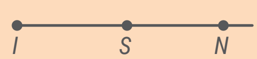
Unghiul *drept* este unghiul a cărui măsură este egală cu 90°.

Desenăm	Citim
	$\sphericalangle CDE = 90°$, deci $\sphericalangle CDE$ este drept.

Unghiul *obtuz* este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 90° și 180°.

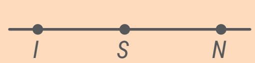
Desenăm	Citim
	$90° < \sphericalangle FGH < 180°$, deci $\sphericalangle FGH$ este obtuz.

Unghiul *nul* este unghiul a cărui măsură este egală cu 0°.

Desenăm	Citim
	$\sphericalangle SIN = 0°$, deci $\sphericalangle SIN$ este nul.

Observație. Laturile unghiului *SIN* sunt semidreptele *IS* și *IN*, care au aceeași origine (punctul *I*, vârful unghiului) și **același sens** (se suprapun, sunt identice, coincid).

Unghiul *alungit* este unghiul a cărui măsură este egală cu 180°.

Desenăm	Citim
	$\sphericalangle ISN = 180°$, deci $\sphericalangle ISN$ este alungit.

Observație. Laturile unghiului *ISN* sunt semidreptele *SI* și *SN* care au aceeași origine, dar **sensuri opuse**. *SI* și *SN* formează dreapta *IN*, iar vârful unghiului, *S*, este punct interior segmentului *IN*.

Pentru a arăta că trei puncte A, B, C sunt coliniare, în această ordine, în anumite probleme, este suficient să arătăm că unghiul ABC este alungit (metoda unghiului alungit)!

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Semidreptele BA, BC, BD formează o figură geometrică în care unghiul CBD este drept, iar măsura unghiului ABC este de trei ori mai mare decât măsura unghiului ABD. Aflați măsurile unghiurilor ABC și ABD.

Rezolvare:

Notăm măsura unghiului ABD cu x.

Atunci măsura unghiului ABC este $3x$.

Distingem două cazuri, reprezentate în figura 1 și, respectiv, în figura 2:

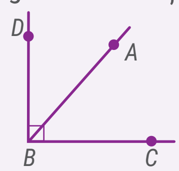


Figura 1

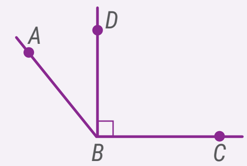
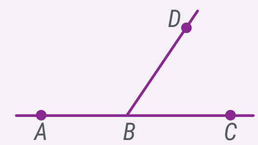


Figura 2

Cazul I: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$, de unde $3x + x = 90°$, deci $4x = 90°$, iar $x = 22°30'$. Atunci $\sphericalangle ABD = 22°30'$, iar $\sphericalangle ABC = 3x = 67°30'$.

Cazul al II-lea: $\sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$, de unde $3x - x = 90°$, deci $2x = 90°$, iar $x = 45°$. În acest caz, $\sphericalangle ABD = 45°$, iar $\sphericalangle ABC = 3x = 45° \cdot 3 = 135°$.

2. În figura alăturată, $\sphericalangle ABD$ are măsura de $120°$, iar $\sphericalangle DBC$ are măsura jumătate din măsura unghiului ABD. Arătați că punctele A, B, C sunt coliniare.



Rezolvare:

Măsura unghiului DBC este jumătate din măsura unghiului ABD, deci $\sphericalangle DBC = 120° : 2 = 60°$.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = 120° + 60° = 180°$, deci $\sphericalangle ABC$ este alungit, iar A, B, C sunt coliniare.

3. Măsura unghiului AOB este $53° + n°$. Aflați numărul natural n pentru care unghiul este succesiv:

a) ascuțit; b) drept; c) obtuz.

Rezolvare:

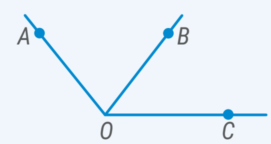
a) $\sphericalangle AOB$ este ascuțit, deci $0° < \sphericalangle AOB < 90°$, de unde $0° < 53° + n° < 90°$, iar $0° \leq n° < 37°$ și, ținând cont că numărul n este natural, n poate lua valorile 0, 1, 2, 3, …, 36.

b) $\sphericalangle AOB$ este drept, de unde $\sphericalangle AOB = 90°$, deci $53° + n° = 90°$, iar $n = 37$.

c) $\sphericalangle AOB$ este obtuz, de unde $90° < \sphericalangle AOB < 180°$, deci $90° < 53° + n° < 180°$, iar $37° < n° < 127°$ și, ținând cont că numărul n este natural, n poate lua valorile 38, 39, 40, …, 126.

Probleme propuse

1. Completați pentru a obține propoziții adevărate:



a) În figura alăturată sunt desenate trei unghiuri: $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle \ldots$ și $\sphericalangle \ldots$.

b) Laturile unghiului AOB sunt semidreptele OA și …, iar vârful este … .

c) Laturile unghiului BOC sunt semidreptele … și …, iar vârful este … .

2. a) Fără a măsura unghiurile de mai jos, estimați măsura fiecăruia și notați-o:

b) Măsurați fiecare unghi și aflați eroarea pe care ați făcut-o prin estimare.

3. Transformați în minute sexagesimale:

a) $8°$; b) $35°$; c) $9°10'$; d) $15°30'$; e) $65°45'$.

4. Transformați în grade sexagesimale:

a) $300'$; b) $1\,200'$; c) $3\,720'$; d) $3\,750'$; e) $4\,845'$.

5. Efectuați:

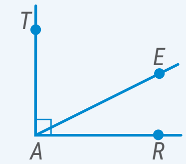
a) $34° + 56°$; b) $75° - 28°$; c) $19° \cdot 8$; d) $154° : 7$; e) $27°18' + 56°24'$;

f) $5°38' + 8°53'$; g) $75° - 28°53'$; h) $27°45' \cdot 5$; i) $75° : 4$; j) $122°50' : 5$.

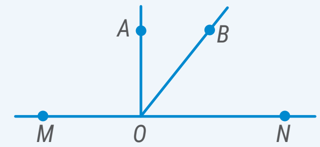
6. Aproximați următoarele măsuri, cu o eroare de $1°$, prin lipsă, respectiv, prin adaos și stabiliți care dintre cele două aproximări reprezintă valoarea rotunjită:

a) $56°28'$; b) $27°51'$; c) $107°10'$; d) $59°30'$; e) $89°35'$.

7. În figura alăturată, măsura unghiului *TAR* este egală cu 90°, iar măsura *TAE* este de două ori mai mare ca măsura unghiului *EAR*.
Aflați măsurile unghiurilor *EAR* și *TAE*.

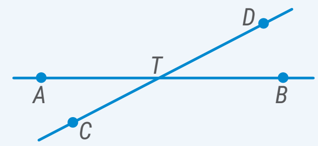


8. Folosind figura alăturată, stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:



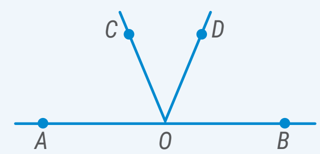
a) $\sphericalangle OMN$ este unghi nul; b) $\sphericalangle MON$ este unghi alungit;
c) $\sphericalangle MNO$ este unghi nul; d) $\sphericalangle MOB$ este unghi ascuțit;
e) $\sphericalangle MOA$ este unghi drept; f) $\sphericalangle MOB$ este unghi obtuz;
g) $\sphericalangle NOA$ nu este unghi drept; h) $\sphericalangle AOB$ este unghi ascuțit.

9. În desenul alăturat, dreptele *AB* și *CD* sunt concurente în punctul *T*:
a) Măsurați unghiurile *ATC* și *BTD* și stabiliți dacă sunt congruente.
b) Măsurați cu raportorul unghiurile *ATD* și *BTC* și stabiliți dacă sunt congruente.



10. Fie un unghi $\sphericalangle ABC$, astfel încât măsura sa este egală cu $65° + n°$. Aflați numărul natural *n* pentru care unghiul $\sphericalangle ABC$, este succesiv:
a) ascuțit; b) drept; c) obtuz; d) alungit.

11. În figura alăturată, $\sphericalangle AOB$ este un unghi alungit, iar $\sphericalangle AOC$ și $\sphericalangle COD$ au măsura egală cu 70° și, respectiv, cu 40°. Arătați că $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle BOD$.



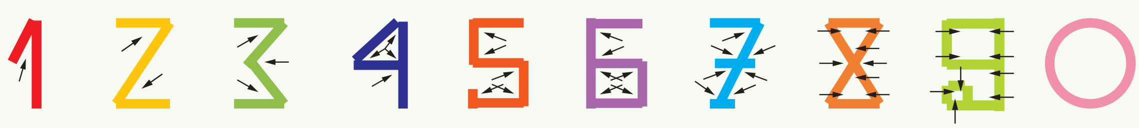
12. Desenați un unghi *COL* cu măsura de 140°, iar în exteriorul acestuia marcați un punct *T*, astfel încât măsura unghiului *LOT* să fie egală cu două șeptimi din măsura unghiului *COL*. Arătați că punctele *C*, *O*, *T* sunt coliniare.

13. Măsura unghiului *ABC* este 45°. În exteriorul dreptei *AB* se ia un punct *D*, astfel încât măsura unghiului *CBD* este 75% din 60°, iar punctul *C* să fie situat în interiorul unghiului *ABD*. Arătați că:
a) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CBD$; b) $\sphericalangle ABD$ este drept.

14. Unghiul *AIL* este alungit, iar *S* este un punct exterior dreptei *AL*, astfel încât măsura unghiului *AIS* este egală cu 120°. În interiorul unghiului *AIS* se ia un punct *B*, astfel încât $\sphericalangle BIA \equiv \sphericalangle BIS$.
a) Aflați măsura unghiului *BIS*. b) Arătați că $\sphericalangle BIS \equiv \sphericalangle LIS$.

Știați că...

În vechime, pentru scrijelirea lor mai ușoară pe nisip, pe tăblițe de lut sau în piatră, cifrele arabe erau formate din linii drepte. Descoperiți logica formei lor:



1 unghi | 2 unghiuri | 3 unghiuri | 4 unghiuri | 5 unghiuri | 6 unghiuri | 7 unghiuri | 8 unghiuri | 9 unghiuri | 0 unghiuri

Minitest

1. Latura comună unghiurilor $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle CBD$ este ..., iar vârful comun este ... . **2 puncte**

2. $75° : 2 = ...° \; ...'$. **1 punct**

3. Desenați un unghi *BAC* cu măsura de 100°, iar în exteriorul acestuia marcați un punct *I*, astfel încât măsura unghiului *CAI* să fie egală cu 80% din măsura unghiului *BAC*.
Arătați că punctele *B*, *A*, *I* sunt coliniare. **3 puncte**

4. Se consideră unghiul *VAP* cu măsura egală cu 60°. În exteriorul unghiului se ia un punct *O*, astfel încât măsura unghiului *PAO* să fie jumătate din măsura unghiului *VAP*. Apoi se ia un un punctul *R*, astfel încât unghiul *PAR* să fie drept, iar *O* să fie punct interior unghiului *PAR*. Arătați că $\sphericalangle VAP \equiv \sphericalangle RAO$. **3 puncte**

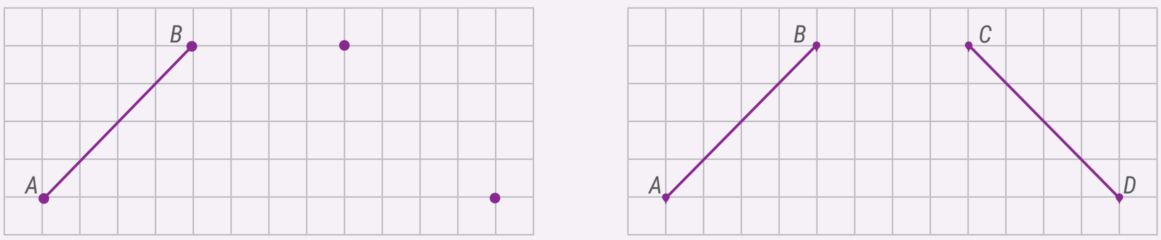
Din oficiu: **1 punct**

Lecția 6 Figuri congruente. Axa de simetrie

6.1. Figuri congruente

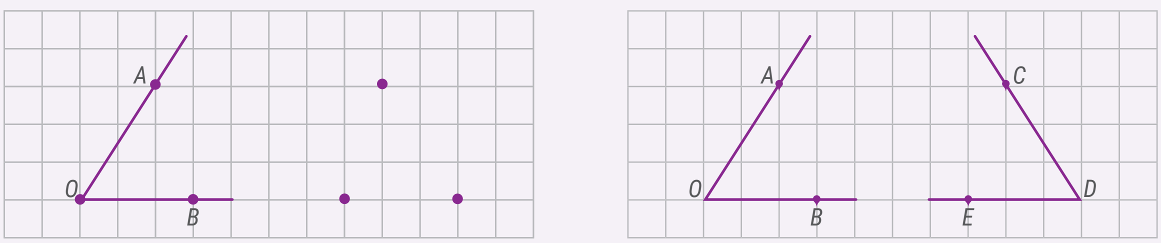
Mate practică

1. Pe o foaie dreptunghiulară, în partea stângă, desenăm un segment de dreaptă, *AB*. Punem două picături fine de acuarelă în A și B. Pliem foaia pe jumătate, apoi presăm cu mâna hârtia astfel îndoită, după care o desfacem. Notăm cele două puncte obținute în partea dreaptă cu *C* și *D*, apoi trasăm segmentul *CD*.



Ce observăm?
Măsurăm cu rigla cele două segmente. Observăm că au aceeași lungime.
Cele două segmente sunt congruente și scriem $AB \equiv CD$.

2. Pe o foaie dreptunghiulară, desenăm în partea stângă un unghi *AOB*. Punem trei picături de acuarelă în *A*, *O* și *B*. Pliem foaia pe jumătate, apoi presăm cu mâna hârtia astfel îndoită, după care o desfacem. Notăm cele trei puncte obținute în partea dreaptă cu *C*, *D* și *E*, apoi desenăm unghiul *CDE*.



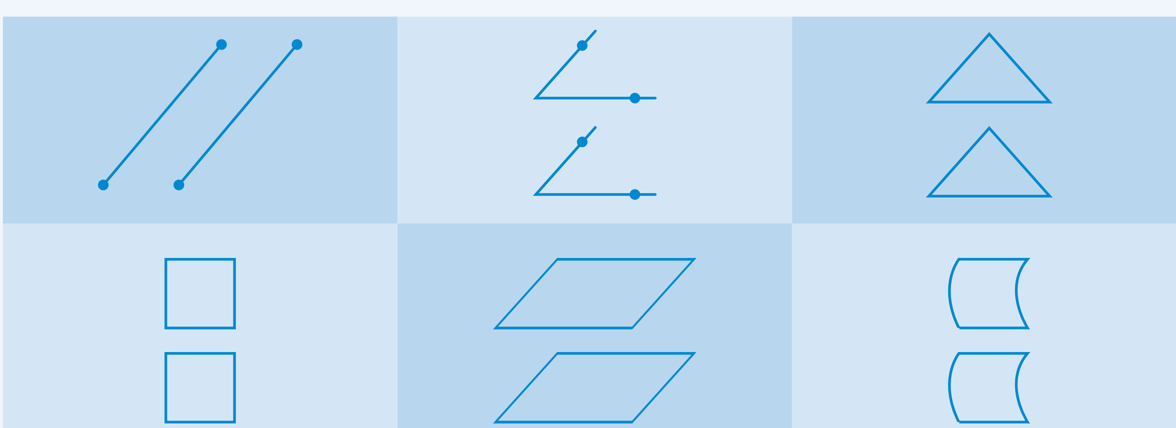
Ce observăm?
Măsurăm cu raportorul cele două unghiuri. Observăm că au aceeași măsură.
Cele două unghiuri sunt congruente și scriem $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CDE$.

De reținut

În general, despre două figuri geometrice plane se spune că sunt congruente dacă, prin suprapunere, coincid.

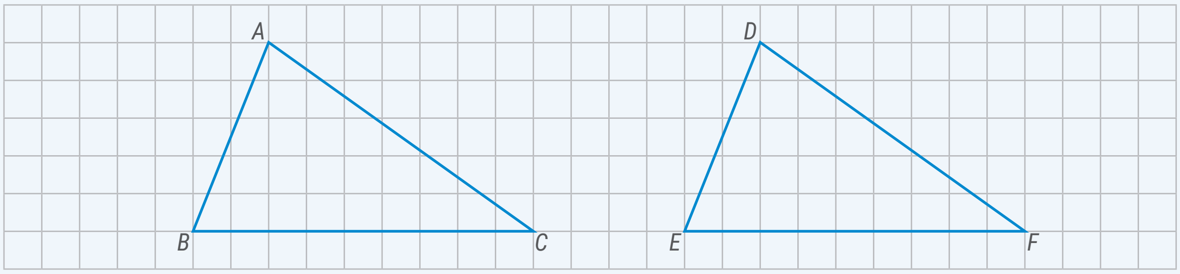
Exemple

Următoarele perechi de figuri geometrice sunt congruente:



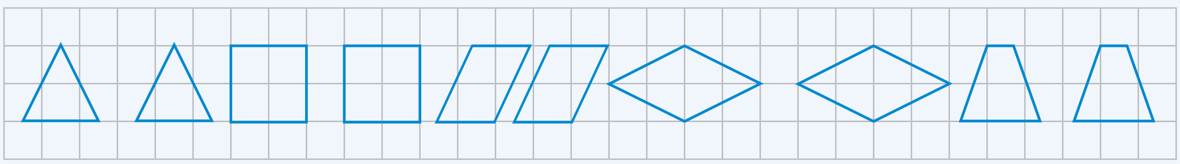
Aplicație practică

Pe un carton sau pe un placaj desenăm un triunghi. Decupăm suprafața triunghiulară obținută, o notăm cu *ABC* și o așezăm pe un alt carton. Cu un creion bine ascuțit, desenăm conturul triunghiului, îl decupăm și-l notăm cu *DEF*. Cele două triunghiuri coincid prin suprapunere și, automat, coincid și elementele lor corespondente.



Astfel, din $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ avem și corespondența laturilor: $AB \equiv DE$, $BC \equiv EF$, $CA \equiv DF$, respectiv corespondența unghiurilor $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$.

Următoarele perechi de poligoane sunt congruente:



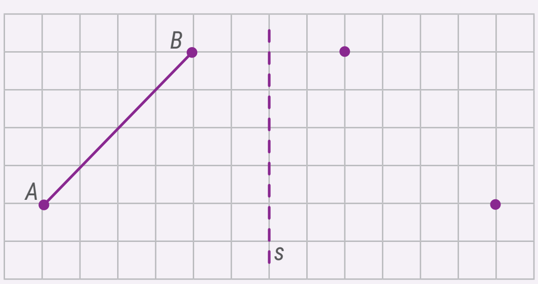
De reținut

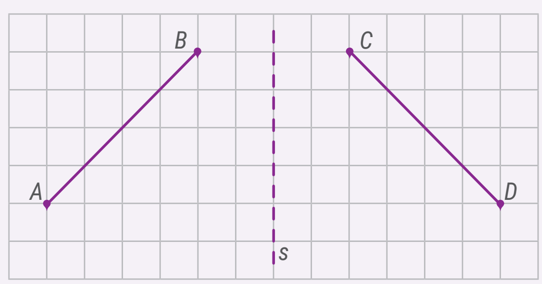
Poligoanele congruente au exact aceeași dimensiune și formă. Elementele corespondente a două poligoane congruente sunt congruente.

6.2. Axa de simetrie

Mate practică

1. Pe o foaie dreptunghiulară, desenăm în partea stângă un segment de dreaptă, *AB*. Punem două picături fine de acuarelă în *A* și *B*. Pliem foaia de-a lungul dreptei *s*, presăm cu mâna hârtia astfel îndoită, apoi o desfacem. Notăm cele două puncte obținute în partea dreaptă cu *C*, respectiv *D* și trasăm segmentul *CD*.





Ce observăm?
Dacă îndoim foaia de-a lungul dreptei *s*, cele două segmente coincid prin suprapunere.
Segmentele *AB* și *CD* sunt congruente.

2. Pe o foaie dreptunghiulară, desenăm în partea stângă un unghi *AOB*. Punem trei picături fine de acuarelă în *A*, *O* și, respectiv *B*. Pliem foaia de-a lungul dreptei *s*, presăm hârtia astfel îndoită, apoi o desfacem. Notăm cele trei puncte obținute în partea dreaptă cu *C*, *D*, respectiv *E* și desenăm unghiul *CDE*.

Ce observăm?
Dacă îndoim foaia de-a lungul dreptei *s*, cele două unghiuri coincid prin suprapunere.
Unghiurile *AOB* și *CDE* sunt congruente.

De reținut

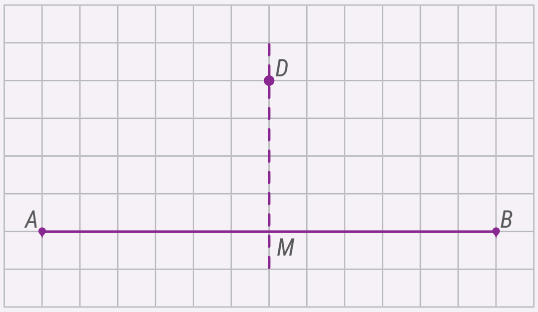
Dacă putem îndoi o figură geometrică de-a lungul unei drepte, astfel încât cele două părți formate să coincidă prin suprapunere, spunem că figura geometrică este *simetrică*. Dreapta după care s-a realizat îndoirea se numește *axă de simetrie*.

Mate practică

1. Desenăm un segment de dreaptă *AB* și marcăm punctul *M*, mijlocul acestui segment. Construim o dreaptă *DM* perpendiculară pe *AB*. Punem o picătură fină de acuarelă în *A* și pliem foaia de-a lungul dreptei *DM*, presăm cu mâna peste hârtia astfel îndoită și apoi o desfacem.

Ce observăm?

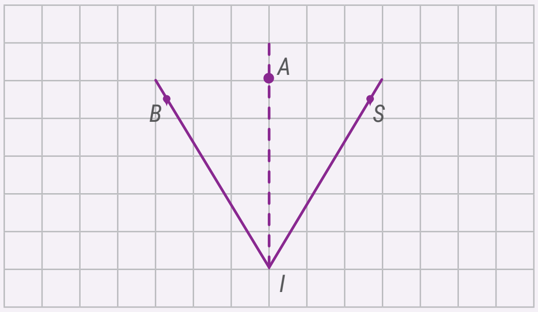
Dreapta *MD* este axa de simetrie a segmentului *AB*.



2. Desenăm un unghi *BIA*, punem o picătură fină de acuarelă în *B* și pliem foaia de-a lungul semidreptei *IA*. Presăm cu mâna hârtia astfel îndoită, apoi o desfacem. Marcăm punctul *S* în urma lăsată de acuarelă și trasăm semidreapta *IS*.

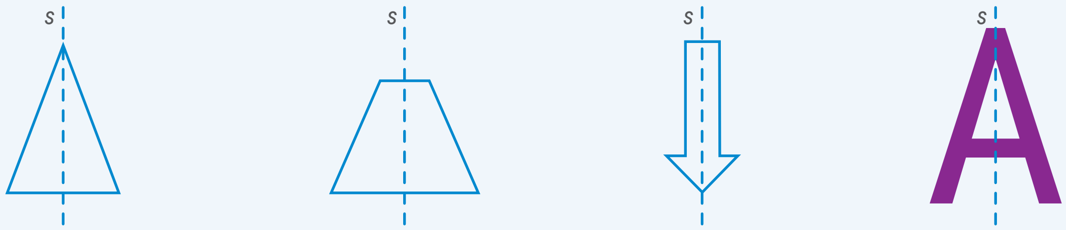
Ce observăm?

Dreapta *IA* este axa de simetrie a unghiului *BIS*.



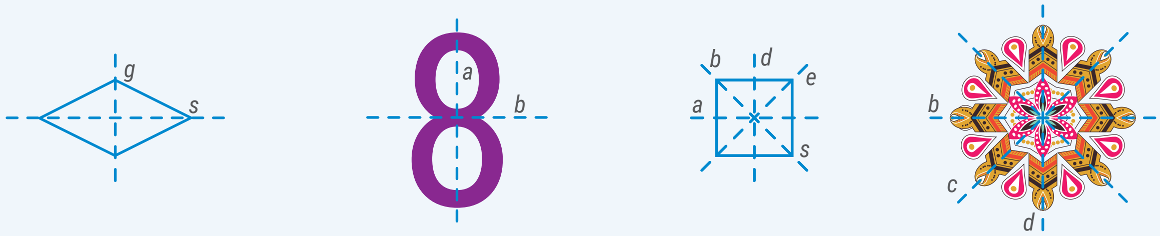
Exemple

Unele figuri admit axă de simetrie verticală:



Alte figuri admit axă de simetrie orizontală:

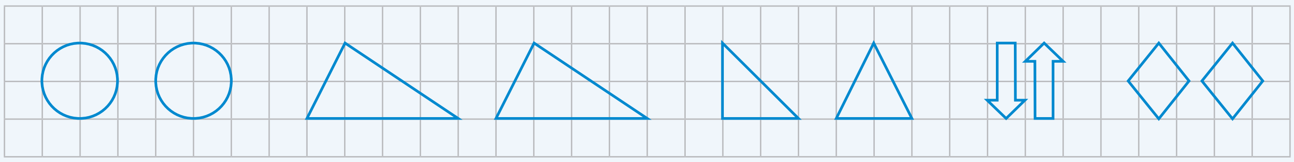
Există și figuri care admit mai multe axe de simetrie:



VI Elemente de geometrie

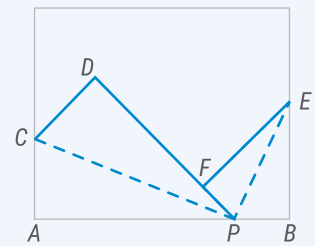
Probleme propuse

1. Desenați pe o foaie următoarele figuri de mai jos:



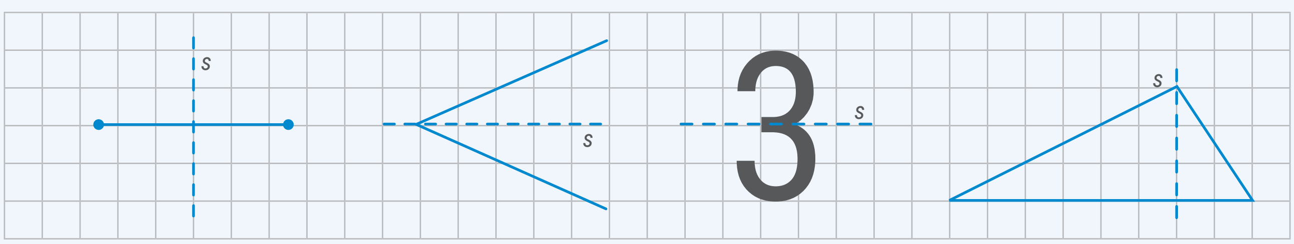
Decupați-le și, prin suprapunere, stabiliți perechile de figuri congruente.

2. Luați o foaie de hârtie dreptunghiulară și notați lungimea cu AB.
Îndoiți colțul hârtiei care conține punctul A și trasați conturul colțului îndoit.
Notați cu D punctul care îi corespunde punctului A pe foaie și apoi desfaceți colțul.
Notați dreapta rezultată prin presare cu PC. Procedăm la fel cu colțul din dreapta hârtiei, astfel încât corespondentul punctului B să fie un punct F, interior segmentului DP.
Notăm cu E celălalt capăt al dungii imprimate prin presare.



a) Triunghiul ACP s-a suprapus peste triunghiul DCP și atunci $\Delta ACP \equiv \Delta \ldots$.
Datorită acestei suprapuneri, avem următorele perechi de elemente congruente:
$AC \equiv DC$, $AP \equiv \ldots$, $CP \equiv \ldots$, respectiv, $\sphericalangle ACP \equiv \sphericalangle DCP$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle \ldots$, $\sphericalangle APC \equiv \sphericalangle \ldots$.
b) Triunghiul EBP s-a suprapus peste triunghiul $\ldots$ și atunci $\Delta \ldots \equiv \Delta EFP$.
Scrieți elementele congruente corespunzătoare.
c) Stabiliți prin măsurare cu raportorul dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv \sphericalangle CPE$.

3. Desenați următoarele figuri de mai jos:



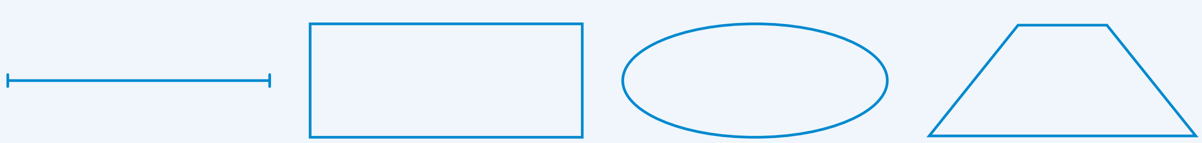
Decupați-le și, prin suprapunere, stabiliți, în fiecare caz, dacă dreapta s este axă de simetrie.

4. Construiți pe o hârtie un unghi xOy cu măsura egală cu $60°$, iar pe laturile Ox, Oy marcați punctele A și B, astfel încât $OA = OB = 6$ cm. Puneți în evidență segmentul AB. Decupați triunghiul AOB obținut.
a) Îndoiți triunghiul AOB, astfel încât A să se suprapună peste B, presați, desfaceți hârtia și notați cu M punctul unde dunga imprimată întâlnește segmentul AB. Datorită suprapunerii efectuate, putem afirma că:
- Punctul M este $\ldots$ segmentului AB și $AM \equiv \ldots$;
- OM este axa de simetrie a unghiului $\ldots$ și $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle \ldots$;

b) Îndoiți triunghiul AOB, astfel încât A să se suprapună peste O, presați, desfaceți hârtia și notați cu T punctul în care dunga imprimată întâlnește segmentul AO. Datorită suprapunerii efectuate, putem afirma că:
- Punctul T este mijlocul segmentului $\ldots$ și $AT \equiv \ldots$.
- BT este $\ldots$ a unghiului ABO și $\sphericalangle \ldots \equiv \sphericalangle \ldots$.

c) Creați singuri o sarcină suplimentară și scrieți cel puțin 4 afirmații.

5. Trasați axele de simetrie ale următoarelor figuri geometrice:

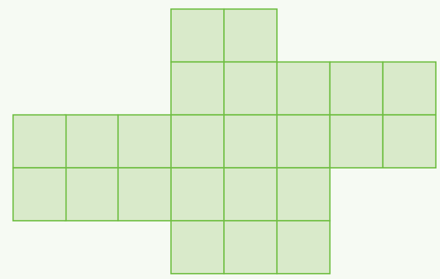


6. Folosind, eventual, desenele din această lecție, stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) Un segment are o singură axă de simetrie.
b) Un unghi are o singură axă de simetrie.
c) Cifra 8 admite două axe de simetrie.
d) Litera H admite două axe de simetrie.
e) Dreptunghiul admite două axe de simetrie.
f) Pătratul admite patru axe de simetrie.

7. Scrieți literele A, D, E, F, M, T, V, W, O și precizați care dintre ele au axă de simetrie.

Joc

Împărțiți figura alăturată în patru părți congruente construind doar trei segmente.



Minitest

1. În figura 1, prin îndoire de-a lungul dreptei *g*, punctul *A* se suprapune peste punctul *B*. Completați corespunzător.

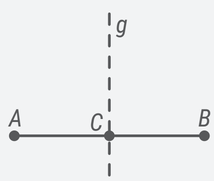


Figura 1

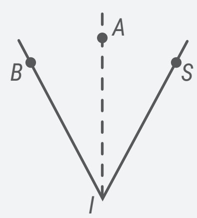


Figura 2


Figura 3

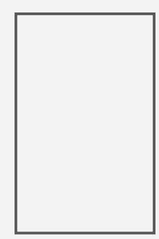


Figura 4

a) $AC \equiv \ldots$. **1 punct**
b) Punctul *C* este … segmentului *AB*; **1 punct**
c) Dreapta g este … a segmentului AB. **1 punct**

2. În figura 2, prin îndoire de-a lungul dreptei *IA*, punctul *B* se suprapune peste punctul *S*. Completați corespunzător:
a) $\sphericalangle AIB \equiv \sphericalangle \ldots$. **1 punct**
b) Dreapta *IA* este … a unghiului … . **1 punct**

3. Trasați axa de simetrie pentru figura 3. **1 punct**

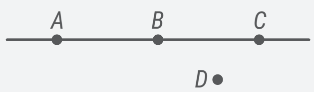
4. Construiți axele de simetrie pentru dreptunghiul din figura 4. **1 punct**

5. Care sunt cifrele din sistemul zecimal care au axă de simetrie? **2 puncte**

Din oficiu: **1 punct**

Evaluare — Elemente de geometrie

1. În figura următoare sunt coliniare punctele:

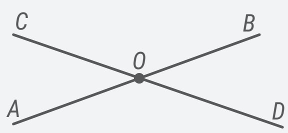


a) *A*, *B* și *C*
b) *A*, *B* și *D*
c) *C*, *B* și *D*
d) *A*, *C* și *D*

2. *A* și *B* sunt două puncte distincte. Numărul dreptelor care conțin cele două puncte este egal cu:

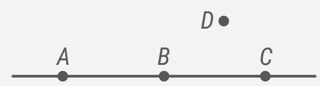
a) 2
b) 1
c) 3
d) nu se poate determina

3. Dreptele AB și CD din figura de mai jos sunt:



a) paralele
b) identice
c) concurente
d) confundate

4. Dintre propozițiile ce urmează, falsă este:



a) Segmentele *AC* și *CA* coincid
b) Semidreptele *AC* și *CA* coincid
c) Dreptele *AC* și *CA* sunt identice
d) Semidreptele *AC* și *AB* coincid

5. *A*, *B*, *C* și *D* sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB = 3$ cm, *C* este simetricul lui *A* față de *B*, iar $AC \equiv CD$. Atunci lungimea segmentului *AD* este egală cu:

a) 12 cm
b) 6 cm
c) 9 cm
d) 10 cm

6. Dintre un pătrat, un cerc, un dreptunghi și un unghi, două axe de simetrie are:

a) dreptunghiul
b) cercul
c) unghiul
d) pătratul

7. Măsura unui unghi este de 2,5 ori mai mare ca măsura celuilalt. Aflați măsurile celor două unghiuri, știind că suma măsurilor lor este mai mare cu 1° decât măsura unui unghi drept.

a) 67° și 24°
b) 65° și 26°
c) 64° și 27°
d) 66° și 25°

8. B este un punct interior unghiului *AOD* care are măsura de 100°, iar măsura unghiului *AOB* este egală cu 20°. *C* este interior unghiului *BOD*, astfel încât $\sphericalangle BOC \equiv \sphericalangle COD$. Măsura unghiului *BOC* este egală cu:

a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 50°

9. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (A) și care este fals (F):

a) $12° = 720'$
b) Măsura unghiului drept este 90°
c) $71° : 2 = 31°50'$
d) Dreptele paralele nu au niciun punct comun.

10. Asociați fiecărui calcul din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**:

A	B
$60° - 24°$ $58° - 35°36'$ $8°10' \cdot 5 + 19°10'$	a) 22°24' b) 60° c) 59°20' d) 36°

11. În tabelul de mai jos este prezentată oferta unei librării pentru instrumente de măsură, metalice:

Denumirea produsului	Prețul produsului
Riglă	5 lei
Raportor	9 lei
Compas	8 lei
Echer	7 lei

Calculați suma de bani necesară achiziționării unui set de rechizite format din 6 instrumenete de fiecare fel.

12. Determinați lungimile segmentelor AB, EF și GH din tabelul de mai jos:

$5x + 3y = 27$ cm	$AB = 100$ cm $+ 10x + 6y$
4 cm $+ 2x + 7y = 15$ cm	$CD = 20$ cm $+ 10x + 35y$
$x + 5y = 23$ cm	$EF = 3x + 15y - 42$ cm
$3x - 2y - 4$ cm $= 18$ cm	$GH = 12x - 8y$

13. Pe o dreaptă g considerați punctele D, R, P și T, coliniare, în această ordine, astfel încât $DR = PT = 3$ cm, iar $RP = 4$ cm.

a) Ce lungime are segmentul DT?

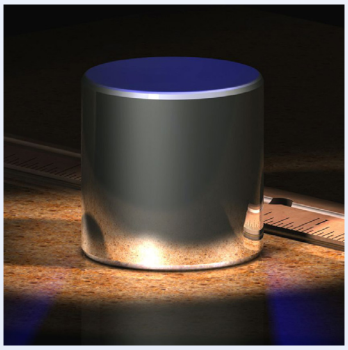
b) Fie E mijlocul segmentului RP. Arătați că D și T sunt simetrice față de E.

14. Unghiul COD are măsura egală cu $110°$, iar L este un punct exterior acestuia, astfel încât măsura unghiului DOL este egală cu $0,(63)$ din măsura unghiului COD. Arătați că punctele C, O, L sunt coliniare.

Sistemul International de unități de măsură (SI) este urmașul sistemului metric creat în perioada Revoluției Franceze. Mai precis, la 22 iunie 1799, au fost expuse la Paris două etaloane din platină: unul pentru unitatea de măsură a lungimii — *metrul* — și unul pentru unitatea de măsură a masei — *kilogramul*.

Descoperirile științifice făcute în secolul al XIX-lea de către Carl Friedrich Gauss, Wilhelm Eduard Weber, James Clerk Maxwell și William Thomson (Lord Kelvin) au adus în prim-plan necesitatea existenței unui sistem de unități de măsură standardizat. Astfel, la 20 mai 1875, a fost semnată la Paris *Convenția Metrului*, în urma căreia a fost înființat Biroul Internațional pentru Greutăți și Măsuri.

Prototipul metrului aflat la NIST (SUA)



Prototipul kilogramului (imagine virtuală)

Unitatea
VII

Unități de măsură

Domeniul de conținut:
GEOMETRIE

VII Unități de măsură

Lecția 1 Unități de măsură pentru lungime. Perimetrul

1.1. Multiplii și submultiplii metrului

Mate practică

Împărțiți în trei grupe, elevii clasei a V-a au primit următoarele sarcini de lucru: echipa coordonată de Vlad trebuia să compună o problemă care să aibă ca rezultat lungimea etapei Sibiu – Transfăgărășan – Bâlea Lac din cadrul Turului Ciclist al României. Grupa coordonată de Luca trebuia să calculeze lungimea unui traseu turistic egală cu 40% din 195 hm. Grupa coordonată de Dina trebuia să afle lungimea unui stilou, știind că 40% din lungimea acestuia este egală cu 31,2 mm.

Ce rezultat au obținut elevii fiecărei grupe?

Răspuns: 78.

Rezolvare:

• Lungimea etapei Sibiu–Transfăgărășan–Bâlea Lac din cadrul Turului Ciclist al României este de 78 km.

• 40% din $195\text{ hm} = \frac{40}{100} \cdot 195\text{ hm} = \frac{2}{5} \cdot 195\text{ hm} = 78\text{ hm}$.

• Dacă s este lungimea stiloului, atunci: 40% din s = 31,2 mm, adică $\frac{40}{100} \cdot s = 31{,}2\text{ mm}$.

$$s = 31{,}2\text{ mm} : \frac{40}{100} = 31{,}2\text{ mm} : \frac{2}{5} = 31{,}2\text{ mm} \cdot \frac{5}{2} = 78\text{ mm}.$$

Ce observăm?

Deși pare că cele trei răspunsuri sunt identice, cele trei răspunsuri exprimate corect sunt: 78 km, 78 hm, respectiv 78 mm sunt diferite și scot în evidență faptul că pentru măsurarea adecvată a diverselor lungimi a fost necesară introducerea multiplilor și submultiplilor metrului.

De reținut

Multiplii metrului	Submultiplii metrului
decametrul (notat dam);	decimetrul (notat dm);
hectometrul (notat hm);	centimetrul (notat cm);
kilometrul (notat km);	milimetrul (notat mm).

Știați că...

Pentru estimarea unor lungimi s-au utilizat de-a lungul timpului unități precum: pasul, palma, cotul, stânjenul, prăjina, leghea etc. Pentru a rezolva inconvenientele create de utilizarea diverselor etaloane de măsură pentru lungimi, în data de 20 mai 1875, s-a încheiat la Paris *Convenția metrului*. Astfel, pentru ca măsurarea unei mărimi să nu aibă rezultate diferite, oamenii au stabilit un sistem de unități de măsură valabil în aproape toate țările lumii. Metrul etalon, cu mărimea acceptată oficial ca unitate de bază într-un sistem de măsurare, se află la Paris.

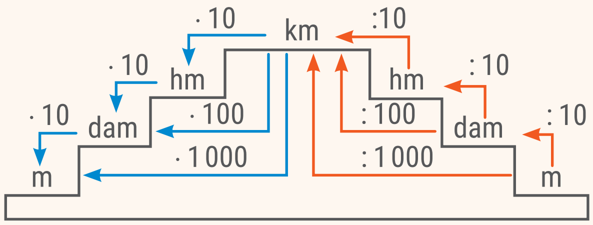
1.2. Transformarea unităților de măsură

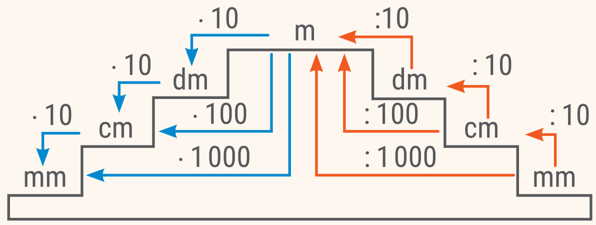
Pentru a transforma o unitate de măsură în alta folosim următoarea schemă:

km — hm — dam — m — dm — cm — mm

• Unitățile de măsură mari se transformă în unități mici prin înmulțire cu 10^n.
• Unitățile de măsură mici se transformă în unități mari prin împărțire cu 10^n, unde n este numărul segmentelor dintre cele două unități.

Utilă este și următoarea scară a multiplilor, respectiv a submultiplilor metrului:





Exemple

1. 8,53 dam = 8,53 · 10 m = 85,3 m;
2. 1,2 hm = 1,2 · 100 m = 120 m;
3. 3,5 km = 3,5 · 1 000 m = 3 500 m;
4. 0,75 dam = 0,75 · 1 000 cm = 750 cm;
5. 8,53 m = (8,53 : 10) dam = 0,853 dam;
6. 1,6 dm = (1,6 : 100) dam = 0,016 dam;
7. 3,5 m = (3,5 : 1 000) km = 0,0035 km;
8. 7 dm = (7 : 1 000) hm = 0,007 hm.

1.3. Perimetrul

De reținut

Perimetrul unei figuri geometrice mărginite de segmente de dreaptă este egal cu suma lungimilor acestor segmente. Se notează cu *P*.

1. Perimetrul unui pătrat cu lungimea laturilor egală cu l este $P = 4\,l$.
2. Perimetrul unui dreptunghi cu lungimea laturilor egală cu L (pentru lungime) și l (pentru lățime) este $P = 2 \cdot (L + l)$.
3. Dacă lungimile laturilor unui triunghi sunt a, b, c, atunci perimetrul său este $P = a + b + c$.

Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Luca pleacă de acasă în excursie pe Vârful Cozia și merge cu mașina 295 hm, cu bicicleta 9,6 km, iar ultimii 370 dam îi parcurge pe jos. Care este distanța dintre casa lui Luca și Vârful Cozia?

Rezolvare:
Distanța este egală cu 295 hm + 9,6 km + 370 dam = 29,5 km + 9,6 km + 3,7 km = 42,8 km.

2. Un teren de formă triunghiulară are perimetrul egal cu 210 m, iar două laturi ale triunghiului au aceeași lungime. Știind că una din laturi are lungimea egală cu 60 m, să se afle lungimile celorlalte două laturi.

Rezolvare:
Notăm cu a și b lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului.
Perimetrul său este $P = a + b + 60 \text{ m} = 210 \text{ m}$.
Distingem două cazuri:
• Dacă $a = 60$ m, atunci $b = P - 60 \text{ m} - 60 \text{ m} = 210 \text{ m} - 120 \text{ m} = 90 \text{ m}$.
• Dacă $a = b \neq 60$ m, atunci $a = b = (P - 60 \text{ m}) : 2 = (210 \text{ m} - 60 \text{ m}) : 2 = 150 \text{ m} : 2 = 75 \text{ m}$.

3. O grădină are forma unui dreptunghi cu lungimea egală cu 48 m, iar lățimea egală cu 0,75 din lungime. Cât costă gardul necesar împrejmuirii grădinii, dacă un metru liniar de gard costă 20 de lei?

Rezolvare:

$$l = 0{,}75 \text{ din } 48 \text{ m} = \frac{75}{100} \cdot 48 \text{ m} = \frac{3}{4} \cdot 48 \text{ m} = 3 \cdot 12 \text{ m} = 36 \text{ m}$$

$P = 2 \cdot (L + l) = 2 \cdot (48 \text{ m} + 36 \text{ m}) = 2 \cdot 84 \text{ m} = 168 \text{ m}$.
Gardul costă 20 lei · 168 = 3 360 lei.

Probleme propuse

1. Comparați:
a) 85 dam cu 85 dm; b) 24 cm cu 240 mm; c) 72 km cu 7 200 dam;
d) 6,8 km cu 601 dam; e) 3,4 dm cu 333 mm; f) 0,764 dam cu 7 630 mm.

2. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:
a) 78,9 dam = 0,789 hm; b) 2 500 cm = 25 m; c)867 mm = 86,7 cm;
d) 438 dam = 4,4 km; e) 0,54 m = 539 mm; f) 0,47 dm = 47,5 mm.

3. Transformați în metri:
a) 0,75 dam; b) 4, 58 hm; c) 0,2465 km; d) 23,5 hm; e) 8,25 km.

4. Transformați în decimetri:
a) 6,25 m; b) 2, 36 dam; c) 24,506 hm; d) 0,175 km; e) 0,036 dam;
f) 4,75 cm; g) 45, 5 mm; h) 3,2 mm; i) 23,5 cm; j) 6 mm.

5. Transformați în decametri:
a) 3,25 km; b) 0,85hm; c) 0,068 km; d) 13,2 km; e) 0,06 hm;
f) 82,7 m; g) 405 dm; h) 200 mm; i) 4,5 cm; j) 8 dm.

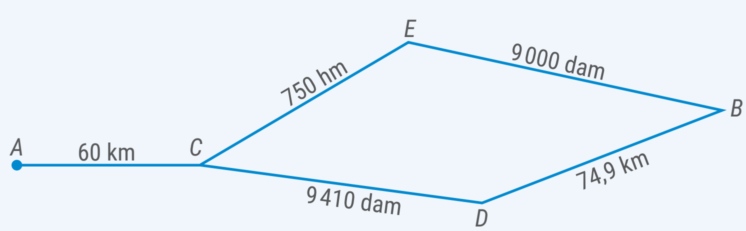
6. Calculați:
a) 87 m + 2,8 dam + 88 dm = ? dm; b) 87 cm + 103 mm – 2 dm = ? cm;
c) 654 hm – 3 km + 24 m = ? dam; d) 0,87 dam – 2,5 m + 186 dm = ? m;
e) 0,82 km + 170 dam – 45 m = ?hm; f) 5,6 hm + 240 dam – 150 m = ? km.

7. Calculați:
a) $3 \cdot 1{,}4$ cm + $5 \cdot 0{,}36$ cm = ? cm; b) $8 \cdot 153$ dm –280 000 mm : 100 = ? m;
c) 1,2 km : 4 – 0,3(54) dam $\cdot$ 11 = ? hm; d) 8 500 mm + 8,75 cm – 0,007 dam = ? dm;
e) 106 dam $\cdot$ 4 – 18 hm : 6 = ? km; f) $4 \cdot 103$ dm – 18 hm : 10^2 = ? dam.

8. Indicați unitățile de măsură adecvate pentru a măsura:
a) lungimea unui creion; b) lungimea sălii de clasă; c) distanța dintre două orașe;
d) grosimea unui geam; e) lungimea unui ac; f) lungimea Dunării.

9. Estimați următoarele lungimi, apoi verificați prin măsurare și calculați eroarea făcută:
a) lungimea unui creion; b) lungimea sălii de clasă; c) lățimea cărții de matematică.

10. O mașină pleacă din orașul *A* să aducă marfă din orașul *B*. Distanțele dintre localități sunt indicate în figura de mai jos:



Ce itinerar trebuie ales pentru a optimiza cheltuielile necesare pentru motorină?

11. Copiați tabelul de mai jos în caiete, calculați și completați:

Lungimea laturii pătratului	4,3 m		24,5 cm	
Perimetrul pătratului		6,8 km		666 dam

12. Calculați perimetrul unui triunghi *ABC*, în care *AB* = 24 cm, *AC* = 100 mm și *BC* = 2,6 dm.

13. Latura unui pătrat are lungimea cuprinsă între 300 cm și 0,32 dam. Să se afle numerele *x* și *y*, știind că perimetrul acestui pătrat este cuprins între *x* metri și *y* metri?

14. Copiați tabelul de mai jos în caiete, calculați și completați:

Perimetrul dreptunghiului		182 hm		456 cm	
Lungimea	67 m	6,3 km	8,5 m		855 m
Lățimea	338 dm		680 mm	186 mm	855 dm

15. Vlad, Luca și Dina au măsurat lungimea unei cărți și au obținut valorile: 26,8 cm, 277 mm și 2,72 dm. Transformați în aceeași unitate de măsură și stabiliți cine a măsurat corect, știind că lungimea cărții era egală cu 20% din 1,36 m.

16. Perimetrul unui triunghi este de 354 cm. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului, știind că acestea sunt numere pare consecutive, exprimate în centimetri.

17. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 48 m. Aflați lungimea și lățimea dreptunghiului, știind că lungimea este de trei ori mai mare decât lățimea.

18. Un dreptunghi are lungimea egală cu 700 m, iar lățimea egală cu trei sferturi din lungime.
Perimetrul unui pătrat reprezintă 50% din perimetrul acestui dreptunghi. Ce lungime are latura pătratului?

19. Dacă mărim lungimea unui dreptunghi cu 2 cm și lățimea cu 3 cm, obținem un pătrat cu perimetrul de 49 cm. Calculați perimetrul dreptunghiului.

Temă de proiect

a) Măsurați și calculați perimetrul curții casei voastre.

b) Realizați planul curții școlii, astfel încât 1 cm pe desen reprezintă 10 m pe teren.

Minitest

1. Transformați în unitățile de măsură indicate:

a) 0,36 dam = ? m; b) 62,8 km = ? dam; c) 0,2465 mm = ? dm; d) 3 cm = ? m.

4 puncte

2. Perimetrul unui pătrat este egal cu 82,4 m. Calculați lungimea laturii pătratului.

1 punct

3. Calculați $1{,}6 \text{ cm} \cdot 2{,}75 + 0{,}3(6) \text{ cm} \cdot 6$.

1 punct

4. Perimetrul unui triunghi este de 549 m. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului, știind că acestea reprezintă numere naturale consecutive, exprimate în metri.

1 punct

5. O grădină are forma unui dreptunghi cu lungimea de 648 hm, iar lățimea egală cu 75% din lungime. Ce lungime are gardul ce înconjoară grădina?

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 2 Unități de măsură pentru arie. Aplicații: aria pătratului/dreptunghiului

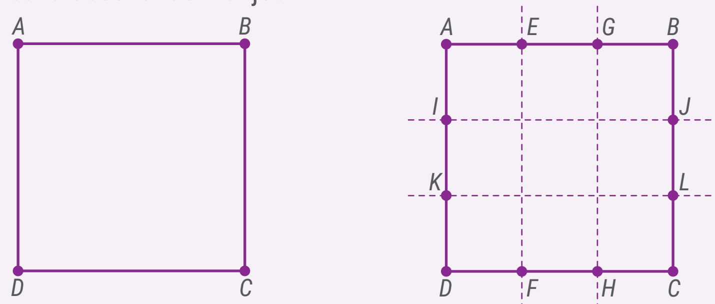
2.1. Unități de măsură pentru arie

Mate practică

Dina are mai multe pătrate colorate cu latura de 1 cm pe care le lipește, unul lângă altul, peste pătratul cu latura de 3 cm, din figura alăturată. De câte pătrate colorate are nevoie Dina pentru a acoperi tot pătratul cu latura de 3 cm?

Răspuns:

Dina împarte fiecare latură a pătratului în trei segmente de lungime 1 cm și realizează desenul de mai jos:



Dina observă că pentru a acoperi tot pătratul de latură 3 cm are nevoie de 9 pătrate cu latura de 1 cm.

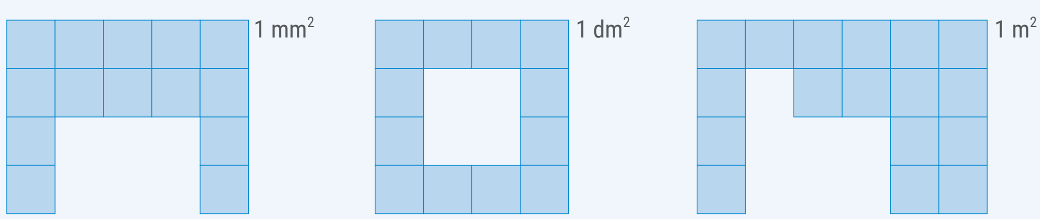
De reținut

Aria unei figuri geometrice este o măsură a întinderii figurii geometrice. Unitatea principală de măsură pentru aria suprafețelor este metrul pătrat, notat m^2. Un m^2 reprezintă aria suprafeței unui pătrat cu latura de 1 m (1 cm^2 reprezintă aria suprafeței unui pătrat cu latura de 1 cm, etc.). Pentru ușurința exprimării, în loc de aria suprafeței pătratului, vom utiliza aria pătratului.

Exemple

1. În cazul Dinei, aria pătratului cu latura de 3 cm este egală cu 9 cm^2.

2. Determinați ariile următoarelor figuri geometrice:



Prima figură geometrică este formată din 14 pătrate, deci aria sa este 14 mm^2.

A doua figură geometrică este formată din 12 pătrate, deci aria sa este 12 dm^2.

A treia figură geometrică este formată din 17 pătrate, deci aria sa este 17 m^2.

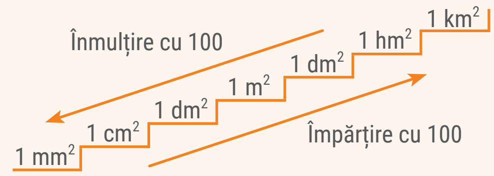
2.2. Multiplii și submultiplii metrului pătrat. Transformări

De reținut

Multiplii metrului pătrat sunt unități de măsură utilizate, în general, pentru a măsura aria unor suprafețe mai mari de 1 m^2:

- decametrul pătrat, notat dam^2
- hectometrul pătrat, notat hm^2
- kilometrul pătrat, notat km^2

Submultiplii metrului pătrat sunt unități de măsură utilizate, în general, pentru a măsura aria unor suprafețe mai mici decât 1 m^2:
- decimetrul pătrat, notat dm^2
- centimetrul pătrat, notat cm^2
- milimetrul pătrat, notat mm^2



Pentru a transforma o unitate de măsură într-o altă unitate de măsură, imediat superioară, împărțim la 100, iar pentru transfomarea într-o unitate de măsură imediat inferioară, înmulțim cu 100.

Observații

Pentru exprimarea suprafeței unui teren se mai folosesc ca unități de măsură:
- arul: 1 ar = 1 dam^2;
- hectarul: 1 ha = 1 hm^2.

Exemple

1. $3{,}4\ km^2 = 3{,}4 \cdot 100\ hm^2 = 340\ hm^2 = 340 \cdot 100\ dam^2 = 34\,000\ dam^2$;

2. $125\ cm^2 = (125 : 100)\ dm^2 = 12{,}5\ dm^2 = (12{,}5 : 100)\ m^2 = 0{,}125\ m^2$;

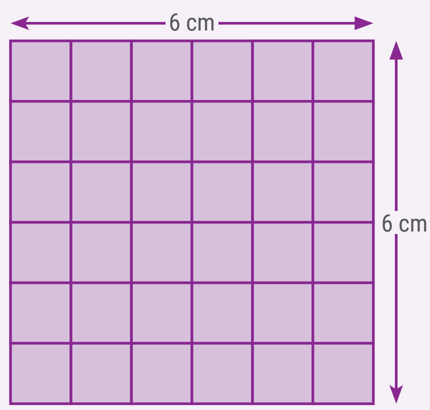
3. $0{,}78\ ha = 0{,}78\ hm^2 = 0{,}78 \cdot 100\ dam^2 = 78$ ari.

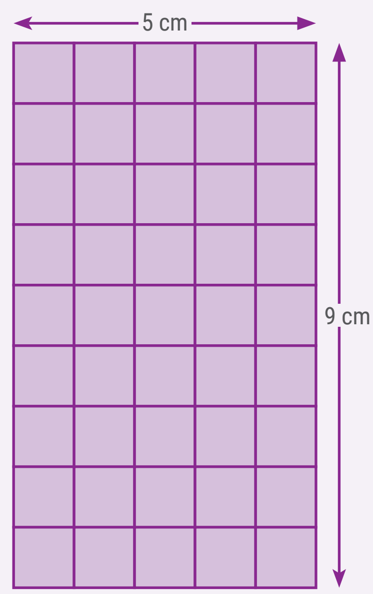
2.3. Aplicații: aria pătratului/dreptunghiului

Mate practică

Dina dorește să calculeze aria unui pătrat cu latura de 6 cm.

Adi vrea să calculeze aria unui dreptunghi cu lungimea de 9 cm și lățimea de 5 cm.





Răspuns:

Dina observă că pe fiecare linie sunt câte 6 pătrate cu aria de 1 cm^2, iar pe fiecare coloană sunt pătrate cu aria de 1 cm^2. Suprafața pătratului este acoperită complet de $6 \cdot 6 = 36$ de pătrate cu aria de 1 cm^2. În concluzie, aria pătratului este egală cu 36 cm^2.

Vlad observă ca pe fiecare linie sunt câte 5 pătrate cu aria de 1 cm^2, iar pe fiecare coloană sunt 9 pătrate cu aria de 1 cm^2. Suprafața dreptunghiului este acoperită complet de $9 \cdot 5 = 45$ de pătrate cu aria de 1 cm^2. Deci aria dreptunghiului este egală cu 45 cm^2.

De reținut

Aria unui pătrat cu lungimea laturii l este egală cu $l \cdot l = l^2$.

Aria unui dreptunghi cu lungimea L și lățimea l este egală cu $L \cdot l$.

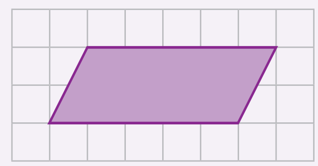
Exemple

1. Dreptunghi		
Lungime = L	Lățime = l	Aria = $L \cdot l$
1,2 cm	0,6 cm	$A = 1{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}72\ \text{cm}^2$
$\frac{5}{2}$ dm	$\frac{10}{9}$ dm	$A = \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{25}{9}\ \text{dm}^2$
0,4 hm	0,04 hm	$A = 0{,}4 \cdot 0{,}04 = 0{,}016\ \text{hm}^2$

2. Pătrat	
Latura = l	Aria = l^2
2,5 cm	$A = 2{,}5^2 = 6{,}25\ \text{cm}^2$
0,12 dam	$A = 0{,}12^2 = 0{,}0144\ \text{dam}^2$
$\frac{7}{3}$ m	$A = \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}\ \text{m}^2$

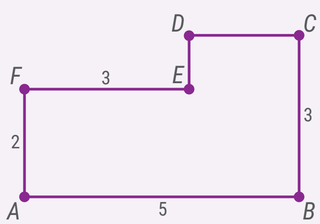
Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. În desenul alăturat, aria unui pătrat mic este egală cu 1 dm^2. Determinați aria suprafeței paralelogramului colorat.



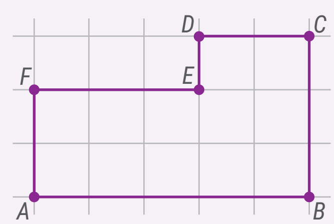
Rezolvare:
Paralelogramul este format din 8 pătrate întregi și din două triunghiuri care coincid prin suprapunere (diferă doar poziția lor pe desen). Cele două triunghiuri formează un dreptunghi care acoperă două pătrate din desen. În concluzie, aria paralelogramului este egală cu aria a 10 pătrate, adică 10 dm^2.

2. Podeaua unei bucătării are forma din figura alăturată. Dimensiunile precizate de figură sunt exprimate în metri. Precizați trei moduri practice de a determina aria podelei bucătăriei.

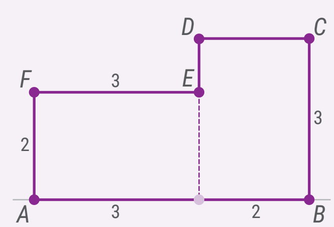


Rezolvare:

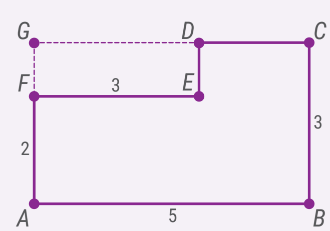
a) Realizând un caroiaj pe figura dată, obținem figura alăturată.
Suprafața podelei bucătăriei este formată din 12 pătrate cu latura de 1 m, deci aria suprafeței este egală cu 12 m^2.



b) Prelungim segmentul DE până când intersectează latura AB și obținem figura alăturată. Aria podelei este egală cu suma ariilor celor două dreptunghiuri, $AGEF$ și $GBCD$.
Aria podelei este egală cu 3 m · 2 m + 3 m · 2 m = 12 m^2.



c) Dreptele DC și AF se intersectează în punctul G și obținem figura alăturată. Aria podelei este egală cu diferența dintre aria dreptunghiului $ABCG$ și aria dreptunghiului $FEDG$.
Aria podelei este egală cu 5 m · 3 m – 3 m · 1 m = 12 m^2.



3. Calculați aria unui dreptunghi cu lungimea de 12,3 dm și lățimea de 115 cm.
Rezolvare:
Pentru a putea calcula aria dreptunghiului, este necesar ca dimensiunile sale să fie exprimate prin aceeași unitate de măsură. Vom utiliza decimetrul. Pentru aceasta, observăm că lățimea dreptunghiului este egală cu 115 cm = 11,5 dm. În concluzie, obținem aria dreptunghiului egală cu 12,3 dm · 11,5 dm = 141,45 dm^2.

Probleme propuse

1. Calculați aria unui pătrat cu latura de lungime:
a) 3 cm; b) 12 m; c) 2,5 dam; d) 0,3 km;
e) 120 mm; f) 0,01 hm; g) 7,5 cm; h) 4,5 dm.

2. Calculați aria unui dreptunghi ce are dimensiunile:
a) $L = 0{,}5$ dam, $l = 3{,}2$ m; b) $L = 10{,}1$ cm, $l = 50$ mm;
c) $L = 35$ dm, $l = 200$ cm; d) $L = 2{,}7$ dam, $l = 210$ dm.

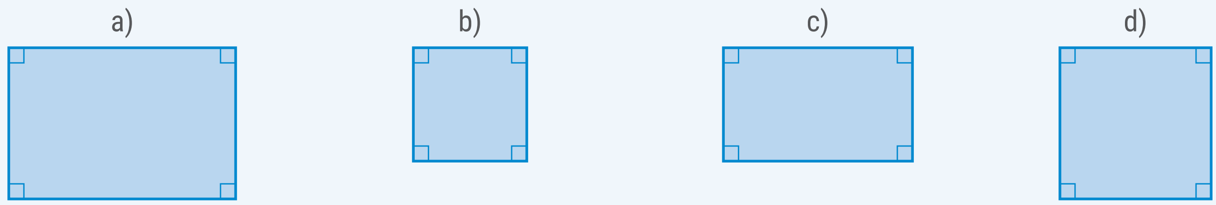
3. Desenați un dreptunghi cu lungimea de 6 cm și lățimea de 5 cm. Calculați perimetrul și aria dreptunghiului.

4. Transformați în metri pătrați:
a) 0,072 dam^2; b) 3,9 ha; c) 25 ari;
d) 67 000 cm^2; e) 0,0003 km^2; f) 7 200 000 mm^2.

5. Transformați în unitatea de măsură indicată:
a) 15,28 dm^2 în cm^2; b) 8,2 dam^2 în dm^2; c) 700 000 cm^2 în dam^2;
d) 147 000 m^2 în km^2; e) 0,025 km^2 în ari; f) 10 000 000 cm^2 în ha.

6. Precizați ce unitate de măsură este adecvată pentru exprimarea ariei:
a) unei coli de hârtie; b) podelei unui dormitor; c) unei țări.

7. Utilizând o riglă gradată și, alegând o unitate de măsură adecvată, determinați ariile figurilor geometrice din desenul de mai jos.

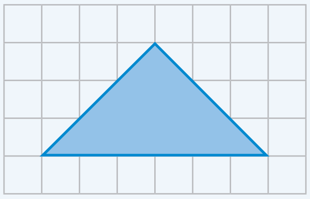


8. Comparați:
a) 36 cm^2 cu 123 mm^2; b) 22 dam^2 cu 1 ha; c) 72 ari cu 0,072 km^2;
d) 74 m^2 cu 7,4 hm^2; e) 0,05 dam^2 cu 500 dm^2; f) 3,5 m^2 cu 3,49 dm^2.

9. Curtea unei școli, care are formă de dreptunghi cu lungimea de 47 m și lățimea de 21 m, se pavează cu plăci de beton în formă de pătrat cu latura de 50 cm.
Determinați numărul plăcilor de beton necesare pavării curții.

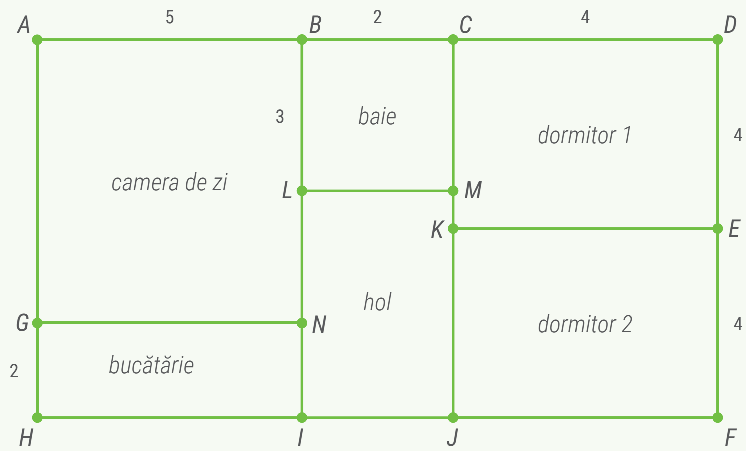
10. O combină treieră într-o zi grâul de pe o suprafață de 1,5 ha. În câte zile va treiera grâul de pe o tarla în formă de pătrat cu latura de 300 m?

11. În desenul alăturat, aria unui pătrat este egală cu 1 cm^2. Determinați aria triunghiului colorat cu albastru.



Activitate pe grupe

În figura de mai jos, Vlad a realizat schematic planul casei sale. Utilizând dimensiunile din schemă, exprimate în metri, calculați:



a) Aria suprafeței celor două dormitoare.
b) Aria suprafeței holului.
c) Comparați aria suprafeței celor două dormitoare cu aria suprafeței camerei de zi.
d) Realizați schematic planul casei, apoi răspundeți la cerințele a), b) și c) ținând cont de noile dimensiuni.

Minitest

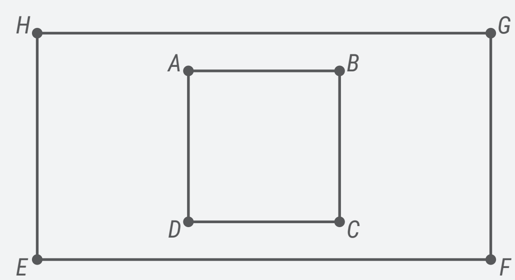
1. Transformați în hectometri pătrați:
a) $24{,}53\ km^2$; b) $19{,}2\ dam^2$; c) $950{,}456\ m^2$.

3 puncte

2. a) Determinați aria unui pătrat cu latura de 1,45 cm.
b) Determinați aria unui dreptunghi cu lungimea de 4,3 dm și lățimea de 3,4 dm.
c) De câte plăci de gresie în formă de pătrat cu latura de 20 cm avem nevoie pentru a placa podeaua unei băi în formă de pătrat cu latura de 3 m?

3 puncte

3. În figura alăturată este reprezentat schematic un parc *EFGH* în formă de dreptunghi, care are în centru un lac în formă de pătrat *ABCD*. De jur împrejurul lacului, parcul este acoperit cu gazon. Dacă $AB = 10$ m, $EF = 50$ m și $FG = 30$ m, atunci calculați aria suprafeței acoperite cu gazon.



3 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Lecția 3 Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic

3.1. Unități de măsură pentru volum

Situație problemă

Bianca a pregătit pentru întâlnirea cu prietenele un aranjament din cuburi de zahăr ca în imaginea alăturată.

Dacă știm că fiecare cub are muchia de 1 cm, ce dimensiuni ar trebui sa aibă cutia în care ar trebui puse?

Rezolvare:
Din imagine observăm că aranjamentul are forma unui paralelipiped cu $L = 4$ cuburi, $l = 4$ cuburi și $h = 5$ cuburi. Dacă muchia unui cub este de 1 cm, atunci dimensiunile cutiei ar trebui să fie: $l = L = 4$ cm, iar $h = 5$ cm.

Ce observăm?
Având în vedere că un cub are muchia de 1 cm, spunem că volumul său este egal cu $1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} = 1\text{ cm}^3$ (citim *un centimetru cub*).

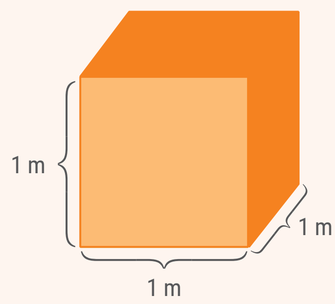
Metrul cub

De reținut

Volumul măsoară întinderea unui corp în spațiu.

Unitatea principală de măsură pentru volumul corpurilor este metrul cub, notat m^3.

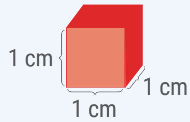
1 m^3 reprezintă volumul unui cub cu muchia de 1 m.

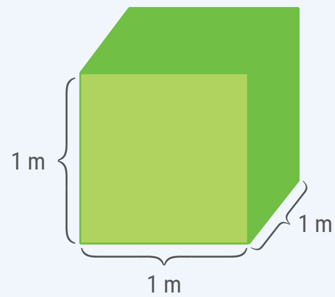


Exemple

1. Cubul roșu are muchiile egale cu 1 cm.
   El are volumul 1 cm^3.

2. Cubul verde are muchiile de 1 m.
   El are volumul 1 m^3.





Multiplii și submultiplii metrului cub

De reținut

Multiplii metrului cub	Submultiplii metrului cub
• decametrul cub (notat dam^3);	• decimetrul cub (notat dm^3);
• hectometrul cub (notat hm^3);	• centimetrul cub (notat cm^3);
• kilometrul cub (notat km^3);	• milimetrul cub (notat mm^3).

Observație. Fiecare unitate de măsură reprezintă volumul unui cub cu muchia de 1 dam, 1 hm, 1 km, respectiv 1 dm, 1 cm, 1 mm.

3.2. Transformarea unităților de măsură

De reținut

Pentru a transforma o unitate de măsură în alta folosim următoarea schemă:

km^3 — hm^3 — dam^3 — m^3 — dm^3 — cm^3 — mm^3

- Unitățile de măsură mari se transformă în unități mici prin înmulțire cu $(10^3)^n$;
- Unitățile de măsură mici se transformă în unități mari prin împărțire cu $(10^3)^n$, unde n este numărul segmentelor de dreaptă dintre cele două unități.

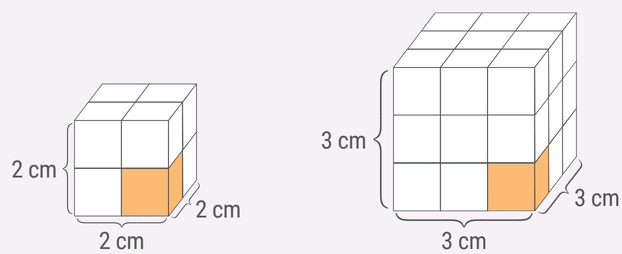
Exemple

1. $2{,}5\ dam^3 = 2{,}5 \cdot 10^3\ m^3 = 2\,500\ m^3$;
2. $0{,}8\ hm^3 = 0{,}8 \cdot (10^3)^2\ m^3 = 800\,000\ m^3$;
3. $0{,}6\ km^3 = 0{,}6 \cdot (10^3)^3\ m = 600\,000\,000\ m^3$;
4. $4\ mm^3 = [4 : (10^3)^2]\ dm^3 = 0{,}000004\ dm^3$;
5. $85\ m^3 = (85 : 10^3)\ dam^3 = 0{,}085\ dam^3$;
6. $1{,}6\ dm^3 = (1{,}6 : 10^3)\ m^3 = 0{,}0016\ m^3$.

3.3. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic

Situație problemă

Să numărăm din câte cuburi unitate de $1 cm^3$ sunt formate cele două cuburi:



Ne punem întrebarea: ce legătură există între lungimea muchiei cubului și numărul de cuburi unitate din care este format cubul?

Primul cub este format din 8 cuburi unitate de $1\ cm^3$ și observăm că $2\ cm \cdot 2\ cm \cdot 2\ cm = 8\ cm^3$.

Al doilea este format din 27 de cuburi unitate de $1\ cm^3$ și observăm că $3\ cm \cdot 3\ cm \cdot 3\ cm = 27\ cm^3$.

De reținut

Deducem formula de calcul pentru volumul cubului: $V = l^3$, unde l este lungimea muchiei cubului.

Volumul unui corp este numărul care ne arată de câte ori se cuprinde o unitate de măsură în acel corp.

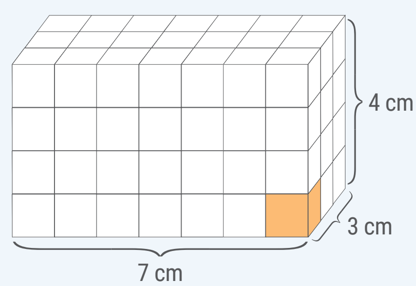
Exemple

Paralelipipedul dreptunghic alăturat este format din 84 de cuburi unitate de $1\ cm^3$.

Corpul are lungimea $L = 7$ cm, lățimea $l = 3$ cm și înălțimea $h = 4$ cm.

Observăm că $7\ cm \cdot 3\ cm \cdot 4\ cm = 84\ cm^3$, adică exact numărul de cuburi unitate din care este format corpul.

Volumul paralelipipedului dreptunghic: $V = L \cdot l \cdot h$.



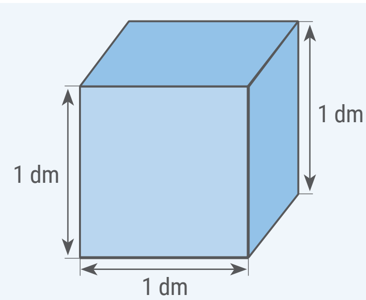
3.4. Relația dintre volum și capacitate

Aplicație practică

Turnați 1 l de apă într-un vas cubic cu lungimea muchiei de 1 dm. Ce observați?

Răspuns:
Vasul este plin.

De reținut
Un vas cu volumul egal cu $1\ dm^3$ are capacitatea de 1 litru.



Probleme reprezentative. Idei, metode, tehnici de rezolvare

1. Într-o cutie cubică cu latura de 10 cm încap 2 portocale.
a) Câte portocale încap într-o cutie cubică cu muchia de 20 cm?
b) Câte portocale încap într-o cutie cubică cu muchia de 30 cm?
c) Dar într-o cutie imaginară cu latura de 100 m?

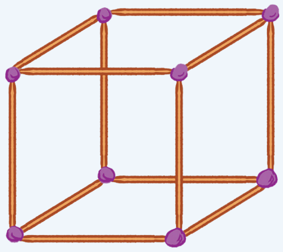
Rezolvare:
a) Volumul cutiei cu latura de 10 cm este egal cu $(10\text{ cm})^3 = 1\,000\text{ cm}^3 = 1\text{ dm}^3$.
Volumul cutiei cu latura de 20 cm este egal cu $(20\text{ cm})^3 = 8\,000\text{ cm}^3 = 8\text{ dm}^3$.
1 dm^3 .... 2 portocale
8 dm^3 .... 2 portocale $\cdot 8 = 16$ portocale.
b) Volumul cutiei cu latura de 30 cm este egal cu $(30\text{ cm})^3 = 27\,000\text{ cm}^3 = 27\text{ dm}^3$.
1 dm^3 .... 2 portocale
27 dm^3 .... 2 portocale $\cdot 27 = 54$ de portocale.
c) Volumul cutiei cu latura de 100 m este egal cu $(100\text{ m})^3 = 1\,000\,000\text{ m}^3 = 1\,000\,000\,000\text{ dm}^3$.
1 dm^3 .... 2 portocale
$1\,000\,000\,000\text{ dm}^3$ .... 2 portocale $\cdot 1\,000\,000\,000 = 2\,000\,000\,000$ portocale.

2. Un acvariu are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 75 cm, lățimea de 40 cm și înălțimea de 6 dm.
a) Aflați volumul acvariului.
b) La ce înălțime se ridică apa, dacă în acvariu se toarnă 120 de litri?

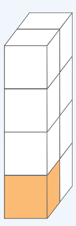
Rezolvare:
a) Mai întâi trebuie să efectuăm transformări pentru ca cele trei dimensiuni să aibă aceeași unitate de măsură.
$L = 75\text{ cm} = 7{,}5\text{ dm}$, iar $l = 40\text{ cm} = 4\text{ dm}$.
$V = L \cdot l \cdot h = 7{,}5\text{ dm} \cdot 4\text{ dm} \cdot 6\text{ dm} = 180\text{ dm}^3$.
b) Ținând cont că $1\ l = 1\text{ dm}^3$, cei 120 de litri de apă ocupă un volum egal cu 120 dm^3.
Fie $î$ înălțimea la care se ridică apa. Atunci volumul apei este egal cu $V = 7{,}5\text{ dm} \cdot 4\text{ dm} \cdot î\text{ dm}$.
Din $7{,}5\text{ dm} \cdot 4\text{ dm} \cdot î\text{ dm} = 120\text{ dm}^3$, obținem $î = 4\text{ dm}$.

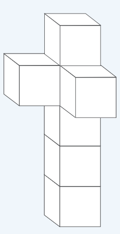
Probleme propuse

1. Priviți cu atenție cubul din figura alăturată și completați pentru a obține propoziții adevărate. Cubul are:
a) … vârfuri;
b) … fețe;
c) … muchii.
d) Fețele cubului sunt … .
e) Construiți acasă un cub asemănător, folosind bețe de chibrit și plastilină.

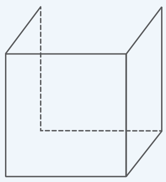


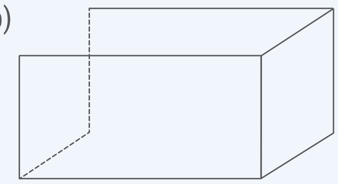
2. Din câte cubulețe unitate sunt formate corpurile de mai jos:





3. Scrieți ce corp geometric se obține în fiecare caz, după ce completați elementele care lipsesc:

a) 

b) 

4. Stabiliți dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false:

a) $78{,}9\ dam^3 = 0{,}789\ hm^3$; b) $2\,500\ cm^3 = 25\ dm^3$; c) $867\ mm^3 = 0{,}867 cm^3$;
d) $4\ dam^3 = 0{,}0004\ hm^3$; e) $0{,}4\ m^3 = 400\ dm^3$; f) $0{,}4\ m^3 = 0{,}0004\ dam^3$.

5. Transformați în decimetri cubi:

a) $6{,}25\ m^3$; b) $0{,}006\ dam^3$; c) $0{,}0000005\ hm^3$; d) $3\,000\ cm^3$; e) $4\,000\,000\ mm^3$; f) $47{,}5\ cm^3$.

6. Aflați termenul necunoscut:

a) $2{,}8\ dam^3 + 800\ dm^3 = ?\ m^3$; b) $87\ cm^3 + 103\ mm^3 - 0{,}02\ dm^3 = ?\ cm^3$;
c) $654\ hm^3 - 35\,000\ m^3 = ?\ dam^3$; d) $0{,}82\ km^3 + 170\ dam^3 - 4\,000\ m^3 = ?\ hm^3$.

7. Indicați unitățile de măsură adecvate pentru a măsura:

a) volumul sălii de clasă; b) volumul unei cutii de chibrituri;
c) capacitatea unei găleți; d) capacitatea unui bazin de înot;
e) volumul unui bloc; f) timpul desfășurării unui semestru școlar.

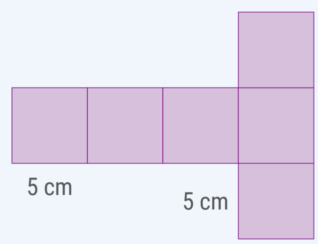
8. În București, în anul 2017, tariful pentru consumul unui m^3 de apă/canal a fost de 1,15 euro. Câți lei plătește o familie, știind că a consumat 25 m^3 de apă/canal și că 1 euro = 4,56 lei?

9. Suma lungimilor muchiilor unui cub este egală cu 180 cm.

a) Aflați perimetrul și aria unei fețe.
b) Calculați volumul cubului.

10. În figura alăturată avem desfășurarea plană a fețelor unui cub.

a) Aflați aria desfășurării.
b) Calculați perimetrul desfășurării.
c) Determinați volumul cubului respectiv.

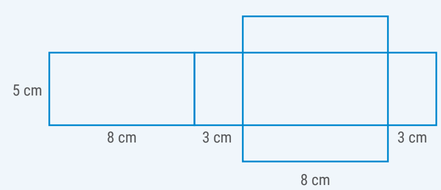


11. Copiați tabelul de mai jos în caiete, calculați și completați:

Lungimea muchiei cubului	2,5 m		24 cm	
Volumul cubului		$8\,000\ dm^3$		$216\ hm^3$

12. În figura alăturată este reprezentată desfășurarea plană a fețelor unui paralelipiped dreptunghic.

a) Aflați aria desfășurării.
b) Calculați perimetrul desfășurării.
c) Determinați volumul paralelipipedului respectiv.



13. Un bazin de înot are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 0,60 hm, lățimea de 400 dm și înălțimea de 0,25 dam.
Câți litri de apă încap în bazin?

14. Dimensiunile unei cărămizi sunt: 240 mm, 125 mm și 140 mm.
Într-un metru cub de zidărie intră 210 cărămizi și mortar.
Care este volumul mortarului?

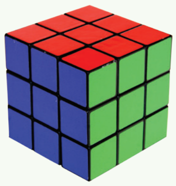
15. Un teren de fotbal de formă dreptunghiulară, cu lungimea de 100 m și lățimea de 70 m, trebuie curățat de zăpadă. Câte tone de zăpadă trebuie să fie transportate de pe teren, știind că grosimea stratului de zăpadă este egală cu 25 cm, iar 1 m^3 de zăpadă cântărește 60 kg?

16. Bunicii lui Vlad colectează apă de ploaie într-un butoi fără capac, pentru udatul legumelor. Butoiul are forma unui cub cu lungimea muchiei de 1 m. După 10 zile consecutive de ploaie, s-au acumulat, în medie, câte 72,9 litri de apă pe metrul pătrat, după fiecare zi.
Ce cantitate de apă s-a acumulat în butoi?
La ce înălțime se ridică apa?

17. Într-un acvariu de forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea egală cu 80 cm, lățimea de 50 cm și înălțimea de 6 dm, apa se ridică la $\frac{5}{6}$ din înălțimea acvariului.
Din acvariu se scot 80 litri de apă.
a) Aflați volumul acvariului.
b) Cu câți centimetri a scăzut nivelul apei?

Știați că...

Cubul lui Rubik este un *joc-problemă* inventat în anul 1974 de către sculptorul și profesorul de arhitectură maghiar Ernő Rubik.
Pentru majoritatea dintre voi acesta este o adevărată provocare. Accesează *internetul* pentru a afla câteva secrete privind aranjarea pătrățelelor, astfel încât să se formeze fețe în care toate cele 9 pătrate au aceeași culoare!



Joc

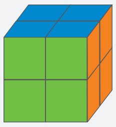
Pe masă sunt șase pahare: trei pline cu apă și trei goale, ca în desenul de mai jos. Să se aranjeze paharele într-o ordine alternativă (unul plin, unul gol ș.a.m.d.), cu condiția să nu se miște decât un singur pahar.

Minitest

1. Transformați în unitățile de măsură indicate:
a) $3{,}4\ dam^3 = ?\ m^3$ b) $6{,}8\ hm^3 = ?\ km^3$ c) $64\,600\ mm^3 = ?\ dm^3$ d) $1\,500\ dm^3 = ?\ kl$

4 puncte

2. Din câte cuburi unitate este alcătuit cubul alăturat?



1 punct

3. Un vas are forma unui cub cu suma lungimilor muchiilor egală cu 108 dm.
Câți decalitri de apă încap în vas?

2 puncte

4. Un container are interiorul de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 10 m, 6 m și 5 m. În interior sunt cărămizi având dimensiunile de 250 mm, 120 mm și 100 mm. Câte cărămizi sunt în container, știind că acesta este plin?

2 puncte

Din oficiu: **1 punct**

Evaluare Unități de măsură

1. Unitatea de măsură adecvată pentru a măsura distanța dintre două orașe este:

a) km b) hm c) dam d) m

2. Transformând 28,5 km în metri obținem:

a) 285 m b) 2 850 m c) 28 500 m d) 2,85 m

3. Transformând 8,5 ari în metri pătrați obținem:

a) 85 m^2 b) 850 m^2 c) 0,85 m^2 d) 8,5 m^2

4. Transformând 0,006 m^3 în centimetri cubi obținem:

a) 600 cm^3 b) 6 000 cm^3 c) 60 cm^3 d) 6 cm^3

5. Un pătrat are aria egală cu 576 m^2, iar alt pătrat are aria de 4 ori mai mică. Atunci lungimea laturii celui de-al doilea pătrat este egală cu:

a) 12 m b) 144 m c) 16 m d) 13 m

6. Pentru a vopsi un cub din lemn cu latura de 2 dm sunt necesare 480 g de vopsea. Pentru a vopsi un cub (din același material) cu latura de 4 dm, cantitatea de vopsea necesară este egală cu:

a) 1,92 kg b) 960 g c) 96 dag d) 1 820 g

7. Lungimea unui dreptunghi este de 2,5 ori mai mare ca lățimea. Știind că aria dreptunghiului este egală cu 90 m^2, aflați lungimea și lățimea acestuia.

a) 10 m și 9 m
b) 15 m și 6 m
c) 18 m și 5 m
d) 30 m și 3 m

8. O curte cu aria de 5,12 ari este pavată cu 800 dale de beton. Aflați aria suprafeței unei dale.

a) 56 dm^2
b) 54 dm^2
c) 64 dm^2
d) 660 cm^2

9. Precizați care dintre enunțurile de mai jos este adevărat (A) și care este fals (F):

12,7 hm = 1,27 km
0,98 dam^3 = 980 m^3
5 ha = 5 000 m^2
Aria unui pătrat cu latura de 26 m este egală cu 6,76 ari

10. Asociați fiecărui calcul din coloana **A** răspunsul corect din coloana **B**:

A	B
60 m – 24 cm 2 ha – 330 m^2 8, 888 dm^3 + 800 mm^3	a) 196,70 ari b) 2 330 m^2 c) 59,76 m d) 8 888,8 cm^3

11. În tabelul de mai jos este prezentată oferta unui magazin pentru instrumente de măsură:

Denumirea produsului	Prețul produsului
Metru tâmplar	5,20 lei
Metru croitorie	2,25 lei
Ruletă	25,50 lei
Șubler	190,40 lei

Calculați suma de bani necesară achiziționării celor patru instrumente.

12. Determinați dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic din tabelul de mai jos:

8 dm + x = 20 dm și y : 7 = 6 dm	$L = 5\text{ dm} + 2x + 2y$
x = 57,6 dm : 2,4 și y × 5 = 60 dm	$l = 9y - 3x + 4\text{ dm}$
122 dm^2 : x = 10 dm și $y \cdot \frac{1}{4} = 0{,}45$ dm	$h = \frac{15}{7} \cdot x + y \cdot \frac{15}{7}$

13. O grădină are formă de pătrat cu lungimea laturii egală cu 40% din 225 m.

a) Ce lungime are gardul ce înconjoară grădina, știind că există o poartă cu lungimea de 4 m?

b) Aflați aria grădinii și exprimați-o în ari.

Unitatea 1 Operații cu numere naturale

Lecția 1. Scrierea și citirea numerelor naturale

1. a) opt sute patruzeci și trei de mii douăzeci și șapte; b) cinci sute de mii doi; c) cinci mii șaptesprezece; d) unsprezece mii o sută unsprezece; e) douăzeci și unu de mii cinci; f) patru sute trei mii șaizeci și șapte; g) o sută douăzeci de mii patru; h) douăzeci de milioane trei sute cinci mii douăzeci și trei. **3.** a) 27; b) 358 000; c) 5 008; d) 9 705; e) 2 837 002; f) 7 003 605. **4.** a) 12 numere; b) 3 numere; c) 6 numere. **5.** a) $\overline{abc} = 379$; b) $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$; c) $a = 5$, $b = 3$, $c = 7$, $d = 4$. **6.** a) 852 cifre; b) 240 pagini. **8.** a) 28, 34, 40; b) 43, 54, 65; c) 54, 162, 486; d) 41, 65, 95; e) 95, 284, 852; f) 45, 56, 67. **9.** a) de exemplu: 123, 321, 1 213; b) 532, 424, 2 350, 154. **10.** a) 2 numere; b) 6 numere. **11.** a) 12, 21, 30; b) dacă $b = 0$, atunci $a + c = 6$ și obținem numerele naturale 105, 204, 303, 402, 501, 600; dacă $b = 1$, atunci $a + c = 4$ și obținem numerele 410, 311, 212, 113; dacă $b = 2$, atunci $a + c = 2$ și obținem numerele 121 și 220; dacă $b \geq 3$, atunci egalitatea nu poate avea loc; c) 42.

Minitest: **1.** a) 300 079; b) 1 004 005; c) 38 009. **2.** a) doisprezece milioane șase mii douăzeci și trei; b) două sute patru mii cinci sute nouă; c) zece mii șaptezeci și opt. **3.** 558 cifre. **4.** 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31, 40.

Lecția 2. Reprezentarea pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor naturale; aproximări, rotunjiri, estimări

2. $A(6)$, B(5), $C(10)$, $D(7)$. **3.** $4321 > 2314 > 2143 > 1342 > 1234$. **4.** Da. Vlad a folosit ca unitate de măsură o pătrățică din caietul de matematică, iar Dina a folosit ca unitate de măsură două pătrățele. **5.** a) 0, 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11; b) 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24; c) 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37. **6.** a) $23456 < 23546$; b) $236780 < 236800$; c) $123456 > 23456$. **7.** a) 124 360; 124 300; 124 000; 100 000; b) 892 530; 892 600; 893 000; 900 000; c) prin lipsă: 587 320, 587 300; 587 000; 500 000; prin adaos: 587 330, 587 400, 588 000, 600 000; d) 89 280; 89 300; 89 000; 100 000. **8.** 2 400; 3 100; 1 100; 98 100; 64 000; 13 800; 56 300; 56 300; 81 000; 80 800. **9.** a) 123; b) 9 876; c) 98 764; d) 120 354. **10.** a) 6 puncte; b) 7 puncte. **11.** a) de exemplu: 13 029, 13 037, 13 040, 13 043; b) de exemplu: 13 463; 13 478; 13 482; 13 491; c) de exemplu: 13 972; 13 979; 13 981; 13 982. **12.** a) 6 578 234; b) 85 374. **13.** a) de exemplu: 23 464; 23 458; 23 470; 23 475; 23 478; 23 480; b) de exemplu: 23 429; 23 431; 23 436; 23 439; 23 441; 23 446; c) 23 475; 23 476; 23 477; 23 478; 23 479; 23 481. **14.** Numerele sunt: 350, 351, … , 449. Numărul lor este 100. **15.** (13, 19); (13, 20); (13, 21); (14, 19); (14, 20); (14, 21); (15, 19); (15, 20); (15, 21); (16, 19); (16, 20); (16, 21); (17, 19); (17, 20); (17, 21); (18, 19); (18, 20); (18, 21); (19, 19); (19, 20); (19, 21). **16.** 30 289. **17.** de exemplu: (1, b); (2, d); (3, c); (4, e). **18.** $b > d > a > c > e$. **19.** a) $\overline{ab4}$, $\overline{ab6}$. b) $\overline{a15}$, $\overline{a17}$, $\overline{a19}$, $\overline{a21}$, $\overline{a23}$, $\overline{a25}$, $\overline{a27}$. **20.** a) Numerele de la 1 la 100 care conțin cifra 3 sunt: 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 53, 63, 73, 83, 93. Cifra 3 se folosește de 20 de ori; b) 300.

Minitest: **1.** a) $12435 > 12345$; b) $20099 > 2999$. **2.** a) 324 560; 324 500; 324 000; 300 000; b) 182 330; 182 400; 183 000; 200 000. **3.** $\overline{ab} = 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99$. **4.** $\overline{abc} = 205, 216, 227, 238, 249, 306, 317, 328, 339$.

Lecția 3. Adunarea numerelor naturale, proprietăți

1. a) 588; b) 361; c) 7 653; d) 6 116; e) 5 035; f) 873; g) 4 136; h) 220 925; i) 63 689; j) 5 704; k) 99 354; l) 22 233. **2.** a) $S = (3 + 97) + (12 + 88) + (45 + 55) + (17 + 83) + 100 = 500$; b) 800; c) 487. **3.** a) $(24 + 76) + (68 + 32) = 200$; b) 456; c) 1 100; d) 2 000; e) 2 000; f) 400. **4.** a) 465; b) 464; c) 429. **5.** a) $a + a + 1 = 43$, numerele sunt 21 și 22; b) 15, 16, 17; c) 12, 14; d) 17, 19, 21. **6.** a) $702 + 11 \cdot \overline{ab} = 977$, $\overline{ab} = 25$. b) $101 \cdot b + 20 \cdot a = 443$, $\overline{ab} = 73$. **7.** a) $\overline{a4b8}$; b) $\overline{ab6d}$; c) $\overline{abcdef}$. **8.** a) A; b) F; c) F; d) A. **9.** a) $n = 8$, numerele sunt: 20, 22, 24, 26, 28, 30; b) $n = 8$, numerele sunt: 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47. **10.** c) corect; d) incorect/ corect este 46; e) corect. **11.** a) $187 + 27 = 213$; b) $5837 + 7946 = 13783$ sau $5836 + 7947 = 13783$ sau $5838 + 7945 = 13783$ sau $5835 + 7948 = 13783$ sau $5839 + 7944 = 13783$ sau $5834 + 7949 = 13783$; c) $47 + 582 = 629$. **12.** Punctaj Dina: $2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 1 = 75$, punctaj Luca: $3 \cdot 9 + 1 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 73$, câștigătorul concursului este Dina.

Minitest: **1.** a) $(11 + 9) + (3 + 27) = 50$; b) 1 200. **2.** a) $20 \cdot a + b = 82$, $a = 4$, $b = 2$, suma cerută este 66; b) 66. **3.** $a = 66$, $b = 135$, $a + b = 201$. **4.** $7 + 4 = 11$, $11 + 10 = 21$, $21 + 11 = 32$, $32 + 21 = 53$, $53 + 10 = 63$.

Lecția 4. Scăderea numerelor naturale

1. a) 1 215; b) 3 732; c) 989; d) 568; e) 17 723; f) 22 937; g) 14 210; h) 4 944. **2.** a) 8 888; b) 885; c) 9 765; d) 1 223. **3.** a) 290; b) 101; c) 4 589; d) 849 991. **4.** a) 536; b) 2 149; c) 218; d) 749; e) 13 497; f) 957; g) 630; h) 987; i) 5 041. **5.** a) 232; b) 1 264; c) 11 860; d) 76 778. **6.** Numerele sunt 90 și 8. **7.** 1 016 km. **8.** 437; 580; 985. **9.** a) $y = 5$; b) $x = 4$; c) $y + z = 7$. **10.** a) $a - c = 347$; b) $a - b = 9$; c) $c = 27$. **11.** a) 80 601; b) 20 503; c) 111 111. **12.** $a = 1, 2, \ldots, 9$, $b = 1, 2, \ldots, 9$, $c = 3$, $d = 5$, sunt 81 de numere.

Minitest: **1.** a) 225; b) 312. **2.** $n = 102$, $m = 102$, $m = n$. **3.** 23 de ani va avea fiul, 57 de ani va avea fiul. **4.** $a + b + c = 163$, $a + b = 67 + c$, $b + c = 37 + a$, $67 + 2 \cdot c = 163$, $c = 48$, $2 \cdot a + 37 = 163$, $a = 63$, $b = 52$.

Lecția 5. Înmulțirea numerelor naturale

1. a) 420; b) 875; c) 5 760; d) 4 860; e) 26 112; f) 63 135. **2.** a) 3 553; b) 2 600; c) 19 040; d) 2 730; e) 15 540; f) 5 824. **3.** a) $2 \cdot 37 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 37 = 370$; b) 17 000; c) 5 790 000. **4.** a) 5 229; b) 938; c) 2 196; d) 3 158; e) 7 238; f) 1 920. **5.** a) 3 465; b) 2 727; c) 1 530; d) 3 038; e) 3 996; f) 5 020. **6.** a) $p = 475$; b) $p = 5880$. **7.** 139 km. **8.** 83 lei. **9.** $10 \leq a \leq 16$, $12 \leq b \leq 21$, obținem $120 \leq a \cdot b \leq 336$, cea mai mică valoare posibilă a produsului este 120, iar cea mai mare este 336. **10.** 20. **11.** $(x, y) = (2, 16), (5, 1), (6, 0), (3, 6)$. **12.** Numerele sunt 18 și 23. **13.** a) 35, 45, 55; b) 28, 35, 42; c) 360, 1 800, 10 800; d) 7 568, 99 010, 1 113 212; e) 6 742, 8 972, 1 011 110; f) 576, 27 648, 15 925 248. **14.** 13 zerouri. **15.** b) și d). **16.** a) F; b) A; c) F; d) F. **17.** a) $(13+2)\cdot 5 = 25\cdot 3$; b) $19-(5\cdot 3-2)=6$; c) $(19-5)\cdot(3-2)=14$; **18.** a) $15-7\cdot 2=1$; b) $128-22\cdot 4-38=2$; c) $24-5\cdot 3-2=7$. **20.** $a+b=431$, $2\cdot a+5\cdot b=2\cdot(a+b)+3\cdot b = 1696$, $3\cdot b=834$, $b=278$, $a=153$. **21.** a) $2\cdot x\cdot 3\cdot 4=24$, $x=1$, numărul căutat este 2 134; b) $x\cdot y=6$, numerele căutate sunt 2 164, 2 234, 2 324, 2 614. **22.** Ultima cifră a produsului a 2 numere naturale consecutive se obține din produsul numerelor: $0\cdot 1, 1\cdot 2, \ldots, 8\cdot 9$; b) Nu. Produsul a două numere naturale consecutive este un număr par, iar 2 017 este un număr impar. Deci, nu putem avea egalitate.

Minitest: **1.** a) 780; b) 23 500. **2.** a) $11=1\cdot 1\cdot 11$; b) $8=1\cdot 2\cdot 4$. **3.** 8. **4.** $7\cdot 12=84$ borcane, $84\cdot 9=756$ bile.

Lecția 6. Factor comun

1. a) 160; b) 1 000; c) 14 000; d) 12 788; e) 3 000; f) 70 200; g) 2 413 000; h) 1 217 400; i) 1 289 000. **2.** a) 1 200; b) 50 000; c) 702 000; d) 478 000. **3.** a) 106; b) 15; c) 102; d) 1 302. **4.** a) 100; b) 114; c) 700; d) 2 021. **5.** a) $x=2$; b) $x=100$; c) $x=13$; d) $x=2028$. **6.** b) 20 020; c) 85 995; d) 499 950. **7.** $91\cdot\overline{ab}=6188$, $\overline{ab}=68$.

Minitest: **1.** a) 76 200; b) 9 000; c) 82 500; d) 10 461. **2.** a) $3a+7b+4c=3a+3b+4a+4b=3(a+b)+4(a+b)=180$; b) 121. **3.** a) 26 și 24; b) 46 și 75. **4.** $a+b+c=8$, $a<b<c$, a, b, c numere naturale, obținem $a=0, b=1, c=7$ sau $a=0, b=2, c=6$ sau $a=1, b=2, c=5$ sau $a=1, b=3, c=4$.

Lecția 7. Împărțirea cu rest 0 a numerelor naturale

1. a) 156; b) 86; c) 61; d) 54; e) 20; f) 28; g) 89; h) 4 606; i) 420; j) 58. **2.** a) 24, proba: $24\cdot 65=1560$; b) 21; c) 48; d) 36; e) 70; f) 23; g) 126; h) 241. **3.** a) 655, proba: $47160:655=72$; b) 57; c) 264; d) 89; e) 304; f) 36; g) 67; h) 27. **4.** 45 kg. **5.** 82 lei. **6.** 23 lei. **7.** 4 lei, 3 lei, 4 lei, 3 lei. **8.** a) A; b) F; c) A; d) A; e) F; f) A. **9.** 32; **10.** Câtul este 11, restul este 0.

Minitest: **1.** a) 11; b) 11 011; c) 1 001. **2.** a) 2 541; b) 69. **3.** Numerele sunt 53 și 689. **4.** a) 270 pastile; b) 15 flacoane.

Lecția 8. Împărțirea cu rest a numerelor naturale

1. a) 20 rest 5; b) 33 rest 4; c) 62 rest 8; d) 93 rest 1; e) 154 rest 4; f) 73 rest 11; g) 129 rest 5; h) 84 rest 5; i) 156 rest 10; j) 27 rest 140; k) 609 rest 21; l) 102 rest 48. **2.** a) A; b) A; c) F; d) F. **3.** a) $a:32=36$ rest 28, $a=1180$; b) 1 428. **4.** a) $a=6\cdot 13+r$, $r<6$, $a=78, 79, 80, 81, 82, 83, 84$; b) 348.**5.** $a+b+c=135$, $a=12c+1$, $b=31c+1$, obținem $44c=132$, $c=3$, $a=37$, $b=95$. **6.** $a-b=72$, $a+b=362$, $a=217$, $b=145$. **7.** a) $a=13c+r$, $r<13$, $r=c$, obținem $a=14c$, de unde $a=0, 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126, 140, 154, 168$; b) numerele sunt: 0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119; c) $x:2009=c$ rest r, $r<2009$, $r=10c$, $10c=2000$, $c=200$, obținem $x=2019c=403800$. **8.** b) Cel mai mic număr este $120=37\cdot 3+9$, iar cel mai mare număr este $971=37\cdot 26+9$, sunt $26-3+1=24$ numere, suma lor este egală cu 13 092. **9.** a) $x=6c+3$, $x=3(2c+1)+0$, deci restul împărțirii numărului natural x la 3 este 0, diferit de 2. **10.** a) $A=17a+17b+17+8=17(a+b+1)+8$, $8<17$, restul împărțirii numărului A la 17 este 8; b) $B=4(4a+7b+3)+1$, $1<4$, restul împărțirii numărului B la 4 este 1. **11.** $x=30c+8$, $y=35d+34$, $3x+2y=10(9c+7d+9)+2$, $2<10$, restul împărțirii numărului $3x+2y$ la 10 este 2. **12.** $a+b+c=232$, $b=7c+1$, $a=98c+19$, obținem $c=2$, $a=215$, $b=15$. **13.** Numerele sunt 195, 85, 17. **14.** $a-b=139$, $a=20b+6$, $a=146$, $b=7$. **15.** a) $\overline{abc}=5\cdot\overline{bc}+4$, $25\cdot a=\overline{bc}+1$, $\overline{abc}=124, 249, 374, 499$; b) $\overline{abad}=\overline{ab00}+\overline{ad}=q\cdot\overline{ab}+5$, $\overline{ab00}:\overline{ab}=100$, $\overline{ad}:\overline{ab}=1$ rest 5, $d=b+5$, $a=1, 2, \ldots, 9$, $(b, d)=(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4,9)$, sunt 45 de numere naturale care verifică condițiile problemei. **16.** a) $126=2\cdot 9\cdot 7$, $N=(2\cdot 9\cdot 7)\cdot 1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot\ldots\cdot 125+126+124=126\cdot(1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot\ldots\cdot 125+1)+124$, câtul împărțirii lui N la 126 este $1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot\ldots\cdot 125+1$, iar restul este 124.

Minitest: **1.** a) 19 rest 5; b) 18 rest 11; c) 11 rest 102. **2.** Numerele sunt 58 și 12. **3.** $2017:9=224$ rest 1, cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 2 017 este $1\underbrace{999\ldots9}_{224 \text{ de } 9}$. **4.** $x=42+r$, $r<6$, $x=42, 43, 44, 45, 46, 47$.

Lecția 9. Puterea cu exponent natural a unui număr natural. Pătratul unui număr natural

1. $a=7$, $b=9$, $c=11^4$, $d=3$, $e=37$, $f=31$, $g=18$. **2.** $a=10$, $b=625$, $c=24$, $d=1024$, $e=9801$. **3.** a) 5^6; b) 12^3; c) 7^5; d) $(8\cdot 3)^4$; e) 1^5; f) 3^{2017}. **4.** a) 1; b) 126; c) 217; d) 47; e) 63; f) 87; g) 0; h) 1; i) 1 000; j) 400; k) 49; l) 4. **5.** a) $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4$; b) $1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+4^2$.**6.** a) 2; b) 3; c) 5; d) 6; e) 1; f) 8; g) 1; h) 4. **7.** 0. **8.** a) $6^2<39<7^2$; b) $26^2<700<27^2$; c) $12^2<160<13^2$; d) $11^2<123<12^2$. **9.** a) ultima cifră a numărului este 7, deci el nu poate fi pătratul niciunui număr natural; b) $u(2^{403}+2^{402})=2$, deci numărul dat nu poate fi pătratul niciunui număr natural.**10.** a) Soluțiile sunt: $x=0, y=8$ sau $x=8, y=0$; b) Soluțiile sunt: $x=0, y=5, z=6$ sau $x=0, y=6, z=5$ sau $x=5, y=0, z=6$ sau $x=6, y=0, z=5$ sau $x=5, y=6, z=0$ sau $x=6, y=5, z=0$.

Minitest: **1.** a) 61; b) 1; c) 2 003. **2.** $A=241$, $B=243$, $A<B$. **3.** $26^2<725<27^2$. **4.** $u(7^{27}+9^{21})=2$, deci numărul dat nu poate fi pătratul niciunui număr natural.

Lecția 10. Reguli de calcul cu puteri

1. a) 7^{45}; b) 16^{33}; c) 3^{11}; d) 5^{23}; e) 23^{57}; f) 5^{153}. **2.** a) 2^{70}; b) 75^3; c) 3^7; d) 5^{39}; e) 7^{25}; f) 14^{25}. **3.** a) 3^{28}; b) 13^{72}; c) 17^{54}; d) 7^{44}; e) 16^{48}; f) 5^{12}. **4.** a) 21^{16}; b) 35^{10}; c) 70^{34}; d) 10^4; e) 165^{12}; f) 84^{30}. **5.** a) 4^{24}; b) 25^{45}; c) 2^{17}; d) 3^{36}; e) 3^{21}; f) 25^8. **6.** a) 5^{67}; b) 3^{37}; c) 2^{57}. **7.** a) $2^{76}\cdot 21$;

b) $5^{47} \cdot 163$; c) $13^{12} \cdot 480$. **8.** a) $(5^{23})^2$; b) $(23^{50})^2$; c) $(7^{15})^2$; d) $(5^{37})^2$; e) $(2^{75})^2$; f) $(5^{14})^2$; g) 20^2; h) $(2^9 \cdot 3^3)^2$; i) $(5 \cdot 3^9)^2$. **9.** A; F; A; N; F. **Exemplu:** $(9+16)^9 = 25^9 = (5^9)^2$ (A); $(3+2)^3 = 5^3$ (F). **10.** (13, 2); (36, 7); (7, 8); (25, 5).11. b) $5^2 = 3^2 + 4^2$, $5^{200} = 5^2 \cdot 5^{198} = (3^2+4^2) \cdot 5^{198} = (3 \cdot 5^{99})^2 + (4 \cdot 5^{99})^2$.12. a) $n = 3^{23} \cdot 2^{46} - 2^{44} \cdot 3^{23} = 3^{23} \cdot 3 \cdot 2^{44} = (3^{12} \cdot 2^{22})^2$. b) $n = 3^{2008} \cdot 49 = (3^{1004} \cdot 7)^2$.

Minitest: **1.** a) 2^{16}; b) 2^2; c) 2^{63}. **2.** U(A) = 7. **3.** $(9^{17} \cdot 7^2)^2$. **4.** $2^9 \cdot 7 = n \cdot 2^9$, $n = 7$.

Lecția 11. Compararea puterilor

1. a) 25^{28}; b) 26^{1234}; c) 2011^5; d) 393^{100}; e) 125^{126}; f) 111^{44}. **2.** a) 15^{27}; b) 24^{123}; c) 2010^4; d) 987^{123}; e) 25^{125}; f) 1010^{201}.**3.** a) $5^{87} > 25^{36}$; b) $4^{333} > 8^{122}$; c) $2^{65} < 16^{20}$; d) $125^{34} < 25^{75}$; e) $36^{224} > 6^{363}$; f) $27^{303} < 9^{502}$. **4.** a) $3^{22} > 2^{33}$; b) $4^{33} < 3^{44}$; c) $11^{22} > 22^{11}$; d) $2^{39} < 3^{26}$; e) $5^{45} > 6^{30}$; f) $15^{90} > 6^{135}$. **5.** De exemplu:($2^a < 2^b$; $a = 3$, $b = 7$); ($a^{21} > b^{21}$; $a = 5$, $b = 3$); ($4^a > 2^b$; $a = 4$, $b = 6$). **6.** a) $\overline{ab} > 97$, $\overline{ab} = 98, 99$; b) $\overline{ab} < 13$, $\overline{ab} = 10, 11, 12$; c) $\overline{abc} < 132$, $\overline{abc} = 100, 101, \ldots, 131$. **7.** a) $25^{18} < 5^{40} < 125^{15}$; b) $3^{95} < 9^{51} < 27^{48}$; c) $32^7 < 8^{12} < 27^8$.

Minitest: **1.** a) $2^{51} > 2^{18}$; b) $7^{32} < 9^{32}$. **2.** $\overline{ab} < 13$, $\overline{ab} = 10, 11, 12$, deci sunt trei numere naturale. **3.** $4^{32} < 8^{24} < 16^{25}$. **4.** $5^{72} > 3^{96}$.

Lecția 12. Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2

1. a) $812 = 8 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10^0$; b) $1\,121 = 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10^0$; e) $\overline{a7b} = a \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + b \cdot 10^0$; f) $\overline{a19b} = a \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + {}$ $+ 1 \cdot 10 + b \cdot 10^0$. **2.** a) 4708; b) 64790; c) 8095; d) 704803; e) 4906. **3.** a) $5_{(10)}$; b) $13_{(10)}$; c) $22_{(10)}$; d) $25_{(10)}$. **4.** a) $11011_{(2)}$; b) $100110_{(2)}$; c) $101101_{(2)}$; d) $111001_{(2)}$; e) $111101_{(2)}$; f) $1001000_{(2)}$; g) $1010101_{(2)}$; h) $1100001_{(2)}$. **5.** a) $2010 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2$; b) $1999 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2 + 2^0$. **6.** $a = 10010_{(2)}$; $b = 2^4 + 2$; $c = 1 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0$; $d = 10$; $e = 2^3 + 2$; $f = 1 \cdot 10 +$; $g = 37$; $h = 100101_{(2)}$; $i = 3 \cdot 10 + 7 \cdot 10^0$; $j = 5087$; $k = 1001111011111_{(2)}$. **7.** a) $x = 1111001$; b) $x = 100010$; c) $x = 27$; d) $x = 43$. **8.**a) F; b) A; c) A; d) A.

Lecția 13. Ordinea efectuării operațiilor, utilizarea parantezelor rotunde, pătrate și acolade

1. a) 31; b) 29; c) 66; d) 66; e) 1386; f) 392. **2.** a) 4; b) 216; c) 2; d) 4; e) 2; f) 500. **3.** a) 100; b) 1225; c) 1; d) 1; e) 11; f) 11. **4.** a) 585; b) 1 914; c) 1 119; d) 0. **5.** a) 70; b) 1. **6.** $a = 30$; $b = 135$. Numerele cuprinse între 30 și 135 sunt: 31, 32, … ,134. Numărul lor este 104. **7.** a) $5 \cdot (4 : 2 + 8) - 2 = 48$; b) $6 \cdot (9 : 3 + 5 - 2) = 36$; c) $3 \cdot (8 : 4 + 6 \cdot 2) - 18 = 24$. **8.** 365 lei. **9.** $(10^4 \cdot a + 100 \cdot \overline{bc} + \overline{de} - 100 \cdot \overline{bc} - {}$ $- \overline{de} : 10^4 = 7$ sau $(10^4 \cdot a) : 10^4 = 7$, de unde obținem $a = 7$. **10.** a) $11 \cdot a + 11 \cdot b + 11 \cdot c = 88$, deci $a + b + c = 8$; b) $a + b + c = 18$; c) $a + b + c = 7$; d) $a + b + c = 5$.

Minitest: **1.** a) 12; b) 0; c) 2; d) 166. **2.** $A = 9$, $B = 63$, $B > A$. **3.** $(828 - 12 \cdot 24) : 18 = 30$ cutii mari.

Unitatea 2 Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

Lecția 1. Metoda reducerii la unitate

1. Vlad. **2.** 36 cm, 16 cm, 12 cm, 8 cm. a) Dacă lungimea laturii se mărește, atunci și perimetrul pătratului se mărește. b) Dacă lungimea laturii se micșorează, atunci și perimetrul pătratului se micșorează. **3.** De 4200 ori. **4.** 25000 litri. **5.** 180 km. **7.** 20, 15, 5, 6 și 10. a) Dacă valoarea lui *x* se mărește, atunci valoarea lui *y* se micșorează. b) Dacă valoarea lui *x* se micșorează, atunci valoarea lui *y* se mărește. **8.** 20 de muncitori. **9.** 240 de pâini.**11.** 8100000 m. **12.** Între trei bătăi consecutive de clopot sunt două intervale de timp a 6 secunde fiecare; 66 de secunde.

Joc. **1.** Tot în 5 minute. **2.** 5 minute.

Minitest: **1.** 210 lei. **2.** 6 zile. **3.** $x = 21$ lei. **4.** 400000 €.

Lecția 2. Metoda comparației

1. 480. **2.** 2 kg, respectiv, 3 kg. **3.** 18 lei, respectiv, 5 lei. **4.** boul. **5.** Ogarul parcurge 60 m, iar vulpea 30 m.

Joc. **1.** Comparând primele două egalități, deducem că □ + △ + ○ + 8. Comparând această egalitate nou obținută tot cu cea de-a doua egalitate, obținem că diferența cerută este 4. **2.** În prima egalitate, adăugăm o tamburină în ambii membri și apoi înlocuim membrul drept cu 160 lei. O tamburină costă 40 lei. **3.** Tot în 5 minute.

Minitest: **1.** 5 hl pe oră; 8 hl pe oră. **2.** 3 kg; 2 kg. **3.** 200 lei. **4.** 5 lei un kg de piersici și 3 lei un kg de mere.

Lecția 3. Metoda figurativă

1. 72 kg. **2.** 11 trandafiri, 13 frezii și 15 lalele. **3.** 468 m. **4.** Așezându-i unui număr de două cifre cifra 1 în stânga, îl mărim cu 100. Numerele sunt 53 și 153. **5.** Locul X. **6.** a) L = 117 m și l = 105 m. Sunt 75 de intervale a 6 m fiecare, deci 76 de pomi; b) 200 de pomi. **7.** 2 galbeni, 6 roșii, 12 albi sau 4 galbeni, 8 roșii, 16 albi. **8.** 28 de ani. **9.** Reprezentăm numărul rămas cu o parte. Cel inițial este reprezentat prin 10 părți plus numărul 7. Numărul inițial este 2017. **10.** Două soluții: 225 și 1125, respectiv 5625 și 1125. **12.** 10 mere și 30 de prune. **13.** 29 de elevi.

Joc: Zero.

Minitest: **1.** 12 păstrăvi. **2.** 24 de găini și 6 rațe. **3.** 197 și 38. **4.** 30 de elevi și 12 bănci.

Lecția 4. Metoda mersului invers

1. 1. **2.** 54. **3.** b). **4.** 9 nuferi. **5.** 6 poli. **6.** 8 km. **7.** 33 de mere în prima grămadă și 15 mere în a doua grămadă.

Joc. **1.** Fie $\overline{ab}$ numărul scris. Împarți rezultatul comunicat la 2. Rezultatul obținut are cifra zecilor egală cu *a*, iar cifra unităților de două ori mai mare ca *b*.

Minitest: **1.** 88. **2.** Numărul inițial este 61. Dă același rezultat, egal cu 11. **3.** 201. **4.** 64 de bile. Adi câștigă.

Lecția 5. Metoda falsei ipoteze

1. 120 de vite și 200 păsări. **2.** Trei vase a 3 litri și 4 vase a 20 de litri. **3.** 80 de găini. **4.** Atenție! La fiecare rezolvare greșită pierde 12 puncte. Cinci probleme. **5.** a) Doi iepuri și 3 rațe; b) două picioare (ale gospodinei). **6.** a) 6 zile; b) însorită.

Joc. Compară sumele numerelor de pe fiecare cerc, respectiv, de pe fiecare rază.

Minitest: **1.** 18 găini și doi iepuri. **2.** 5 sticle de doi litri și 8 sticle de 10 litri. **3.** 6 probleme. **4.** zece acțiuni de 25 de euro și 8 acțiuni de 12 euro.

Evaluare: **1.** a). **2.** d). **3.** c). **4.** a). **5.** a). **6.** c). **7.** b). **8.** a). **9.** 475 și 156. **10.** 9 băieți și 21 de fete. **11.** 63 de lei. **12.** A = 367; B = 2; C = 80.

Unitatea 3 Divizibilitatea numerelor naturale

Lecția 1. Divizor, multiplu; divizori comuni; multipli comuni

1. a) 16 : 4 = 4 rest 0, deci $16 \vdots 4$; b) $30 \vdots 5$; c) 27 : 13=2 rest 1, deci $27 \not\vdots 13$; d) $42 \vdots 7$; e) $22 \not\vdots 4$; f) $72 \vdots 9$; g) $65 \not\vdots 7$; h) $90 \vdots 10$; i) $0 \vdots 6$. **2.** a)1, 5; b) 1, 2, 4, 8, 16; c) 1, 23; d) 1, 3, 9, 27; e) 1, 2, 4, 7, 14, 28; f) 1, 3, 11, 33; g) 1, 2, 3, 6, 12, 14, 21, 42; h) 1, 3, 7, 9, 21, 63; i) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; j) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80. **3.** a) 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76; 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72; 27, 36, 45, 54, 63, 72. b) 21, 28, 35, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91; 30, 45, 60, 75, 90; 29, 58, 87. **4.** a) 108 : 18 = 6 rest 0, deci 18 este un divizor al lui 108; 18 : 6 = 3 rest 0, deci 18 este un multiplu al lui 6. b) 2 184 : 91 = 24 rest 0, deci 91 este un divizor al lui 2 184; 91 : 21 = 4 rest 7, deci 91 nu este multiplu al lui 21. c) $11 \cdot 2 = 11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, deci $11 \cdot 12$este un multiplu al lui $2 \cdot 3$; $22 \cdot 33 = 11 \cdot 6 \cdot 11$, deci $22 \cdot 33$ nu se poate scrie ca produsul dintre $11 \cdot 12$ și alt număr natural, adică $11 \cdot 12$ nu este divizor al lui $22 \cdot 33$. Altfel, se efectuează $22 \cdot 33 = 726$ și $11 \cdot 12 = 132$, apoi se observă că 726 : 132 = 5 rest 66. Deci $11 \cdot 12$ nu este divizor al lui $22 \cdot 33$. **5.** a) Divizorii lui 34 sunt 1, 2, 17, 34. $3n - 1 = 1$, n nu este număr natural; $3n - 1 = 2$, $n = 1$; $3n - 1 = 17$, $n = 6$; $3n - 1 = 34$, n nu este număr natural. b) Divizorii lui 98 sunt 1, 2, 7, 14, 49, 90. Obținem $n = 3$, $n = 10$. **6.** a) Valorile lui m sunt 34, 41, 48, 55, 62, 69. b) $2n + 1$ este multiplu al lui 45; valorile lui n sunt 22 și 67. **7.** a) $x = 7 \cdot 5 \cdot a + 7 \cdot 9 \cdot b = 7 \cdot (5a + 9b) \vdots 7$. b) $u + v = 9a + 9b + 9c = 9(a + b + c) \vdots 9$. **8.** a) $a = 12c + 9 = 3(4c + 3) \vdots 3$; b) $b = 57d + 38 = 19(3d + 2) \vdots 19$. **9.** Grupăm termenii câte doi și aplicăm strategia de la problema rezolvată 4. **10.**a) Cel mai mare divizor comun este 12. b) Cel mai mic multiplu comun nenul este 36. **11.** Numărul egal de baloane, fluiere și coifuri este egal cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 18, 12 și 8, adică numărul 72. Luca ar trebui să cumpere 3 seturi de baloane, 6 seturi de fluiere și 9 seturi de coifuri. **12.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 9 și 12 este egal cu 36. Deci, cei doi copii se vor întâlni la start peste 36 de minute. Bogdan va efectua 4 tururi, iar Corina 3 tururi. **13.** a) deoarece 4 este divizor al lui 24, obținem că vizitatorii care primesc rucsac primesc și insignă. b) Insignă și tricou vor primi din 36 în 36 vizitatori. Insignă și ochelari de soare din 60 în 60 vizitatori. c) Cel mai mic multiplu comun al numerelor 4, 9, 15 și 24 este egal cu 360. Primesc toate cele patru obiecte cadou vizitatorii cu numărul 360 și 720, adică doi vizitatori din primii 1 000. **14.** Cel mai mic număr de cutii este 6. **15.** a) $30 \vdots 3$, $24 \vdots 3$ și $18 \vdots 30$, deci se pot pune câte trei fructe în fiecare coș; deoarece $30 \not\vdots 4$, obținem că nu se pot pune câte 4 fructe de același fel, în fiecare coș. b) Numărul coșurilor este 6. Fiecare coș conține 5 portocale, 4 piersici și 3 pere. **16.** Corul școlii este format din 36 de fete și 24 de băieți. Cel mai mare divizor comun al numerelor 36 și 24 este 12. Vor fi trei rânduri a câte 12 fete și două rânduri a câte 12 băieți. Numărul elevilor de pe fiecare rând este 12, iar numărul rândurilor este 5.

Minitest: **1.** a) A; b) F; c) A; d) A; e) F; f) F. **2.** a) Numerele căutate sunt 42, 45 și 48, adică sunt 3 numere. b) $24 = 6 \cdot 4$, $30 = 6 \cdot 5$, …, $90 = 6 \cdot 15$. Sunt atâția multiplii ai lui 6 câte numere sunt de la 4 la 15, adică $15 - 4 + 1 = 12$ multipli de 6 3 10 minute = 600 secunde; cel mai mic multiplu comun al numerelor 7 și 5 este 35600 : 35 = 17 rest 5; proiectoarele vor clipi simultan de 35 de ori. **4.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 12 și 28 este egal cu 84. Din 84 în 84 de ascultători primesc ambele premii. 1 000 : 84 = 11 rest 76. Numărul total de ascultători care vor primi ambele premii este 11.

Lecția 2. Criterii de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9

2. a) 50, 12, 38, 84; b) 5, 20, 25; c) 24, 60; d) 18; e) 78, 84, 12; f) 60, 45. **3.** a) 105, 165, 195, 605, 615, 695, 905, 915, 965; b) 910, 950, 960, 906, 916, 956; c) 501, 561, 591, 651, 951, 105, 165, 195, 615, 159, 519, 609; d) 105, 165, 615, 195, 915. **4.** a) 120; b) 140, 240, 340, 440, 540, 640, 740, 840, 940; c) 6 300, 6 310, 6 320, …, 6 390. **5.** a) 190, 192, 194, 196, 198; b) 500, 522, 544, 566, 588; c) 708, 718, 728, …, 798; d) 202, 404, 606, 808. **6.** a) 740, 745; b) 800, 810, 820, …, 890; c) 4 020, 4 525; d) 1 510, 2 520, 3 530, …, 9 590, 1 515, 2 525, 3 535, …, 9 595. **7.** a) 705, 735, 765, 795; b) 981, 984, 987; c) 4 080, 4 383, 4 686, 4 989. **8.** a) 153; b) 279; c) 3 330, 3 339; d) 12 060, 12 150, 12 240, 12 330, 12 420, 12 510, 12 600, 12 690, 12 780, 12 870, 12 960. **9.** a) 0; b) 2, 5 sau 8; c) 0 sau 5; d) 0, 2, 4, 6 sau 8; e) 6;

f) 1, 4 sau 7; g) 0; h) 7. **10.** a) b poate lua una dintre valorile 0, 2, 4, 6 sau 8. Din $a+b+8+7=29$, obținem $a+b=14$. Dacă $b=8$, atunci $a=6$ și obținem numărul 8768. Dacă $b=6$, atunci $a=8$ și obținem numărul 8786. Dacă b ia valorile 0, 2 sau 4, atunci a nu este cifră. b) 33970. c) 45020, 45110, 45200. **11.** a) 720, 750, 780. b) 9060, 9360, 9660, 9990, 9165, 9465, 9765. c) 52650, 42642, 32634, 22626, 12618. **12.** Studiind ultima cifră a lui A obținem n par.

Minitest: **1.** a) 28, 120, 1294, 145340; b) 35, 120, 145340, 225035; c) 120, 2373. **2.** a) $6135 \,\vdots\, 5$, este posibil să fie colorate cu 5 culori; b) $6135 \not\vdots\ 10$, nu este posibil să fie colorate cu 10 culori; c) $6135 \,\vdots\, 3$, este posibil să fie colorate cu 3 culori; d) $6135 \not\vdots\ 9$, nu este posibil să fie colorate cu 9 culori. **3.** Din $N \,\vdots\, 5$ obținem că a este egal cu 5. Suma cifrelor lui N este egală cu 24, 24 este divizibil cu 3, deci N este divizibil cu 3. **4.** 12300, 12330, 12360, 12390.

Lecția 3. Numere prime. Numere compuse

2. a) 3; b) 3; c) 5; d) 2; e) 13; f) 17. **3.** a) 1, 3, 7; b) 1, 3, 9; c) 1, 2, 4, 5, 7, 8; d) 1, 3, 7, 9; e) 1; f) 3, 6. **4.** a) 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8; b) 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9; c) 0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9; d) 2, 5, 8, 9; e) 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9; f) 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9. **5.** De exemplu: b) $22=3+19$; c) $46=53-7$; d) $26=29-3$; e) $77=7\cdot 11$; f) $39=3\cdot 13$. **7.** a) (13,2); (11,4); (7,8); (5,10); b) (2,73), (73,2); c) (43,2); d) (5,17), (17,5). **8.** a) Studiem cazuri după valorile lui b; obținem $a=13, b=2$; b) $a=11, b=5$; c) $a=5, b=3, c=7$ sau $a=11, b=3, c=3$. **9.** a) $n=0$; b) $n=1$; c) $n=7$. **10.** a) $A=(2^n+1)\cdot(3^n+1)$; b) $B=(3^n+5)\cdot(5^n+1)$. **11.** $n=0$ sau $n=1$ nu convin. Pentru $n=2$, se obțin numerele prime 3, 13 și 29. Pentru $n\geq 3$, vom studia cazurile $n=3k$, $n=3k+1$ sau $n=3k+2$. În fiecare dintre cele trei cazuri obținem cel puțin un număr compus din cele 3.

Minitest: **2.** a) 113, 131, 311 toate trei sunt numere prime; b) 511 și 511 sunt numere compuse. **3.** (23, 2, 3), (17, 2, 5), (11, 2, 7). **4.** (2, 13, 2), (13, 2, 2), (5, 5, 3), (3, 7, 7), (7, 3, 7), (3, 5, 13), (5, 3, 13), (3, 3, 19).

Evaluare: **1.** b) **2.** d) **3.** c) **4.** d) **5.** b) **6.** b) **7.** c) **8.** b) **9.** F, F, A, F. **10.** (a, 2), (b, 4), (c, 1). **11.** De exemplu: (36,2), (45,5), (84,3). **12.** De exemplu (2,80), (3,39), (5,75). **13.** $a=7, b=3$. **14.** $n=24\cdot c+15=3\cdot(8c+5)$ care este divizibil cu 3. Deoarece $24\cdot c$ este număr par și 15 este număr impar, obținem că $24\cdot c+15$ este număr impar.

Unitatea 4 Fracții ordinare

Lecția 1. Fracții ordinare. Fracții echivalente. Procente

2. a) g) i) j) l) subunitare; b) f) h) echiunitare; c) d) e) k) supraunitare. **3.** a) 3; b) 0, 1; c) 0, 1, 2; d) 3. **4.** a) Vlad 38%, Dina 15%, Luca 18%, Eliza 20%; b) 56%; c) 35%; d) 9%. **5.** Perechi de fracții echivalente sunt la a) b) d) g) i). **6.** a) 30; b) 8; c) 48; d) 6; e) 12; f) 4; g) 2; h) 4; i) 4.

Minitest: **1.** a) subunitară; b) echiunitară c) supraunitară. **2.** a) 2; b) 5; c) 10. **3.** Fracția $\frac{n+1}{7}$ este subunitară dacă $n+1<7$, adică $n<6$. Fracția $\frac{2n+3}{11}$ este supraunitară dacă $2n+3>11$, adică $n>4$. Rezultă $4<n<6$, deci $n=5$.

Lecția 2. Compararea fracțiilor cu același numitor/numărător. Reprezentarea fracțiilor pe axa numerelor

1. a) $\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{7}{7}, \frac{12}{7}, \frac{14}{7}$; b) $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{9}{9}, \frac{11}{9}, \frac{16}{9}$; c) $\frac{4}{91}, \frac{4}{11}, \frac{4}{9}, \frac{4}{5}, \frac{4}{4}, \frac{4}{3}$. **2.** $\frac{4}{7}<\frac{5}{7}$; $\frac{3}{5}<\frac{4}{5}$; $\frac{16}{25}<\frac{17}{25}$. **3.** a) $\frac{2}{7}<\frac{4}{7}$; b) $\frac{4}{9}<\frac{5}{9}$; c) $\frac{3}{2}<\frac{5}{2}$. **4.** a) $\frac{3}{7}<\frac{3}{5}$; b) $\frac{5}{5}>\frac{5}{6}$; c) $\frac{5}{4}>\frac{5}{8}$. **5.** $A\left(\frac{2}{9}\right)$; $B\left(\frac{6}{9}\right)$; $C\left(\frac{8}{9}\right)$; $D\left(\frac{11}{9}\right)$; $E\left(\frac{14}{9}\right)$; $M\left(\frac{16}{9}\right)$; $N\left(\frac{20}{9}\right)$; $\left(\frac{23}{}\right)$; $R\left(\frac{26}{9}\right)$. **8.** $\frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{6}{9}, \frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{3}{9}$. **9.** Se obțin două puncte distincte, deoarece fracțiile $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$ și $\frac{3}{6}$ sunt echivalente și, la fel, fracțiile $\frac{2}{2}, \frac{4}{4}$ și $\frac{5}{5}$ sunt echivalente. **10.** a) 0,1 ; b) 0 ; c) 1 ; d) 0, 1, 2.

Minitest: **1.** $\frac{1}{4}<\frac{3}{4}<\frac{3}{2}$. **3.** $\frac{n}{5}<\frac{4}{5}$ dacă $n<4$ și $\frac{5}{n}<\frac{5}{2}$ dacă $n>2$. Obținem $2<n<4$, deci $n=3$.

Lecția 4. Cel mai mare divizor comun a două numere naturale. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Fracții ireductibile

1. a) $\frac{4}{20}$; b) $\frac{16}{28}$; c) $\frac{8}{100}$; d) $\frac{116}{40}$; e) $\frac{68}{200}$; f) $\frac{140}{48}$. **2.** a) $\frac{18}{12}$; b) $\frac{12}{42}$; c) $\frac{66}{18}$; d) $\frac{24}{54}$; e) $\frac{96}{150}$; f) $\frac{66}{216}$. **3.** a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{4}{5}$; c) $\frac{9}{2}$; d) $\frac{13}{24}$; e) $\frac{22}{33}$; f) $\frac{12}{32}$. **4.** a) $\frac{1}{2}$; b) $-$; c) $\frac{10}{3}$; d) $\frac{8}{18}$; e) $\frac{12}{15}$; f) $\frac{5}{20}$. **5.** a) $\frac{18}{24}$; b) $\frac{16}{20}$. **6.** a) 4; b) 10. **7.** a) 5; b) 3. **8.** a) $\frac{1}{18}$; b) $\frac{8}{11}$; d) $\frac{49}{64}$; f) $\frac{25}{27}$. **9.** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{3}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{7}{4}$; f) $\frac{8}{25}$. **10.** a) Din $3n+1<20$ obținem $n\leq 6$. Fracții ireductibile se obțin dacă n este 0, 2, 4 sau 6. b) n poate fi 0,1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12 sau 13. **11.** a) $\overline{64a}$ se divide cu 5, deci a este 0 sau 5. Fracțiile sunt $\frac{640}{885}$ și $\frac{645}{885}$. b) Suma cifrelor numerelor $\overline{11a2}$ și $\overline{2b70}$ trebuie să fie divizibilă cu 3; a poate fi 2, 5 sau 8; b poate fi 0, 3, 6 sau 9. **12.** Fracția scrisă de Vlad se obține în urma simplificării fracției $\frac{18}{36}$. Divizorii comuni diferiți de 1 ai numerelor 18 și 36 sunt 2, 3, 6, 9 și 18. Vlad a scris una dintre fracțiile: $\frac{9}{18}, \frac{6}{12}, \frac{3}{6}, \frac{2}{4}$ sau $\frac{1}{2}$.

Minitest: **1.** a) $\frac{8}{28}$; b) $\frac{20}{76}$; c) $\frac{52}{100}$. **2.** a) $\frac{1}{10}$; b) $\frac{9}{8}$; c) $\frac{4}{7}$. **3.** $\frac{471}{1161}, \frac{474}{1464}, \frac{477}{1767}$.

Lecția 5. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale. Aducerea fracțiilor la un numitor comun

1. a) $\frac{3}{6},\frac{5}{6}$; b) $\frac{2}{8},\frac{3}{8}$; c) $\frac{16}{84},\frac{13}{84}$; d) $\frac{30}{96},\frac{49}{96}$. **2.** a) ${}^{15)}\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$, ${}^{2)}\frac{7}{15}=\frac{14}{30}$, $\frac{1}{2}>\frac{7}{15}$; b) ${}^{25)}\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$, ${}^{4)}\frac{16}{25}=\frac{64}{100}$, $\frac{3}{4}>\frac{16}{25}$; c) ${}^{9)}\frac{3}{14}=\frac{27}{126}$, ${}^{14)}\frac{2}{9}=\frac{28}{126}$, $\frac{2}{9}>\frac{3}{14}$; d) ${}^{5)}\frac{7}{12}=\frac{35}{60}$, ${}^{12)}\frac{8}{5}=\frac{96}{60}$, $\frac{8}{5}>\frac{7}{12}$. **3.** a) $[10,15]=30$; ${}^{3)}\frac{1}{10}=\frac{3}{30}$, ${}^{2)}\frac{11}{15}=\frac{22}{30}$; b) $[12,20]=60$; ${}^{5)}\frac{5}{12}=\frac{25}{60}$, ${}^{3)}\frac{9}{20}=\frac{27}{60}$; c) $[18,27]=54$; ${}^{3)}\frac{7}{18}=\frac{21}{54}$, ${}^{2)}\frac{8}{27}=\frac{16}{54}$; d) $[14,49]=98$; ${}^{7)}\frac{3}{14}=\frac{21}{98}$, ${}^{2)}\frac{5}{49}=\frac{10}{98}$. **4.** a) $\frac{6}{12}^{(6}=\frac{1}{2}$, $\frac{14}{21}^{(7}=\frac{2}{3}$; ${}^{3)}\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, ${}^{2)}\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; b) $\frac{5}{20}^{(5}=\frac{1}{4}$, $\frac{22}{55}^{(11}=\frac{2}{5}$; ${}^{5)}\frac{1}{4}=\frac{5}{20}$, ${}^{4)}\frac{2}{5}\ \frac{8}{20}$; c) $\frac{9}{27}^{(9}=\frac{1}{3}$, $\frac{9}{36}^{(9}=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}^{(4}=\frac{4}{12}$, ${}^{3)}\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$; d) $\frac{48}{60}^{(12}=\frac{4}{5}$, $\frac{32}{56}^{(8}=\frac{4}{7}$; ${}^{7)}\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$, ${}^{5)}\frac{4}{7}=\frac{20}{35}$. **5.** $[10,3,5]=30$; ${}^{3)}\frac{7}{10}=\frac{21}{30}$, ${}^{10)}\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$, ${}^{6)}\frac{4}{5}=\frac{24}{30}$; $\frac{24}{30}>\frac{21}{30}>\frac{20}{30}$, deci echipa galbenă a câștigat cele mai puține meciuri. **6.** a) ${}^{4)}\frac{4}{5}=\frac{16}{20}$, ${}^{2)}\frac{7}{10}=\frac{14}{20}$, ${}^{5)}\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$; $\frac{14}{20}<\frac{15}{20}<\frac{16}{20}$; b) ${}^{24)}\frac{2}{3}=\frac{48}{72}$, ${}^{8)}\frac{4}{9}=\frac{32}{72}$, ${}^{3)}\frac{20}{24}=\frac{60}{72}$; $\frac{32}{72}<\frac{48}{72}<\frac{60}{72}$; c) ${}^{20)}\frac{11}{12}=\frac{220}{240}$, ${}^{15)}\frac{6}{16}=\frac{90}{240}$, ${}^{8)}\frac{25}{30}=\frac{200}{240}$; $\frac{90}{240}<\frac{200}{240}<\frac{220}{240}$; d) $3\frac{1}{6}={}^{2)}\frac{19}{6}=\frac{38}{12}$, $1\frac{2}{3}={}^{4)}\frac{5}{3}=\frac{20}{12}$, $2\frac{3}{4}={}^{3)}\frac{11}{4}=\frac{33}{12}$; $\frac{20}{12}<\frac{33}{12}<\frac{38}{12}$.

Minitest: **1.** a) $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}$; b) $\frac{8}{12}, \frac{11}{12}$; c) $\frac{21}{48}, \frac{22}{48}$. **2.** a) ${}^{7)}\frac{1}{6}=\frac{7}{42}$, ${}^{6)}\frac{2}{7}=\frac{12}{42}$; $\frac{1}{6}<\frac{2}{7}$; b) ${}^{5)}\frac{5}{7}=\frac{25}{35}$, $\frac{33}{55}^{(11}={}^{7)}\frac{3}{5}=\frac{21}{35}$; $\frac{5}{7}>\frac{33}{55}$.
3. ${}^{9)}\frac{3}{4}=\frac{27}{36}$, ${}^{4)}\frac{7}{9}=\frac{28}{36}$, ${}^{3)}\frac{11}{12}=\frac{33}{36}$; $\frac{11}{12}>\frac{7}{9}>\frac{3}{4}$.

Lecția 6. Adunarea și scăderea fracțiilor

1. a) $\frac{4}{5}$; b) $\frac{8}{13}$; c) $\frac{13}{15}$; d) $\frac{20}{21}$. **2.** a) $\frac{14}{15}$; b) $\frac{34}{93}$; c) $\frac{5}{32}$; d) $\frac{8}{42}^{(2}=\frac{4}{21}$. **3.** a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{91}{42}$; c) $\frac{5}{12}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{1}{12}$; f) $\frac{1}{12}$; g) $\frac{4}{15}$; h) $\frac{1}{3}$. **4.** a) $3\frac{4}{7}$; b) $4\frac{1}{2}$; c) $5\frac{11}{15}$; d) $4\frac{23}{28}$; e) $4\frac{2}{3}$; f) $1\frac{1}{6}$; g) $3\frac{6}{7}$; h) $1\frac{1}{4}$. **5.** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{8}{9}$; c) $\frac{17}{36}$; d) $\frac{2}{3}$. **6.** $\frac{5}{17}$. **7.** $12\frac{9}{10}$ metri. **8.** Solul A: $1\frac{1}{12}$ cm, solul B: $1\frac{1}{12}$ cm, solul C $\frac{1}{2}$ cm. **9.** $6\frac{11}{12}$ litri. **10.** $\frac{6}{7}$ și $\frac{6}{21}$.

Minitest: **1.** a) $\frac{25}{41}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{31}{36}$. **2.** a) $\frac{5}{37}$; b) $\frac{17}{27}$; c) $\frac{17}{18}$. **3.** $\frac{1}{4}$.

Lecția 7. Înmulțirea fracțiilor

1. a) $\frac{6}{7}$; b) $\frac{28}{31}$; c) $\frac{55}{78}$; d) $\frac{91}{99}$; e) $\frac{8}{21}$; f) $\frac{20}{33}$; g) $\frac{21}{80}$; h) $\frac{44}{85}$. **2.** a) $\frac{6}{5}$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{2}{15}$; d) $\frac{5}{33}$; e) $\frac{7}{24}$; f) $\frac{1}{15}$; g) $\frac{5}{6}$; h) $\frac{3}{20}$. **3.** a) 28; b) $2\frac{2}{5}$; c) $7\frac{1}{5}$; d) 9. **4.** a) $\frac{1}{11}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{1}{39}$; d) $\frac{1}{3}$. **5.** a) $\frac{18}{49}=\frac{3}{7}\cdot\frac{6}{7}$; b) $\frac{15}{28}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}$; c) $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$; d) $\frac{5}{7}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{7}$ (sunt și alte posibilități). **6.** Grosimea tuturor CD-urilor este de $24\cdot\frac{3}{2}$ cm $=36$ cm, deci încap în cutie. **7.** a) Pentru 4 perdele se folosesc $4\cdot\frac{23}{5}=\frac{92}{5}=18\frac{2}{5}$ metri de material. Cum $18\frac{2}{5} > 18$, nu se pot confecționa 4 perdele. b) Pentru 6 perdele sunt necesari $6 \cdot \frac{23}{5} = 27\frac{3}{5}$ metri, deci ajung 28 metri de material. **8.** a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{5}$.

Minitest: **1.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{5}$; c) $7\frac{1}{2}$. **2.** a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{3}{14}$; c) $\frac{8}{9}$. **3.** $1\frac{1}{2}$ kg zahăr, $4\frac{1}{5}$ pahare de apă și $2\frac{1}{4}$ lingurițe de esență.

Lecția 8. Împărțirea fracțiilor

1. a) $\frac{13}{11}$; b) $\frac{7}{16}$; c) $\frac{}{47}$; d) $\frac{7}{50}$. **2.** a) $\frac{15}{8}$; b) $\frac{44}{35}$; c) $\frac{7}{23}$; d) $\frac{3}{8}$; e) $\frac{8}{33}$; f) $\frac{11}{36}$; g) $\frac{47}{19}$; h) $\frac{10}{13}$. **3.** a) $\frac{5}{7}$; b) $\frac{9}{8}$; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{6}{11}$; e) $\frac{28}{9}$; f) $\frac{10}{7}$; g) $\frac{1}{8}$ h) $\frac{3}{8}$. **4.** a) $\frac{10}{3}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{8}{5}$. **5.** a) $\frac{8}{9}$; b) $\frac{20}{27}$. **6.** a) $\frac{5}{2}$; b) $\frac{1}{16}$; c) $\frac{1}{5}$. **7.** a) $2\frac{3}{10} : \frac{3}{5} = \frac{23}{10} \cdot \frac{5}{3} = \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6}$, deci Vlad taie trei bucăți de $\frac{3}{5}$ metri. b) Lungimea porțiunii rămase este $\frac{23}{10} - 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$ metri. **8.** $200 : 7\frac{1}{2} = 200 : \frac{15}{2} = 200 \cdot \frac{2}{15} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$, deci poate confecționa 26 de ecusoane.

Minitest: **1.** a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{2}{7}$; c) $\frac{6}{35}$. **2.** a) $\frac{5}{12}$; b) $\frac{4}{15}$; c) 14. **3.** $7\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{15}{2} \cdot \frac{4}{3} = 10$; trebuie să alerge 10 zile.

Lecția 9. Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

1. a) $\frac{1}{128}$; b) $\frac{32}{243}$; c) $\frac{64}{729}$; d) $\frac{1331}{343}$; e) $\frac{625}{256}$; f) 1; g) $\frac{19}{43}$; h) 1. **2.** a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$; b) $\left(\frac{3}{10}\right)^{13}$; c) $\left(\frac{11}{5}\right)^{10}$; d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{7}$; e) $\frac{8}{3}$; f) $\left(\frac{13}{17}\right)^{2}$; g) $\left(\frac{2}{15}\right)^{55}$; h) $\left(\frac{14}{27}\right)^{24}$; i) $\left(\frac{3}{100}\right)^{0} = 1$. **3.** a) 1; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{5}$; e) $\left(\frac{4}{3}\right)^{6}$; f) $\left(\frac{5}{4}\right)^{12}$. **4.** a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4}$; c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$. **5.** a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$; e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5}$; f) $\left(\frac{7}{6}\right)^{3}$.

Lecția 10. Puterea cu exponent natural a unei fracții ordinare

1. a) 25; b) 224; c) 30; d) 333; e) 88; f) 72; g) 39; h) 1 078. **2.** a) $\frac{1}{7}$; b) 1; c) $\frac{21}{19}$; d) $1\frac{1}{2}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $2\frac{4}{7}$; g) $\frac{5}{9}$; h) $3\frac{2}{3}$. **3.** a) 1; b) 1; c) 4; d) 45; e) 64; f) 324; g) 416; h) 252. **4.** a) 84 kg; b) 56 l; c) 840 lei; d) 35 km. **5.** $3\frac{3}{4}$ metri. **6.** $2\frac{1}{4}$ km. **7.** S-au vândut 375 de bilete cu 14 lei, 1 400 de bilete cu 10 lei și 725 de bilete cu 5 lei; s-au încasat în total 22 875 lei. **8.** 140 parcele cu grâu, 84 parcele cu floarea soarelui. **9.** 3% din 4 800 lei este 144 lei. Prețul se mărește cu 144 de lei și devine 4 944 de lei. **10.** 12% din 2 400 lei este 288 lei. Prețul scade cu 288 de lei și devine 2 112 lei. **11.** Lungimea drumului este $9\text{ km} : \frac{3}{5} = 15$ km. Au rămas de parcurs 6 km. **12.** $24 : \frac{6}{11} = 44$ de volume. **13.** Masă: 93 600 lei, întreținere 41 400 lei, transport 16 200 lei, activități culturale 12 600 lei, activități sportive 9 000 lei, alte cheltuieli 7 200 lei. **14.** a) $\frac{2}{5}$ kg castraveți. b) Se folosesc $\frac{7}{4}$ kg pentru 7 salate Gourmet și $\frac{9}{5}$ kg pentru 9 salate Caesar; $\frac{9}{5} = \frac{36}{20}$, $\frac{7}{4} = \frac{35}{20}$; $\frac{9}{5} > \frac{7}{4}$, deci mai multe roșii se folosesc la salatele Gourmet. c) Salata Caesar cântărește $\frac{49}{60}$ kg, iar salata Gourmet cântărește $\frac{26}{35}$ kg; $\frac{49}{60} > \frac{26}{35}$, deci salata Caesar cântărește mai mult.

Minitest: **1.** a) 125 lei; b) 144 kg; c) 120 m. **2.** a) 289 lei; b) 6 cm; c) 574 g. **3.** 12 elevi.

Unitatea 5 Fracții zecimale

Lecția 1. Fracții zecimale; scrierea fracțiilor ordinare cu numitori puteri ale lui 10 sub formă de fracții zecimale; transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară

1. a) 0,3; b) 2,07; c) 0,043; d) 20,008; e) 6,07; f) 0,09. **2.** a) 2; 7. b) 26; 0,784. c) 8; 2 678; d) 26 784; 4. **3.** 0,2; 0,32; 0,0032; 0,007;

$25{,}67$; $79{,}58$; $0{,}079$. **4.** $\frac{2}{100}$; $\frac{1023}{1000}$; $\frac{4\,532}{100}$; $\frac{156\,003}{1000}$; $\frac{78}{10}$; $\frac{9}{10}$. **5.** $\left(\frac{123}{1000}; 0{,}123\right)$, $\left(\frac{234}{1000}; 0{,}234\right)$. **6.** Se amplifică fracțiile ordinare cu: 4, 2, 5, 8, 2, 4, 4, 2, respectiv 5. **7.** a) 43,56; b) 305,107. **8.** a) $n = 637$; b) $n = 3$; c) $n = 130$.

Minitest: **1.** a) 0,028; b) 12,34. **2.** a) $\frac{34}{1000}$; b) $\frac{1108}{100}$. **3.** $a = 56$, $b = 106$, $a + b = 162$. **4.** $a = 7$, $b = 9$, $c = 8$.

Lecția 2. Aproximări; compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

1. a) $1{,}7 < 1{,}8$; b) $23{,}5 = 23{,}50 < 23{,}51$; c) $304{,}2 > 204{,}2$; d) $15{,}7 = 15{,}70$; e) $0{,}34 < 0{,}44$; f) $0{,}07 > 0{,}007$. **2.** a) $>$; b) $<$; c) $>$; d) $>$. **3.** a) F; b) A; c) A; d) A; e) F; f) A. **4.** a) ordine crescătoare: 0,09; 0,5; 4,25; 7,9; 63,7; ordine descrescătoare: 63,7; 7,9; 4,25; 0,5; 0,09. **6.** a) 23,15; b) 23,1; c) 23; d) 20. **7.** a) $3 < 3{,}12 < 4$; b) $0 < 0{,}5 < 1$; c) $6 < 6{,}29 < 7$; d) $23 < 23{,}24 < 24$. **8.** a) 7,211; 7,213; 7,229; b) 6,192; 6,194; 6,197; c) 8,3421; 8,3423; 8,3428; d) 7,004; 7,125; 7,264. **9.** $370 < n \leq 527$; numerele căutate sunt 371, 372, ..., 527, adică $527 - 371 + 1 = 157$ numere.

Minitest: **1.** a) $1{,}23 < 1{,}3$; b) $453{,}012 > 452{,}987$. **2.** 567,1; 56,71; 5,671; 0,5671. **4.** a) 23,7; b) $F = 11{,}34$; $f = 13{,}5$; c) 7,126.

Lecția 3. Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

1. a) 10,8; b) 9; c) 4,39; d) 221,72; e) 59,82; f) 105,325. **2.** 151,25. **3.** 15,37. **4.** a) 3,5; b) 5,8; c) 8,54; d) 25,39; e) 19,002; f) 201,91. **5.** 8,9. **6.** 88,35. **7.** 76. **8.** a) 9,4; b) 17,9; c) 76,36; d) 302,7; e) 22,5429; f) 52,4407. **9.** a) 4,5; 3,23; b) 28,65; 17,45. **10.** $a = 1$, $b = 2$ sau $a = 2$, $b = 1$. **11.** $D - S = d$ și $(D + 23{,}456) - (S - 1{,}544) = D - S + 23{,}456 + 1{,}544 = D - S + 25 = d + 25$; diferența se mărește cu 25. **12.** a) Numărul căutat este 458; b) Numărul căutat este 1 110. **13.** Răspuns corect, a) mai mic decât 10 lei.

Minitest: **1.** a) 24,394; b) 1,12. **2.** 55,2; 9,4. **3.** 74,85; 37,4. **4.** 24 020.

Lecția 4. Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule

1. a) 23; b) 17,3; c) 3; d) 1 251; e) 49 537; f) 253; g) 42 003,5; h) 20. **2.** a) 6; b) 8,25; c) 411,57; d) 448,224; e) 11 023,76; f) 3 490,63. **3.** a) 1,027 kg; b) 0,276 l. **4.** a) 26,6; b) 22,264; c) 147,2115; d) 8,82688; e) 0,648; f) 430,752. **5.** a) 9; b) 84; c) 362,8; d) 112,416; e) 66,48; f) 1,075; g) 5,103; h) 47,6. **6.** a) 323,925 m; b) 6,04 kg. **7.** $15{,}75 < a \cdot b < 21$; de exemplu $15 < a \cdot b < 21$. **8.** a) $3{,}7 \cdot 5 = 18{,}5$; b) $6{,}12 \cdot 0{,}2 = 1{,}224$; c) $15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$; d) $0{,}19 \cdot 100 = 19$. **9.** a) $2 \cdot 0{,}1 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 0{,}1 = 10 \cdot 0{,}1 = 1$; b) 27; c) 56; d) 534; e) 436,8; f) 15,7. **10.** $4{,}2 - 3{,}14 = 1{,}06$; $5{,}3 \cdot 0{,}81 = 4{,}293$; $12{,}6 + 4{,}08 = 16{,}68$. **11.** $3{,}36 < a \cdot b < 4{,}16$; $n = 3$. **12.** $a \cdot b = 9{,}45$ și $(a + 1) \cdot b = 12{,}95$ sau $a \cdot b + b = 12{,}95$; $b = 12{,}95 - 9{,}45 = 3{,}5$. **13.** a) $6{,}51 = 0{,}651 \cdot 10^1 = 0{,}0651 \cdot 10^2$; b) $18{,}33 = 1{,}833 \cdot 10^1 = 0{,}1833 \cdot 10^2$; c) $378{,}123 = 37{,}8123 \cdot 10^1 = 3{,}78123 \cdot 10^2 = 0{,}378123 \cdot 10^3$. **14.** $4{,}3 \odot 2{,}5 = 12{,}24$.

Minitest: **1.** a) 1231,6; b) 50 070. **2.** 159. **3.** De exemplu 9. **4.** În prima zi parcurge $0{,}25 \cdot 36 = 9$ km; în a doua zi parcurge $0{,}4 \cdot 36 = 14{,}4$ km. În a treia zi parcurge $36 - 9 - 14{,}4 = 12{,}6$ km.

Lecția 5. Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală; aplicație: media aritmetică a două sau mai multor numere naturale; transformarea unei fracții ordinare într-o fracție zecimală; periodicitate

1. a) 4,6; b) 21,25; c) 0,7; d) 0,28; e) 1,18; f) 47,2; g) 3,655; h) 0,064. **2.** 0,8; 1,(6); 4,6; 20,5; 4,25; 3,(2); 1,4(6); 95,676; 3,04; 2,08(3); 546,472; 0,0688. **3.** a) 1,1(6); b) 2,4(6); c) 2,(7); d) 25,91(6); e) 0,72; f) 0,037; g) 1,975; h) 109,(6). **4.** a) 24; b) 32; c) 4,5; d) 7,7; e) 2,44; f) 3,8. **5.** 24,4. **6.** 21,42. **7.** Fracții ordinare care se transformă în fracții zecimale periodice simple: $\frac{8}{9}, \frac{1}{13}, \frac{239}{17}, \frac{45}{43}, \frac{25}{75}$; fracții ordinare care se transformă în fracții zecimale periodice mixte: $\frac{5}{6}, \frac{2}{45}, \frac{1}{62}, \frac{37}{15}, \frac{403}{600}$. **8.** a) $n = 10$; b) $n = 1$; c) $n = 5$. **9.** a) $n = 5$; b) $n = 13$; c) $n = 0$. **10.** a) $2012 - 1 = 2011$; $2011 : 2 = 1005$ rest 1; a 2012-a zecimală este 3; b) $S = 3 + 49 \cdot (3 + 5) + 3 = 398$. **11.** a) $32{,}126 = 321{,}26 : 10^1 = 3\,212{,}6 : 10^2$; b) $25{,}48 = 254{,}8 : 10^1 = 2\,548 : 10^2$; c) $672{,}9873 = 6\,729{,}873 : 10^1 = 67\,298{,}73 : 10^2$. **12.** 8. **13.** a) 15; b) 254,5; c) 7,7; d) 11,66; e) 28,92; f) 17,4. **14.** a) 21,1; b) 4 758; c) 46. **15.** 7. **16.** a) suma notelor, S, este egală cu 180, deci media notelor este 7,5; b) calculam suma notelor mai rapid astfel $S = 3 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 = 180$. **17.** $a + b + c = 132$, $b = a + 18$, $c = 2 \cdot a$, $d = a + 9$; obinem $a = 21$, $b = 39$, $c = 42$, $d = 30$. **18.** $a = 34$, $b = 30$, $c = 48$. **19.** a) 8; b) 7,5; c) 8.

Minitest: **1.** a) 9,75; b) 9,(6); c) 0,2(5). **2.** 8,25. **3.** 3, 4, 5, 6, 7. **4.** 2.

Lecția 6. Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural nenul; împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule. Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară

1. a) 2,86; b) 0,635; c) 13,9475; d) 3,885; e) 12,011; f) 7,82; g) 16,275; h) 7,54. **2.** a) 0,02345; b) 6,75; c) 9,123; d) 1,578; e) 1,29567; f) 0,0004; g) 0,01234; h) 0,075. **3.** a) 0,65 tone; b) 24,096 kg; c) 0,2345 kg. **4.** 2,63; 0,058; 3,271; 5,003; 44,87324; 0,252525; **5.** a) 12; b) 11,2; c) 3; d) 29,2625; e) 5672; f) 800; g) 5,90625; h) 17,94. **6.** a) $2\frac{5}{9}$, $13\frac{7}{9}$, $125\frac{8}{9}$, $\frac{29}{99}$, $4\frac{37}{99}$, $125\frac{106}{999}$, $29\frac{471}{999}$; b) $\frac{25}{90}$, $4\frac{59}{90}$, $8\frac{214}{900}$, $16\frac{1421}{9900}$, $200\frac{79046}{99900}$. **7.** a) 185; b) 250,15; c) 10; d) 20; e) 100. **8.** a) 1 666,(6); b) 2 100; c) 426,(6); d) 26 666,(6); e) 36,(6).

9. $23{,}789 : 100 = 0{,}23789$; $237{,}89 : 100 = 2{,}3789$; $2{,}3789 : 100 = 0{,}023789$. **10.** a) 5,5(6); b) 3,7(08).

Lecția 7. Număr rațional pozitiv; ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive

1. a) 15,4; b) 3,27; c) 4,4; d) 1,524; e) 41,2; f) 129,8; g) 1,6588; h) 9. **2.** a) $\frac{5}{8}$; b) $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; c) $\frac{17}{18}$; d) $\frac{28}{3}$; e) $\frac{17}{7}$; f) Z$\frac{5}{11}$. **3.** a) 22,7; b) 4,15; c) 27,027; d) 13,86; e) 68,7; f) 374,829. **4.** a) 43,4; b) 131,12; c) 47,92; d) 34,62; e) 1,732; f) 9,01. **5.** a) $\frac{43}{45}$; b) 7; c) $\frac{5}{18}$; d) 14. **6.** a) 83,7; b) 228; c) 9,84; d) 640; e) 25,5; f) 34,162; g) 1; h) 90. **7.** 2,86; 0,371; 0,36; 0,385. **8.** a) $\frac{2}{9}$; b) 3; c) 0; d) $\frac{1}{2}$. **9.** a) Model 1: $(12{,}56 + 41{,}275 + 29{,}11) \cdot 10 = 829{,}45$. Model 2: $12{,}56 \cdot 10 + 41{,}275 \cdot 10 + 29{,}11 \cdot 10 = 829{,}45$. b) 5 km. c) 10 zile.

Minitest: **1.** a) 6,08; b) 12,56; c) 45,3391(6). **2.** a) 19,71; b) 1,3. **3.** $33{,}924 < 39{,}1925$. **4.** a) fals; b) fals; enunțurile corecte sunt: a) $(18{,}16 - 12{,}3) : 2{,}5 = 13{,}24$; b) $18{,}125 : (1{,}3 + 1{,}2) \cdot 5{,}4 = 39{,}15$.

Lecția 8. Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții

1. Este falsă. În primul rând nu se poate forma o cutie cubică din două cuburi cu muchia de 1 m. **2.** 5 caiete și 7 cărți. **3.** 1 200 de tone de orz și 7 200 de tone de grâu. **4.** 1,350 kg. **5.** 2 560 cm. **6.** b) Luca are 44 kg și indicele 19,(5). **7.** 5 lei, respectiv 4 lei. **8.** 32 de ani. **9.** 132 m. **10.** o zi. **11.** $\frac{7}{12}$ din numărul elevilor depășește jumătate din numărul elevilor. **12.** 14 maimuțe. **13.** 60 de litri.

Joc. 8 cuburi, 12 cuburi, 6 cuburi, respectiv, un cub.

Minitest: **1.** 67,50 lei. **2.** 15 lei. **3.** 3 caiete și 7 cărți.

Evaluare: **1.** a). **2.** b). **3.** c). **4.** a). **5.** a). **6.** c). **7.** b). **8.** a). **9.** d). **10.** c). **11.** b). **12.** $A = 100$; $B = 6$; $C = 3$.

Unitatea 6 Geometrie

Lecția 1. Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment

1. a) identice; b) distincte. **3.** A și C pot fi atât identice, cât și distincte, deoarece în ipoteză nu scrie A diferit de C. **4.** a) segment de dreaptă; b) dreaptă; c) punct; d) semidreaptă; e) punct; f) plan; g) semidreaptă. **5.** a) A; b) A; c) F. **7.** a) segment de dreaptă; b) segment de dreaptă; c) o semidreaptă. **8.** a) AB, AC, AD, BC, BD, CD; b) AC, AD, BC, BD. **9.** 3 segmente: AB, AC, BC. **10.** punct, semidreaptă, dreaptă, plan, semidreaptă, punct, triunghi, cerc, dreaptă, segment de dreaptă, cub.

Știați că: 19.
Joc: Nu câștigă nimeni, deoarece oricum ar colora 2 puncte, mereu va fi un număr impar de puncte de aceeași culoare.

Lecția 2. Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Pozițiile relative a două drepte

1. a) A; b) A; c) A; d) F; e) F; f) A; g) A; h) A; **2.** a) G, E, O; b) punct interior; c) punct exterior; d) coliniare; e) necoliniare; f) drepte identice; **5.** O infinitate de drepte. **6.** a) identice; b) o infinitate; c) distincte; d) dreaptă. **8.** a) 3; b) 6. **9.** Dacă $A = B = C$, determină o infinitate de drepte. Dacă $A = B \neq C$, atunci determină o singură dreaptă. Dacă $A \neq B \neq C \neq A$ atunci determină o dreaptă dacă sunt coliniare sau 3 drepte dacă sunt necoliniare. **11.** a) Dacă punctele sunt coliniare, atunci determină o dreaptă. b) Dacă oricare 3 puncte sunt necoliniare, atunci determină 28 de drepte. **12.** a) AV și a; AV și b; AV și c; b) dreptele a și b; b și c; a și c; c) AB și a; TE și b; VF și c. **15.** Dacă cele 3 drepte sunt paralele, numărul punctelor de intersecție este 0; dacă 2 dintre drepte sunt paralele, numărul punctelor de intersecție este egal cu 2; dacă cele 3 drepte sunt concurente în același punct, au un singur punct de intersecție, iar dacă sunt concurente două câte două, determină 3 puncte de intersecție.

Joc. Este posibil. Fiind așezați față în față, fiecare vede diferit.

Lecția 3. Lungimea unui segment

1. Dina. **7.** i) 1 154 m; ii) 1 275 m. **8.** 7 cm. **9.** 18 cm. **10.** 200 m. **11.** a) A, B, C; b) B, A, C; c) Nu se poate construi o figura geometrică, în acest caz, datele fiind contradictorii; d) A, C, B. **12.** 6 cm. **13.** $AB = AC = 4$ cm. Deci $AB \equiv AC$. **14.** În funcție de ordinea punctelor avem $BC = 3$ cm sau $BC = 7$ cm. **15.** 8 cm. **16.** 3 cm. **17.** A. **18.** Fie $AB = x$, $BC = y$ și $CD = z$. Atunci $2AC = AB + AD \Leftrightarrow 2(x+y) = x + (x+y+z) \Leftrightarrow y = z \Leftrightarrow BC = CD \Rightarrow BC = 2^{10}$ cm. **19.** 6 cm, 4 cm, 19 cm, respectiv 190 de cm. **20.** 57 cm, respectiv 570 de cm.

Joc: a) 4 segmente; b) 6 segmente.

Lecția 4. Mijlocul unui segment. Simetricul unui punct față de un punct

3. $AC = 5$ cm. **4.** a) 12 cm; b) 6 cm. **7.** a) 1,8 m. **11.** a) 4 cm. **13.** 10,5 cm.

Minitest: **1.** a) identice, distincte; b) coliniare, necoliniare; c) interior, exterior; d) identice, concurente; e) originea, sensul. **2.** a) 4,5 cm.

Lecția 5. Unghi: definiție, notații, elemente

1. a) $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$; b) OB și vârf O; c) OB, OC, O; d) $\sphericalangle AOC$, O; e) OB, $\sphericalangle AOB$; f) vârf, punctul O. **2.** a) A; b) F; c) F; d) F. **3.** a) 480'; b) 2 100'; c) 550'; d) 930'; e) 3 945'. **4.** a) 5°; b) 20°; c) 62°; d) 62°30'; e) 80°45'. **5.** a) 90°; b) 47°; c) 152°; d) 22°; e) 83°42'; f) 14°31'; g) 46°7'; h) 138°42'; i) 18°42'; j) 24°34'. **6.** a) 56°, 57°, 56°; b) 27°, 28°, 28°; c) 107°, 108°, 107°; d) 59°, 60°, 60°; e) 89°, 90°, 90°. **7.** $\sphericalangle EAR = 30°$, $\sphericalangle TAE = 60°$. **8.** Doar d) este F. **9.** Sunt congruente. **10.** a) n ia valorile 0, 1, 2, …, 24; b) 25; c) 26, 27, 28, …, 114; d) 115. **11.** $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOD = 70°$. **12.** $\sphericalangle LOT = 40°$; $\sphericalangle COT = 180°$; metoda unghiului alungit. **13.** $\sphericalangle CBD = 45°$. **14.** a) $\sphericalangle BIS = \sphericalangle LIS = 60°$.

Minitest: **1.** BC, B. **2.** 37°30'. **3.** $\sphericalangle CAI = 80°$; $\sphericalangle BAI = 180°$. **4.** $\sphericalangle PAO = 30°$; $\sphericalangle RAO = 60°$.

Lecția 6. Figuri congruente. Axa de simetrie

2. a) $\triangle DCP$, DP, CP, $\sphericalangle CDP$, $\sphericalangle DPC$; b) $\triangle EFP$, $\triangle EBP$. **4.** a) M este mijlocul segmentului AB și $AM \equiv BM$; OM este axa unghiului AOB și unghiul $\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$; b) T este mijlocul segmentului AO și $AT \equiv TO$; BT este axa unghiului ABO și unghiul $\sphericalangle ABT \equiv \sphericalangle OBT$. **6.** Toate sunt adevărate. **7.** A, D, E, M, T, V, W, O.

Joc. Încercați să separați 4 dreptunghiuri a 6 pătrate fiecare.

Minitest: **1.** a) $AC \equiv BC$; b) C este mijlocul segmentului AB; c) g este axa de simetrie. **2.** a) $\sphericalangle AIB \equiv \sphericalangle AIS$; b) IA este axa de simetrie a unghiului BIS. **5.** Trei cifre: 0, 3, 8.

Evaluare: **1.** a); **2.** b); **3.** c); **4.** b); **5.** a) **6.** a); **7.** b); **8.** c); **9.** A; A; F; A. **10.** d_a_b. **11.** 174 de lei. **12.** $AB = 154$ cm; $CD = 75$ cm; $EF = 27$ cm; $GH = 88$ cm. **13.** a) 10 cm; b) Se arată că E este mijlocul segmentului DT. **14.** $COD + \sphericalangle DOL = 180°$.

Unitatea 7 Unități de măsură

Lecția 1. Unități de măsură pentru lungime. Aplicație: perimetre

1. a) 85 dam > 85 dm; b) 24 cm = 240 mm; c) 72 km = 7 200 dam; d) 6,8 km > 601 dam; e) 3,4 dm > 333 mm; f) 0,764 dam > 7 630 mm. **2.** b) c) sunt adevărate; a) d) e) f) false. **3.** a) 7,5 m; b) 458 m; c) 246,5 m; d) 2 350 m; e) 8 250 m. **4.** a) 62,5 dm; b) 236 dm; c) 24 506 dm; d) 1 750 dm; e) 3,6 dm; f) 0,475 dm; g) 0,455 dm; h) 0,032 dm; i) 2,35 dm; j) 0,06 dm. **5.** a) 325 dam; b) 8,5 dam; c) 6,8 dam; d) 1 320 dam; e) 0,6 dam; f) 8,27 dam; g) 4,05 dam; h) 0,02 dam; i) 0,0045 dam; j) 0,08 dam. **6.** a) 1 238 dm; b) 77,3 cm; c) 6 242,4 dam; d) 24,8 m; e) 24,75 hm; f) 2,81 km. **7.** a) 6 cm; b) 119,6 m; c) 2,61 hm; d) 85,175 dm; e) 3,94 km; f) 2,32 dam. **8.** a) cm; b) m; c) km; d) mm; e) cm; f) km. **10.** A – C – E – B. **11.** Lungimile lipsă: 1,7 km și 166,5 dam; perimetrele care lipsesc 17,2 m și 98 cm. **12.** 60 cm. **13.** $x = 12$ și $y = 12{,}8$. **14.** Perimetre lipsă: 201,6 m; 18,36 m; 1 881 m; lungime: 209,4 cm; lățime: 28 hm. **18.** 35 m. **19.** 39 cm.

Minitest: **1.** a) 3,6 m; b) 6 280 dam; c) 0,002465 dm; d) 0,03 cm; **2.** 20,6 m. **3.** 6,6 cm; **4.** 182 m; 183 m; 184 m. **5.** 2 268 hm.

Lecția 2. Unități de măsură pentru arie. Aplicații: Aria pătratului/dreptunghiului

1. a) 9 cm^2; b) 144 m^2; c) 6,25 dam^2; d) 0,09 km^2; e) 14 400 mm^2; f) 0,0001 ha; g) 56,25 cm^2; h) 20,25 dm^2. **2.** a) 16 m^2; b) 50,5 cm^2; c) 7 m^2; d) 576 m^2. **3.** $P = 22$ cm, $A = 30$ cm^2. **4.** a) 7,2 m^2; b) 39 000 m^2; c) 2 500 m^2; d) 6,7 m^2; e) 300 m^2; f) 7,2 m^2. **5.** a) 1 528 cm^2; b) 82 000 dm^2; c) 0,7 dam^2; d) 0,147 km^2; e) 250 ari; f) 0,1 ha. **6.** a) cm^2; b) m^2; c) km^2. **8.** a) 36 cm^2 > 123 mm^2; b) 22 dam^2 < 1 ha; c) 72 ari < 0,072 km^2; d) 74 m^2 < 7,4 hm^2; h) 0,05 dam^2 = 500 dm^2; f) 3,5 m^2 > 3,49 dm^2. **9.** Suprafața curții este de 987 m^2, iar suprafața unei plăci este de 0,25 m^2. Sunt necesare 3 948 plăci. **10.** 6 zile. **11.** 9 cm^2.

Minitest: **1.** a) 2 453 hm^2; b) 0,192 hm^2; c) 0,095046 ha. **2.** a) 2,1025 cm^2; b) 14,62 dm^2; c) 225 de plăci. **3.** 1 400 m^2.

Lecția 3. Unități de măsură pentru volum. Volumul cubului și al paralelipipedului dreptunghic

4. a) b) d) false; c) e) f) adevărate. **5.** a) 6 250 dm^3; b) 6 000 dm^3; c) 500 dm^3; d) 3 dm^3; e) 4 dm^3; f) 0,0475 dm^3. **6.** a) 2 800,8 m^3; b) 67,103 cm^3; c) 653 965 dam^3; d) 820,166 hm^3. **8.** 131,10 lei. **9.** a) O muchie are 15 cm lungime. Perimetrul unei fețe este 60 cm, iar aria 225 cm^2. b) 3 375 cm^3. **10.** a) 150 cm^2; b) 70 cm; c) 125 cm^3. **11.** Lungimile muchiilor 20 dm; 6 hm; volumele 15,625 m^3, 13 824 cm^3. **12.** a) 158 cm^2; b) 66 cm; c) 120 cm^3. **13.** Bazinul are volumul de 6 000 m^3; 6 000 000 litri. **14.** O cărămidă are volumul de 0,0042 m^3, iar cele 210 cărămizi ocupă 0,882 m^3. Volumul mortarului este 0,118 m^3. **15**. Zăpada căzută formează un paralelipiped dreptunghic cu volumul de 1 750 m^3. Ea cântărește 105 tone. **16.** În butoi se colectează 729 de litri, adică 0,729 m^3. Apa se ridică la înălțimea de 729 mm. **17.** a) 240 dm^3; b) În acvariu erau 200 l apă, din care au rămas 120 l. Apa rămasă se ridică la înălțimea de 3 dm, deci nivelul a scăzut cu 20 cm.

Joc. Se ridică al doilea pahar, se varsă conținutul în al cincilea pahar și apoi se așază gol în poziția inițială.

Minitest: **1.** a) 3 400 m^3; b) 0,0068 km^3; c) 0,0646 dm^3; d) 1,5 kl. **2.** 8 cuburi. **3.** 72,9 dal. **4**. Volumul containerului este de 300 m^3, iar volumul unei cărămizi este de 0,003 m^3. Se pot pune 100 000 de cărămizi. Alternativ, lungimea containerului este egală cu lungimea a 40 de cărămizi, lățimea containerului egală cu lățimea a 50 de cărămizi, iar înălțimea egală cu cea a 50 de cărămizi, deci încap $40 \times 50 \times 50 = 100\,000$ de cărămizi.

Evaluare: **1.** a). **2.** c). **3.** b). **4.** b). **5.** a). **6.** a). **7.** b). **8.** c). **9.** Adevărat, adevărat, fals, adevărat. **10.** c_a_d. **11.** 223,35 lei. **12.** L = 113 dm; l = 40 dm; h = 30 dm. **13.** a) 356 m; b) 81 ari. **14.** a) 240 dm^3. b) 5 dm.